

Подготовка к итоговой аттестации по математике: решение геометрических задач

Павлова Татьяна Николаевна,
ведущий методист по математике
объединенной издательской группы «ДРОФА–ВЕНТАНА»

27 марта 2017 г.



drofa.ru | vgf.ru



drofapublishing



drofa.ventana



drofa.ventana



drofa.ventana

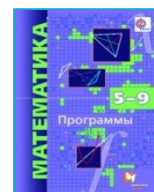
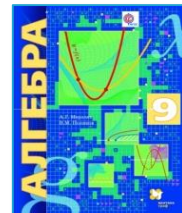
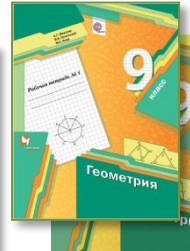
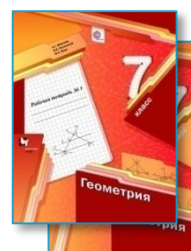
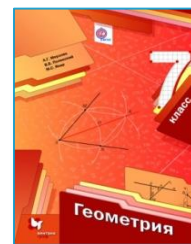
Математика

Алгебра

Геометрия

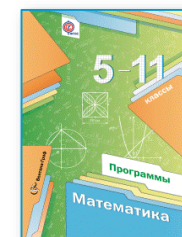


Линия УМК Авторы: Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.



Состав УМК:

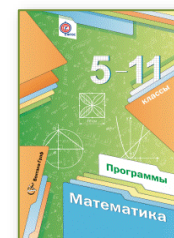
- ✓ Учебник
- ✓ Рабочие тетради
- ✓ Дидактические материалы
- ✓ Методическое пособие
- ✓ Программа с CD
- ✓ Электронная форма учебника



Геометрия

Линия УМК для 7–9 классов

Авторы: Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.



Полное соответствие требованиям ФГОС:

- ✓ язык изложения учебного материала доступен для понимания учащимися;
- ✓ учебники соответствуют возрастным особенностям и мотивируют учащихся к самостоятельному мышлению;
- ✓ систематизации и обобщению изученного материала посвящены специальные рубрики - «Проверь себя» и «Итоги главы».

ОБЪЕДИНЕННАЯ
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА

дрофа

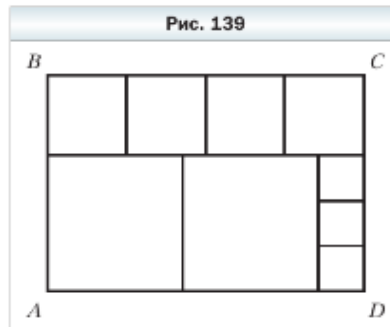
вентана
граф

Геометрический материал в курсе математики 5-6 классов

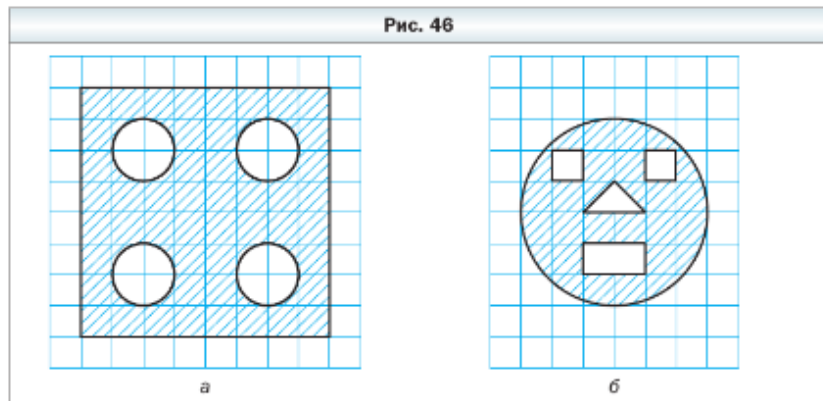


371. Прямоугольник $ABCD$ разрезали на квадраты так, как показано на рисунке 139. Сторона наименьшего из квадратов равна 4 см. Найдите длины сторон прямоугольника $ABCD$.

372. Начертите прямоугольник, соседние стороны которого равны 3 см и 6 см. Разделите его на три равных прямоугольника. Вычислите периметр каждого из полученных прямоугольников. Найдите два решения этой задачи.



751. Вычислите площадь заштрихованной фигуры (рис. 46), если длина стороны клетки равна 1 см.

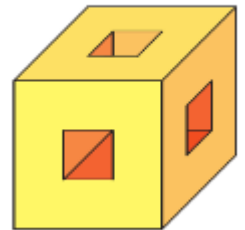


752. Пицца, диаметр которой равен 30 см, стоит столько же, сколько две пиццы диаметром 20 см. В каком случае Дима съест больше пиццы: если купит одну большую или две маленькие, если все пиццы имеют одинаковую толщину?

638. В бассейн, площадь дна которого равна 1 га, налили 1 000 000 л воды. Можно ли в этом бассейне провести соревнования по плаванию?

639. В кубе с ребром 3 см проделали три сквозных квадратных отверстия со стороной 1 см (рис. 181). Найдите объём оставшейся части.

Рис. 181



759. Докажите, что сумма длин красных дуг равна сумме длин зелёных дуг (рис. 49).

760. Задача Гиппократа. (Гиппократ Хиосский — древнегреческий геометр (V в. до н. э.).) Докажите, что сумма площадей закрашенных фигур («луночек») равна площади прямоугольника (рис. 50).

Рис. 49

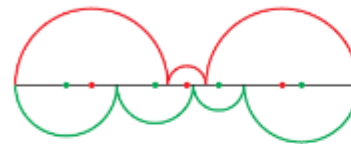
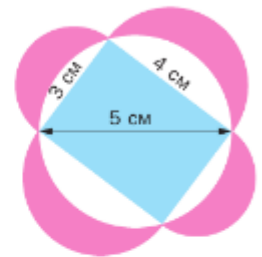


Рис. 50



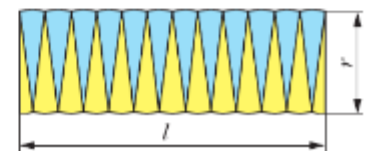
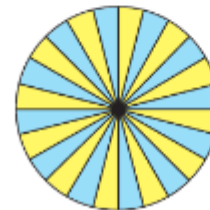
761. Два квадрата со стороной 1 см имеют общий центр (точка пересечения его диагоналей) (рис. 51). Докажите, что площадь их общей части больше $\frac{\pi}{4}$.

762. На рисунке 52 проиллюстрирован старинный способ вычисления площади круга. Объясните, почему произведение nl приближённо равно площади круга.

Рис. 51

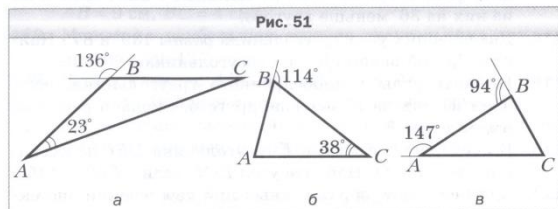


Рис. 52

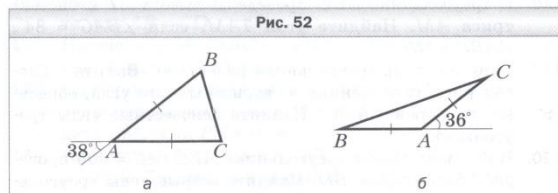


Сумма углов треугольника

104. Найдите угол треугольника, если два другие его угла равны 53° и 62° .
105. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 48° . Найдите углы при основании этого треугольника.
106. Найдите на рисунке 51 неизвестные углы треугольника ABC .



107. Найдите на рисунке 52 неизвестные углы равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$).

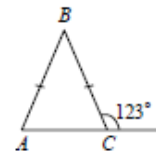


108. Найдите углы треугольника DEF , если $\angle D + \angle E = 70^\circ$, $\angle E + \angle F = 150^\circ$.
109. Найдите углы равнобедренного треугольника, если угол при основании на 36° больше угла при вершине.
110. Найдите углы треугольника, если их градусные меры относятся как $3 : 4 : 5$.

Вариант 1

123. Найдите сторону AC равнобедренного треугольника ABC , если $AB = 10$ см, $BC = 4$ см.
124. Сравните углы треугольника ABC , если $AB < BC$ и $AB = AC$.
125. Сравните стороны треугольника DEF , если $\angle D > \angle E$ и $\angle E > \angle F$.
126. Существует ли треугольник ABC , в котором $\angle A = 32^\circ$, $\angle B = 74^\circ$, $BC = 6$ см, $AC = 5$ см?
127. Существует ли треугольник ABC , в котором $\angle A = 100^\circ$, $AB = 9$ см, $BC = 4$ см?
128. Может ли наибольшая сторона треугольника лежать против угла 42° ?
129. В треугольнике ABC известно, что $AB = 1,2$ см, $AC = 2,3$ см. Найдите третью сторону этого треугольника, если её длина, выраженная в сантиметрах, равна целому числу. Сколько решений имеет задача?

- 9 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC внешний угол при вершине C равен 123° . Найдите величину угла BAC . Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

234. Дано: $AM = BM$, $BK = CK$, $\angle BMK = 30^\circ$, $\angle BKM = 70^\circ$.

Найти: $\angle ABC$.

Решение.

$\angle BMK$ — внешний угол треугольника _____.

Тогда $\angle BMK = \angle A + \angle$ _____

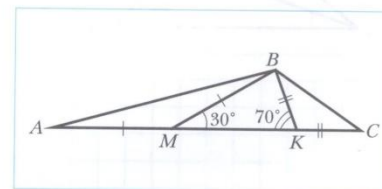
Поскольку $\triangle AMB$ — _____, то $\angle A =$ _____,
 $\angle A =$ _____

$\angle BKM$ — внешний угол треугольника _____. Тогда $\angle BKM = \angle C + \angle$ _____

Поскольку $\triangle BKC$ — _____, то $\angle C =$ _____,
 $\angle C =$ _____

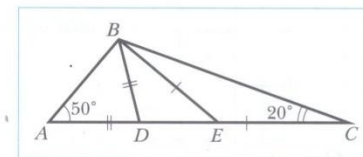
Из треугольника ABC : $\angle ABC = 180^\circ - (\text{_____} + \text{_____})$, $\angle ABC =$ _____

Ответ: _____



235. Дано: $AD = BD$, $BE = CE$, $\angle A = 50^\circ$, $\angle C = 20^\circ$.

Найти: $\angle DBE$.



Решение.

240. Дано: $\triangle ABC$, BD — биссектриса $\triangle ABC$, $AB < BC$.

Доказать: $\angle BDC$ — тупой.

Доказательство.

Поскольку $AB < BC$, то $\angle C$ _____ $\angle A$.

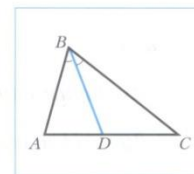
$\angle BDC$ — внешний угол треугольника _____. Тогда

$\angle BDC = \angle$ _____ + $\angle$ _____

$\angle ADB$ — внешний угол треугольника _____. Тогда $\angle ADB = \angle$ _____ + $\angle$ _____

Так как $\angle ABD$ _____ $\angle CBD$ и $\angle A$ _____ $\angle C$, то $\angle BDC$ _____ $\angle ADB$.

Поскольку $\angle BDC$ и $\angle ADB$ являются смежными углами, то больший из этих углов является _____. Следовательно, $\angle BDC$ — тупой. ◀



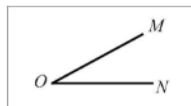
Геометрические фигуры и их свойства

99. Верно ли утверждение:

- 1) для каждого угла, отличного от развёрнутого, можно построить только один вертикальный угол;
- 2) для каждого угла, отличного от развёрнутого, можно построить только один смежный угол
- 3) если углы равны, то они вертикальные;
- 4) если углы не равны, то они не вертикальные;
- 5) если углы не вертикальные, то они не равны;
- 6) если два угла смежные, то один из них острый, а второй — тупой;
- 7) если два угла смежные, то один из них больше другого;
- 8) если сумма двух углов равна 180° , то они смежные;
- 9) если сумма двух углов не равна 180° , то они не смежные;
- 10) если два угла равны, то смежные с ними углы также равны;
- 11) если смежные углы равны, то они прямые;
- 12) если равные углы имеют общую вершину, то они вертикальные;
- 13) если два угла имеют общую сторону, то они смежные?

Задание № 1 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Сколько прямых определяют три точки, не лежащие на одной прямой?
А) 2 Б) 4 В) 3 Г) 1
7. Два луча являются дополнительными, если
А) они имеют общее начало
Б) их объединением является прямая и они имеют общее начало
В) они принадлежат одной прямой
Г) их объединением является прямая
8. Какое обозначение угла, изображённого на рисунке, является неверным?
А) $\angle O$ Б) $\angle MON$
В) $\angle OMN$ Г) $\angle NOM$
9. Какое из следующих утверждений неверно?
А) смежные углы имеют общую вершину
Б) смежные углы имеют общую сторону
В) всегда один из смежных углов острый, а другой — тупой
Г) если углы $\angle AOC$ и $\angle COB$ — смежные, то лучи OA и OB — дополнительные
10. Какое из следующих утверждений неверно?
А) вертикальные углы равны
Б) если углы равны, то они вертикальны
В) вертикальные углы имеют общую вершину
Г) стороны вертикальных углов образуют две пары дополнительных лучей
11. Какое из следующих утверждений верно?
А) перпендикулярные отрезки всегда имеют общую точку
Б) перпендикулярные лучи всегда имеют общую точку
В) перпендикулярные прямые всегда имеют общую точку
Г) перпендикулярные луч и отрезок всегда имеют общую точку



13. Укажите номера верных утверждений.

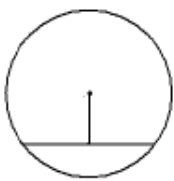
- 1) Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную этой прямой.
- 2) Треугольник со сторонами 1, 2, 4 существует.
- 3) Если в ромбе один из углов равен 90° , то такой ромб — квадрат.
- 4) В любом параллелограмме диагонали равны.

Задание № 2 «Проверьте себя» в тестовой форме

1. Треугольник является остроугольным, если
А) среди его углов нет тупого
Б) каждый его угол меньше прямого
В) среди его углов нет прямого
Г) каждый его угол меньше тупого
2. Если высота треугольника ему не принадлежит, то этот треугольник является:
А) прямоугольным
Б) тупоугольным
В) равносторонним
Г) остроугольным
3. Два треугольника равны, если
А) две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого треугольника
Б) два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника
В) две стороны и угол одного треугольника равны двум сторонам и углу другого треугольника
Г) две стороны и угол между ними одного треугольника равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника
6. Какое из следующих утверждений истинно?
А) равнобедренный треугольник — частный случай разностороннего треугольника
Б) разносторонний треугольник — частный случай разностороннего треугольника
В) равносторонний треугольник — частный случай равнобедренного треугольника
Г) равнобедренный треугольник — частный случай равностороннего треугольника
7. Какое из следующих утверждений неверно?
А) если высота треугольника делит сторону, к которой она проведена, на равные отрезки, то этот треугольник — равнобедренный
Б) если медиана и биссектриса, проведённые из одной вершины, не совпадают, то этот треугольник не является равнобедренным
В) если треугольник равносторонний, то длина любой его высоты равна длине любой его биссектрисы
Г) если два угла треугольника равны, то биссектриса третьего угла делит противоположную сторону треугольника на равные отрезки
8. Треугольник является равносторонним, если
А) его сторона в 3 раза меньше его периметра
Б) каждая его сторона в 3 раза меньше его периметра
В) две его высоты равны
Г) две его биссектрисы равны
9. Периметр равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) равен 16 см. Периметр треугольника ABM , где M — середина отрезка AC , равен 12 см. Найдите длину медианы BM .
А) 4 см Б) 6 см В) 2 см Г) 5 см
10. Каждая из точек X и Y равноудалена от концов отрезка AB . Какое из следующих утверждений неверно?
А) прямые XY и AB перпендикулярны Б) $\angle AXB = \angle AYB$
В) $\angle XAY = \angle XBY$ Г) $\angle AXY = \angle BXY$

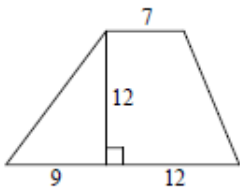
Задания с кратким ответом

10 Найдите длину хорды окружности радиусом 13 см, если расстояние от центра окружности до хорды равно 5 см. Ответ дайте в см.



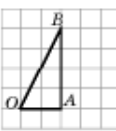
Ответ: _____.

11 Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.



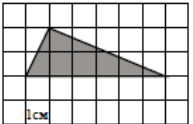
Ответ: _____.

12 Найдите тангенс угла AOB треугольника, изображённого на рисунке.



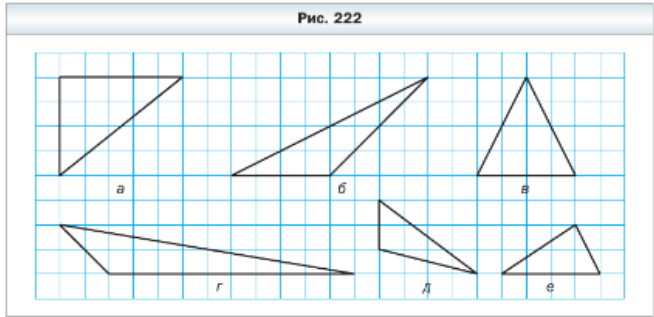
Ответ: _____.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$ изображён треугольник. Найдите его площадь. Ответ дайте в см^2 .

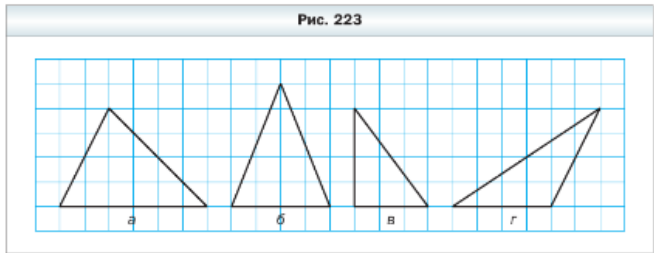


Ответ: _____.

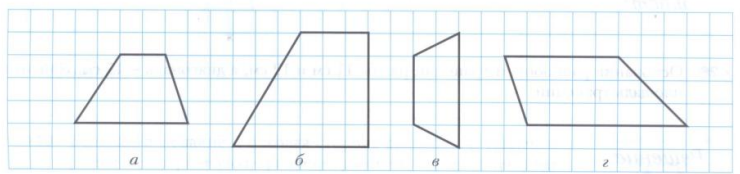
723. Какие из треугольников, изображённых на рисунке 222, равновелики?



724. Вычислите площадь треугольника, изображённого на рисунке 223, если длина стороны клетки равна единице длины.

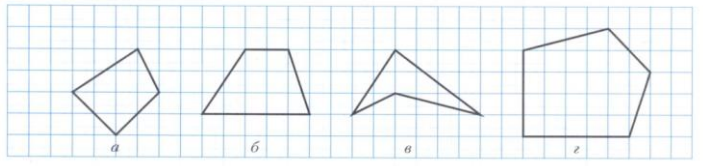


423. Вычислите площадь трапеции, изображённой на рисунке, считая, что длина стороны клетки равна 1 см.



$S = \underline{\hspace{2cm}}$ $S = \underline{\hspace{2cm}}$ $S = \underline{\hspace{2cm}}$ $S = \underline{\hspace{2cm}}$

402. Вычислите площадь многоугольника, изображённого на рисунке, считая, что длина стороны клетки равна 1 см.



$S = \underline{\hspace{2cm}}$ $S = \underline{\hspace{2cm}}$ $S = \underline{\hspace{2cm}}$ $S = \underline{\hspace{2cm}}$

Практическое задание

289. Постройте угол:

- 1) тангенс которого равен $\frac{4}{7}$;
- 2) котангенс которого равен 6;
- 3) синус которого равен 0,3;
- 4) косинус которого равен $\frac{3}{8}$.

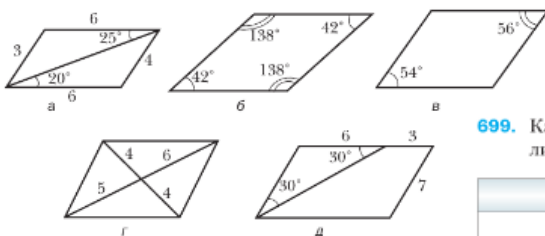


Задачи на готовых чертежах

Упражнения

37. Две параллельные прямые пересекают три другие параллельные прямые. Сколько при этом образовалось параллелограммов?
38. На рисунке 26 изображены параллелограммы. Определите, не выполняя измерений, на каких рисунках величины углов или длины отрезков обозначены неправильно (длины отрезков даны в сантиметрах).

Рис. 26



450. На рисунке 145 $DE \perp AB$, $BC \perp AD$. Укажите на этом рисунке все пары подобных треугольников.
451. На рисунке 146 $\angle ABC = \angle BDC$. Какие треугольники на этом рисунке подобны? Запишите равенство отношений их соответственных сторон.

Рис. 145

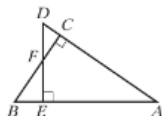
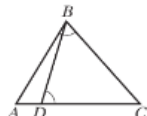
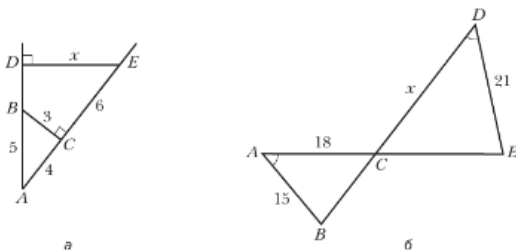


Рис. 146



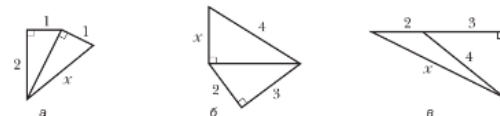
452. Укажите пары подобных треугольников, изображённых на рисунке 147, найдите длину отрезка x (размеры даны в сантиметрах).

Рис. 147



548. Найдите длину неизвестного отрезка x на рисунке 177 (размеры даны в сантиметрах).

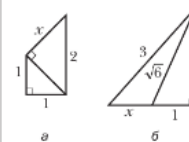
Рис. 177



549. Найдите длину неизвестного отрезка x на рисунке 178 (размеры даны в сантиметрах).

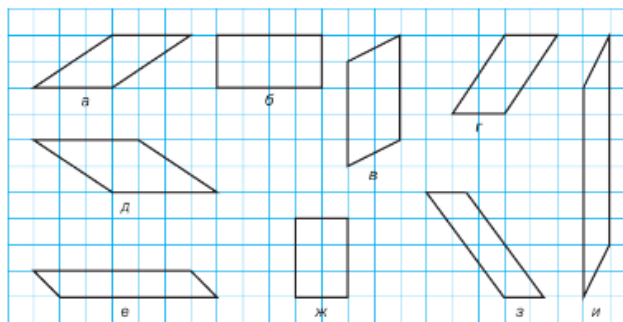
550. В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к боковой стороне, равна 8 см. Она делит боковую сторону, один из которых, иершине равнобедренка, равен 6 см. Найдите угол.

Рис. 178



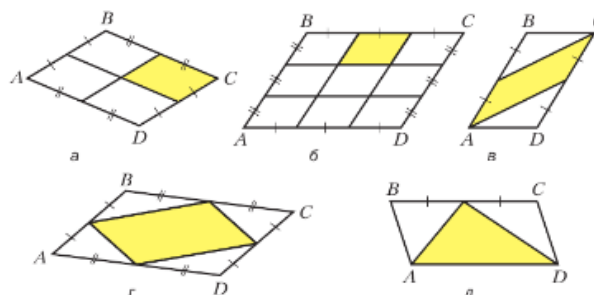
699. Какие из параллелограммов, изображённых на рисунке 218, равновелики?

Рис. 218



700. Площадь параллелограмма $ABCD$ (рис. 219) равна S . Чему равна площадь закрашенной фигуры?

Рис. 219



6 Треугольник ABC вписан в окружность с центром O . Угол BAC равен 32° . Найдите угол BOC . Ответ дайте в градусах.

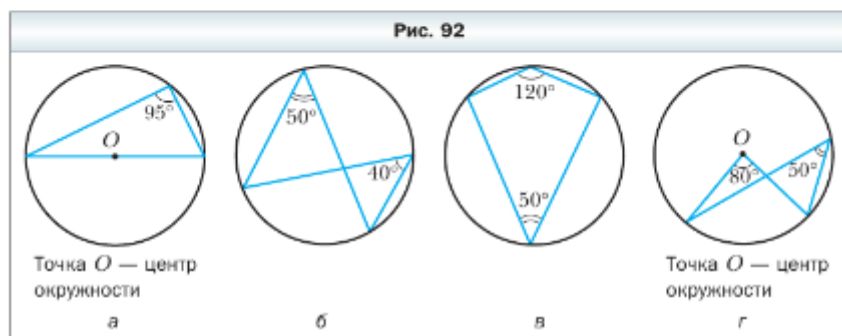
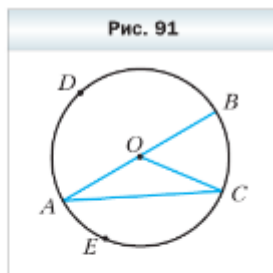
Ответ: _____

283. На рисунке 91 изображена окружность с центром в точке O . Найдите:

- 1) $\angle BDC$, если $\angle BAC = 40^\circ$;
- 2) $\angle BEC$, если $\angle BOC = 70^\circ$;
- 3) $\sphericalangle CE$, если $\angle CDE = 80^\circ$;
- 4) $\angle DBA$, если $\sphericalangle DBA = 300^\circ$.

284. Найдите ошибки на рисунке 92.

285. Найдите вписанный угол, если градусная мера дуги, на которую он опирается, равна: 1) 84° ; 2) 110° ; 3) 230° ; 4) 340° .



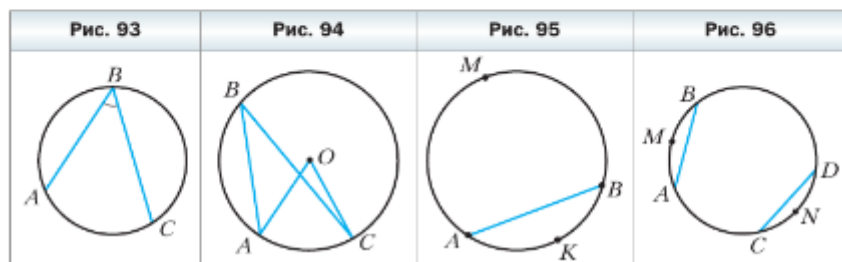
286. На рисунке 93 $\sphericalangle AB = 74^\circ$, $\angle ABC = 68^\circ$. Найдите $\sphericalangle BC$.

287. На рисунке 93 $\sphericalangle AB = 64^\circ$, $\sphericalangle BC = 92^\circ$. Найдите $\angle ABC$.

288. Центральный угол AOC на 25° больше вписанного угла ABC , который опирается на дугу AC (рис. 94). Найдите $\angle AOC$ и $\angle ABC$.

289. Концы хорды AB делят окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как 3 : 7. Под какими углами видна эта хорда из точек M и K (рис. 95)?

290. Хорды AB и CD равны (рис. 96). Докажите, что $\sphericalangle AMB = \sphericalangle CND$.



Угол и окружность

Точка O — центр окружности, $\angle AOB = 84^\circ$ (см. рисунок). Найдите величину угла ACB (в градусах).

§ 20. Некоторые свойства окружности. Касательная к окружности

Теорема 20.1

Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.



Доказательство

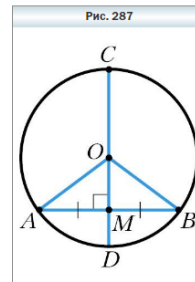
Если хорда является диаметром, то теорема очевидна.

На рисунке 287 изображена окружность с центром O , M — точка пересечения диаметра CD и хорды AB , $CD \perp AB$. Надо доказать, что $AM = MB$.

Проведём радиусы OA и OB . В равнобедренном треугольнике AOB ($OA = OB$) отрезок OM — высота, а значит, и медиана, т. е. $AM = MB$.

Теорема 20.2

Диаметр окружности, делящий хорду, отличную от диаметра, пополам, перпендикулярен этой хорде.

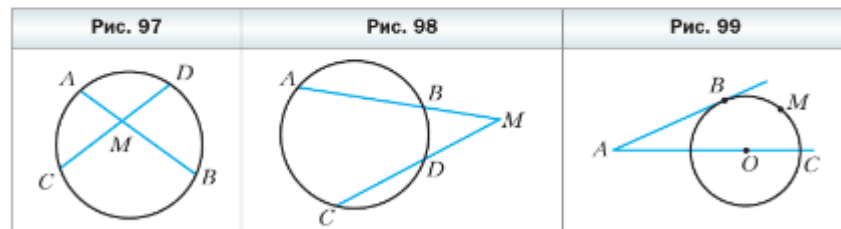


296. Докажите, что если вписанный угол является прямым, то он опирается на диаметр.

297. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M (рис. 97). Докажите, что $\angle AMC = \frac{1}{2}(\sphericalangle AC + \sphericalangle BD)$.

298. Хорды AB и CD окружности не пересекаются, а прямые AB и CD пересекаются в точке M (рис. 98). Докажите, что $\angle AMC = \frac{1}{2}(\sphericalangle AC - \sphericalangle BD)$.

299. Через точку A , лежащую вне окружности с центром в точке O , проведены две прямые, одна из которых касается окружности в точке B , а вторая проходит через её центр (рис. 99). Известно, что $\sphericalangle BMC = 100^\circ$. Найдите $\angle BAC$.

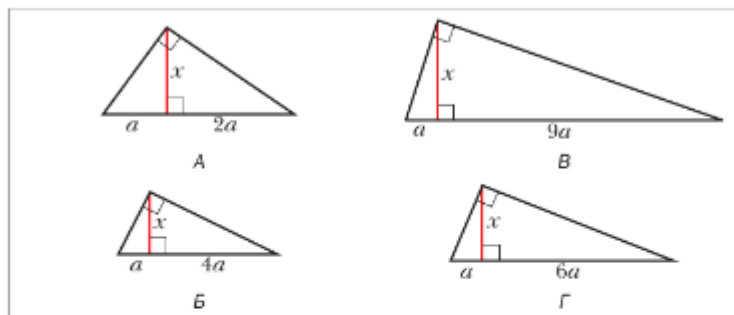


300. Биссектриса угла B треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке D . Найдите углы треугольника ADC , если $\angle ABC = 80^\circ$.

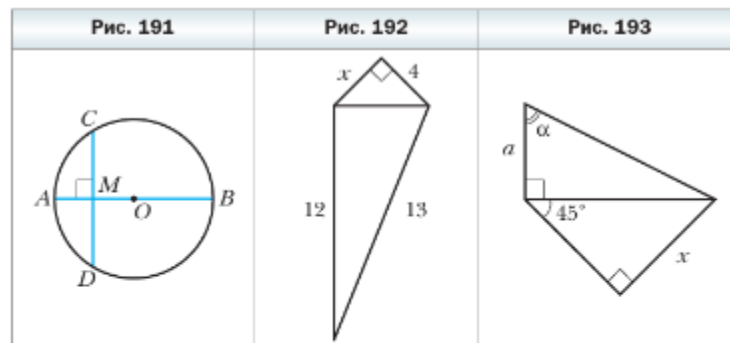
Нахождение геометрических величин

Задание № 3 в тестовой форме «Проверьте себя»

- Диаметр AB окружности с центром O перпендикулярен хорде CD (рис. 191). Какое из данных равенств неверно?
 А) $AC^2 = AM \cdot AB$ В) $AD^2 = MB \cdot AB$
 Б) $CM^2 = AM \cdot MB$ Г) $DM^2 = AM \cdot MB$
- На каком рисунке длина отрезка x равна $2a$?

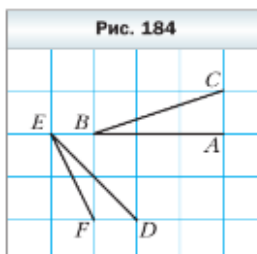


- Из теоремы Пифагора следует, что гипотенуза
 А) равна сумме катетов
 Б) равна сумме квадратов катетов
 В) больше катета
 Г) равна квадрату суммы катетов
- Длина отрезка x на рисунке 192 (размеры даны в сантиметрах) равна
 А) 4 см Б) 3 см В) 5 см Г) $3\sqrt{2}$ см
- Биссектриса равностороннего треугольника со стороной a равна
 А) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ Б) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ В) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ Г) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
- Радиус окружности, описанной около квадрата со стороной a , равен
 А) $\frac{a}{2}$ Б) $a\sqrt{2}$ В) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ Г) $2a$
- Высота равнобедренного прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна a . Тогда его катет равен
 А) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ Б) $a\sqrt{2}$ В) $2a$ Г) $\frac{a}{2}$
- Пусть α и β – острые углы прямоугольного неравностороннего треугольника. Какое из данных равенств верно?



- $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = \cos \alpha$ В) $\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \sin \beta$
 - $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \beta$ Г) $\cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \sin \beta$
- Пусть α – острый угол прямоугольного треугольника. Какое из данных равенств не может выполняться?
 А) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ Б) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ В) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Г) $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$
 - Длина отрезка x на рисунке 193 равна
 А) $\frac{\sqrt{2}}{2} a \sin \alpha$ Б) $\frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \alpha$ В) $\frac{a\sqrt{2}}{2} \cos \alpha$ Г) $a\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha$

Количество сторон правильного n -угольника	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Радиус описанной окружности	$R_3 = \frac{a_3\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \frac{a_4\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a_6$
Радиус вписанной окружности	$r_3 = \frac{a_3\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \frac{a_4}{2}$	$r_6 = \frac{a_6\sqrt{3}}{2}$

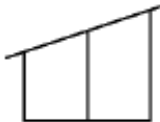


- ✱ 602. Докажите, что углы ABC и DEF , изображённые на рисунке 184, равны.

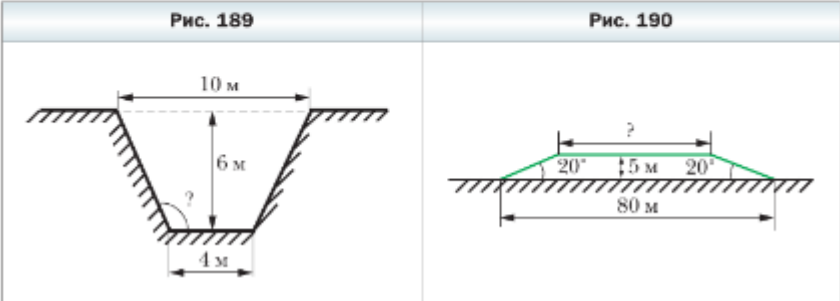
Решение практических задач: применение геометрических знаний

Модуль «Реальная математика»

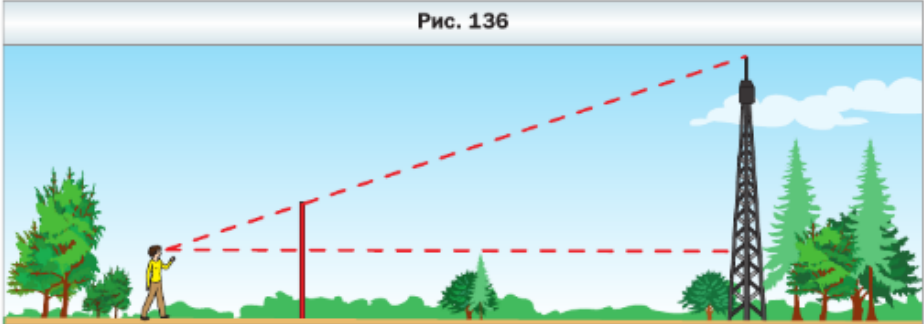
- 17 Наклонная балка поддерживается тремя столбами, стоящими вертикально на равном расстоянии друг от друга. Длины двух меньших столбов — 60 см и 90 см. Найдите длину большего столба. Ответ дайте в см.



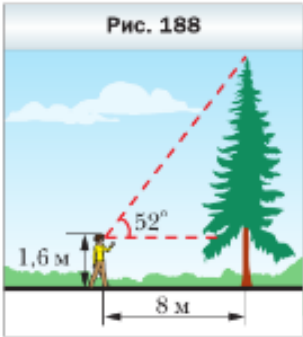
623. Сечение траншеи имеет форму равнобокой трапеции (рис. 189). Найдите угол, который образуют стенки траншеи с её дном.
624. Ширина насыпи шоссейной дороги в нижней её части равна 80 м (рис. 190), высота насыпи — 5 м, а откосы наклонены к горизонту под углом 20° . Найдите ширину насыпи в верхней её части.



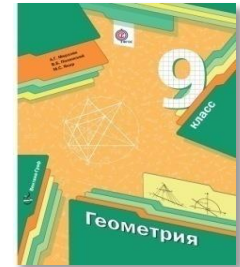
432. Найдите высоту вышки (рис. 136), если расстояния от наблюдателя до шеста и вышки соответственно равны 1,5 м и 39 м, высота шеста — 3 м, а рост наблюдателя — 1,8 м.



615. Используя данные рисунка 188, найдите высоту дерева.
616. Какой длины должна быть пожарная лестница, чтобы по ней можно было подняться на крышу дома высотой 9 м, если поставить её под углом 70° к поверхности земли?
617. Проехав от старта по прямолнейному участку шоссе 300 м, велосипедист оказался в точке, расположенной на 11 м выше, чем точка старта. Найдите угол подъёма шоссе на этом участке.
618. Под каким углом падает на землю солнечный луч, если вертикальный шест длиной 1,5 м отбрасывает тень длиной 0,7 м?



Формулы для вычисления площади треугольника



Если угол C — прямой, то $\sin \gamma = 1$. Для прямоугольного треугольника ABC с катетами a и b имеем:

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab \sin 90^\circ = \frac{1}{2}ab \sin \gamma. \blacktriangleleft$$

§ 5. Формулы для нахождения площади треугольника

Из курса геометрии 8 класса вы знаете, что площадь S треугольника можно вычислить по формулам

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c,$$

где a, b и c — стороны треугольника, h_a, h_b, h_c — высоты, проведённые к этим сторонам соответственно.

Теперь у нас появилась возможность получить ещё несколько формул для нахождения площади треугольника.



Герон Александрийский
(вторая половина I в. н. э.)

Древнегреческий математик и механик, работавший в Александрии. Математические работы Герона являются энциклопедией античной прикладной математики.

Теорема 5.1

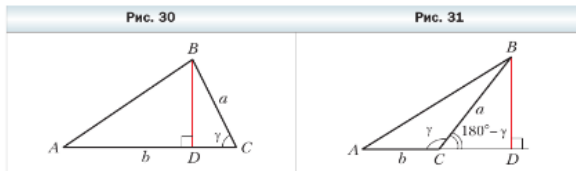
Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон и синуса угла между ними.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC , площадь которого равна S , такой, что $BC = a$, $AC = b$ и $\angle C = \gamma$. Докажем, что $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$, где a и b — стороны треугольника, γ — угол между ними.

Возможны три случая:

- 1) угол γ — острый (рис. 30);
- 2) угол γ — тупой (рис. 31);
- 3) угол γ — прямой.



Проведём высоту BD треугольника ABC (см. рис. 30, 31). Тогда $S = \frac{1}{2}BD \cdot AC = \frac{1}{2}BD \cdot b$.

В треугольнике BDC в первом случае (см. рис. 30) $BD = a \sin \gamma$, а во втором (см. рис. 31) — $BD = a \sin (180^\circ - \gamma) = a \sin \gamma$. Отсюда для обоих случаев имеем: $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

Теорема 5.2 (формула Герона)

Площадь S треугольника можно вычислить по формуле

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — стороны треугольника, p — его полупериметр.

Теорема 5.3

Площадь S треугольника можно вычислить по формуле

$$S = \frac{abc}{4R},$$

где a, b, c — стороны треугольника, R — радиус окружности, описанной около треугольника.

Доказательство

Рассмотрим треугольник ABC , площадь которого равна S , такой, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Докажем, что $S = \frac{abc}{4R}$.

Пусть $\angle A = \alpha$ и радиус описанной окружности данного треугольника равен R . Площадь треугольника можно найти по формуле: $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$.

Из леммы § 3 следует, что $a = 2R \sin \alpha$. Тогда $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}.$ $\blacktriangleleft$

Теорема 5.4

Площадь треугольника равна произведению его полупериметра и радиуса вписанной окружности.

Доказательство

На рисунке 32 изображён треугольник ABC , в который вписана окружность радиуса r . Докажем, что

$$S = pr,$$

где S — площадь данного треугольника, p — его полупериметр.

Пусть точка O — центр вписанной окружности, которая касается сторон треугольника ABC в точках M, N и P . Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников AOB, BOC, COA .

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}.$$

Проведём радиусы в точки касания. Получаем: $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp CA$. Отсюда:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}OM \cdot AB = \frac{1}{2}r \cdot AB;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2}ON \cdot BC = \frac{1}{2}r \cdot BC;$$

$$S_{COA} = \frac{1}{2}OP \cdot AC = \frac{1}{2}r \cdot AC.$$

$$\text{Следовательно, } S = \frac{1}{2}r \cdot AB + \frac{1}{2}r \cdot BC + \frac{1}{2}r \cdot AC =$$

$$= r \cdot \frac{AB + BC + AC}{2} = pr. \blacktriangleleft$$

Следующая теорема обобщает теорему 5.4.

Теорема 5.5

Площадь многоугольника, описанного около окружности, равна произведению его полупериметра и радиуса вписанной окружности.

Докажите эту теорему самостоятельно (рис. 33).

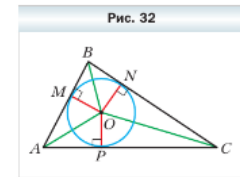


Рис. 32

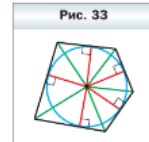
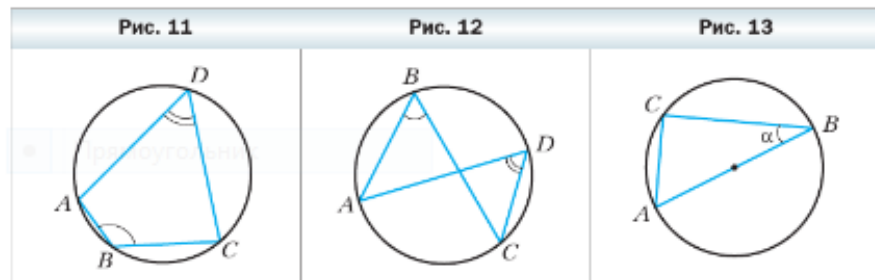


Рис. 33

Готовимся к изучению новой темы

75. Найдите угол ADC (рис. 11), если $\angle ABC = 140^\circ$.
 76. Найдите угол ABC (рис. 12), если $\angle ADC = 43^\circ$.
 77. Отрезок AB — диаметр окружности, радиус которой равен R , $\angle ABC = \alpha$ (рис. 13). Найдите хорду AC .



Повторите содержание пункта 30 на с. 224.

§ 3. Теорема синусов

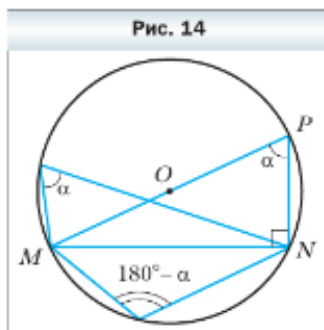
При доказательстве ряда теорем и решении многих задач применяется следующая лемма.

Лемма

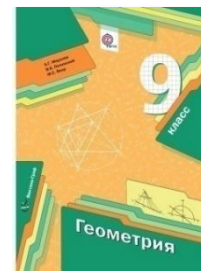
Хорда окружности равна произведению диаметра и синуса любого вписанного угла, опирающегося на эту хорду.

Доказательство

На рисунке 14 отрезок MN — хорда окружности с центром в точке O . Проведём диаметр MP . Тогда $\angle MNP = 90^\circ$ как вписан-



Теорема синусов



Теорема 3.1
(теорема синусов)

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Доказательство

Пусть в треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Докажем, что

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Пусть радиус описанной окружности треугольника ABC равен R . Тогда по лемме $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$. Отсюда:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Следствие

Радиус окружности, описанной около треугольника, можно вычислить по формуле

$$R = \frac{a}{2\sin \alpha},$$

где a — сторона треугольника, α — противолежащий ей угол.

Задача 1. В треугольнике ABC известно, что $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = 1$ см, $\angle B = 45^\circ$. Найдите угол A .

Решение. По теореме синусов

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}.$$

Тогда

$$\sin A = \frac{BC \sin B}{AC}, \quad \sin A = \frac{1 \cdot \sin 45^\circ}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \sqrt{2} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку $BC < AC$, то $\angle A < \angle B$. Следовательно, угол A – острый.

Отсюда, учитывая, что $\sin A = \frac{1}{2}$, получаем $\angle A = 30^\circ$.

Ответ: 30° . ◀

Задача 2. В треугольнике ABC известно, что $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = 1$ см, $\angle A = 30^\circ$. Найдите угол B .

Решение. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$. Тогда $\sin B = \frac{AC \sin A}{BC}$,

$$\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Так как $BC < AC$, то $\angle A < \angle B$. Тогда угол B может быть как острым, так и тупым. Отсюда $\angle B = 45^\circ$ или $\angle B = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Ответ: 45° или 135° . ◀

Задача 3. На стороне AB треугольника ABC отметили точку D так, что $\angle BDC = \gamma$, $AD = m$ (рис. 15). Найдите отрезок BD , если $\angle CAD = \alpha$, $\angle B = \beta$.

Решение. Угол BDC – внешний угол треугольника ADC . Тогда $\angle ACD + \angle CAD = \angle BDC$, отсюда $\angle ACD = \gamma - \alpha$.

По теореме синусов для треугольника ADC : $\frac{CD}{\sin \angle CAD} = \frac{AD}{\sin \angle ACD}$.

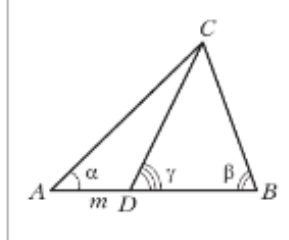
Следовательно, $CD = \frac{AD \sin \angle CAD}{\sin \angle ACD} = \frac{m \sin \alpha}{\sin(\gamma - \alpha)}$.

По теореме синусов для треугольника BCD : $\frac{BD}{\sin \angle BCD} = \frac{CD}{\sin \angle CBD}$.

Следовательно, $BD = \frac{CD \sin \angle BCD}{\sin \angle CBD} = \frac{m \sin \alpha \sin(180^\circ - (\beta + \gamma))}{\sin \beta \sin(\gamma - \alpha)} = \frac{m \sin \alpha \sin(\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin(\gamma - \alpha)}$.

Ответ: $\frac{m \sin \alpha \sin(\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin(\gamma - \alpha)}$. ◀

Рис. 15



Теорема синусов

Задача 4. Отрезок BD – биссектриса треугольника ABC , $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 105^\circ$ (рис. 16). Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если радиус окружности, описанной около треугольника BDC , равен $8\sqrt{6}$ см.

Рис. 16

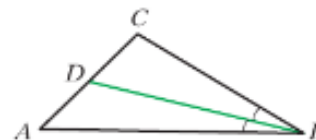
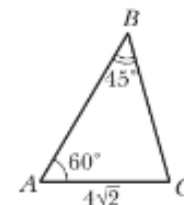


Рис. 17



Прямоугольник

Решение. Пусть R_1 – радиус окружности, описанной около треугольника BDC , $R_1 = 8\sqrt{6}$ см.

Так как отрезок BD – биссектриса треугольника, то $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle ABC$. Тогда $\angle CBD = 15^\circ$.

В треугольнике BDC : $\angle BDC = 180^\circ - (\angle CBD + \angle C)$,

$\angle BDC = 180^\circ - (15^\circ + 105^\circ) = 60^\circ$.

По следствию из теоремы синусов $\frac{BC}{2 \sin \angle BDC} = R_1$. Отсюда $BC = 2R_1 \sin \angle BDC$, $BC = 2 \cdot 8\sqrt{6} \sin 60^\circ = 24\sqrt{2}$ (см).

В треугольнике ABC : $\angle A = 180^\circ - (\angle ABC + \angle C)$,

$\angle A = 180^\circ - (30^\circ + 105^\circ) = 45^\circ$.

Пусть R – искомый радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

Тогда $\frac{BC}{2 \sin A} = R$. Отсюда $R = \frac{24\sqrt{2}}{2 \sin 45^\circ} = 24$ (см).

Ответ: 24 см. ◀

Теорема синусов

Упражнения

78. Найдите сторону BC треугольника ABC , изображённого на рисунке 17 (длина отрезка дана в сантиметрах).

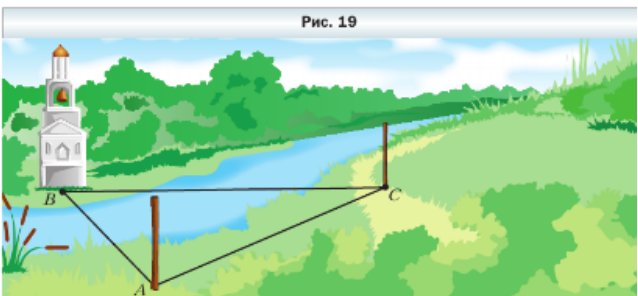
79. Найдите угол A треугольника ABC , изображённого на рисунке 18 (длины отрезков даны в сантиметрах).
80. Найдите сторону AB треугольника ABC , если $AC = \sqrt{6}$ см, $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 45^\circ$.

81. В треугольнике ABC известно, что $AB = 12$ см, $BC = 10$ см, $\sin A = 0,2$. Найдите синус угла C треугольника.

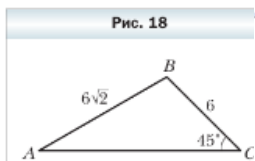
82. В треугольнике DEF известно, что $DE = 16$ см, $\angle F = 50^\circ$, $\angle D = 3$. Найдите сторону EF .

83. В треугольнике MKP известно, что $KP = 8$ см, $\angle K = 106^\circ$, $\angle P = 3$. Найдите сторону MP .

84. Для нахождения расстояния от точки A до колокольни B , расположенной на другом берегу речки (рис. 19), с помощью вех, рулет и прибора для измерения углов (теодолита) отметили на местности точку C такую, что $\angle BAC = 42^\circ$, $\angle ACB = 64^\circ$, $AC = 20$ м. Как найти расстояние от A до B ? Найдите это расстояние.



85. В треугольнике ABC известно, что $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Найдите стороны AB и AC .
86. Диагональ параллелограмма равна d и образует с его сторонами углы α и β . Найдите стороны параллелограмма.
87. Найдите угол A треугольника ABC , если:
1) $AC = 2$ см, $BC = 1$ см, $\angle B = 135^\circ$;
2) $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = \sqrt{3}$ см, $\angle B = 45^\circ$.
Сколько решений в каждом случае имеет задача? Ответ обоснуйте.



88. Существует ли треугольник ABC такой, что $BC = 6$ см? Ответ обоснуйте.

89. В треугольнике DEF известно, что $DE = 8$ см. Радиус окружности, описанной около треугольника, равен 4 см.

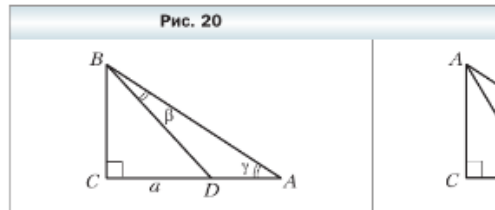
90. Радиус окружности, описанной около треугольника MPK , равен 0,7. Найдите сторону KP .

91. На продолжении стороны AB треугольника ABC взята точка D . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ACD , если $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle ADC = 45^\circ$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 4 см.

92. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 4 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ADC , если $\angle ABC = 60^\circ$.

93. Используя данные рисунка 20, найдите $\angle BAC = \gamma$, $\angle DBA = \beta$.

94. Используя данные рисунка 21, найдите $\angle ABC = \alpha$, $\angle ADC = \beta$.



95. На стороне AB треугольника ABC отметили точку M так, что $\angle AMC = \varphi$. Найдите отрезок CM , если $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle ACB = \beta$.

96. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. На стороне AC отметили точку D так, что $\angle ADB = \varphi$, $AD = m$. Найдите сторону BC .

97. Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, длины которых обратно пропорциональны синусам прилежащих к этой стороне углов.

98. Две стороны треугольника равны 6 см и 12 см, а высота, проведенная к третьей стороне, — 4 см. Найдите радиус окружности, описанной около данного треугольника.

99. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 16 см и боковой стороной 10 см.

100. Сторона треугольника равна 24 см, а радиус описанной окружности — $8\sqrt{3}$ см. Чему равен угол треугольника, противолежащий данной стороне?

101. Трасса для велосипедистов имеет форму треугольника, два угла которого равны 50° и 100° . Меньшую сторону этого треугольника один из велосипедистов проезжает за 1 ч. За какое время он проедет всю трассу? Ответ представьте в часах с точностью до десятых.

102. В треугольнике ABC известно, что $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Найдите биссектрису BD треугольника.

103. Основание равнобедренного треугольника равно a , противолежащий ему угол равен α . Найдите биссектрису треугольника, проведенную из вершины угла при основании.

104. Докажите, пользуясь теоремой синусов, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, длины которых пропорциональны прилежащим сторонам.

105. Основания равнобокой трапеции равны 9 см и 21 см, а высота — 8 см. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

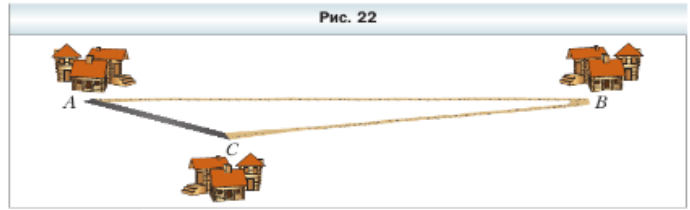
106. Отрезок CD — биссектриса треугольника ABC , в котором $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Через точку D проведена прямая, параллельная стороне BC и пересекающая сторону AC в точке E , причём $AE = a$. Найдите отрезок CE .

107. Медиана AM треугольника ABC равна m и образует со сторонами AB и AC углы α и β соответственно. Найдите стороны AB и AC .

108. Медиана CD треугольника ABC образует со сторонами AC и BC углы α и β соответственно, $BC = a$. Найдите медиану CD .

109. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников AHB , BHC , AHC и ABC , равны.

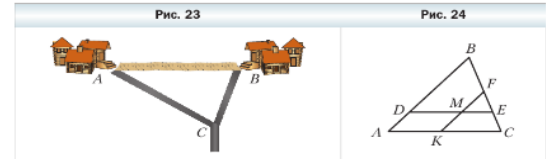
110. Дороги, соединяющие сёла A , B и C (рис. 22), образуют треугольник, причём дорога из села A в село C заасфальтирована, а дороги из се-



- ла A в село B и из села B в село C — грунтовые. Дороги, ведущие из села A в село B и C , образуют угол 15° , а дороги, ведущие из села B в села A и C , — угол 5° . Скорость движения автомобиля по асфальтированной дороге в 2 раза больше скорости движения по грунтовой. Какой маршрут надо выбрать водителю автомобиля, чтобы как можно скорее добраться из села A в село B ?
111. Дороги из сёл A и B сходятся у развилки C (рис. 23). Дорога из села A до развилки образует с дорогой из села A в село B угол 30° , а дорога из села B до развилки образует с дорогой из села B в село A угол 70° . Одновременно из села A в направлении развилки выехал автомобиль со скоростью 90 км/ч, а из села B — автобус со скоростью 60 км/ч. Автомобиль или автобус первым доедет до развилки?

Упражнения для повторения

112. Биссектрисы углов B и C прямоугольника $ABCD$ пересекают сторону AD в точках M и K соответственно. Докажите, что $BM = CK$.
113. На рисунке 24 $DE \parallel AC$, $FK \parallel AB$. Укажите, какие треугольники на этом рисунке подобны.



Описанная и вписанная окружности четырехугольника

Задача (признак принадлежности четырёх точек одной окружности).

Точки A, M, N, B таковы, что $\angle AMB = \angle ANB$, причём точки M и N лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB . Докажите, что точки A, M, N, B лежат на одной окружности.

Решение. Пусть $\angle AMB = \angle ANB = \alpha$. Около треугольника AMB опишем окружность (рис. 109). Пусть C — произвольная точка окружности, не принадлежащая дуге AMB . Тогда четырёхугольник $ACBM$ — вписанный в окружность. Отсюда $\angle C = 180^\circ - \alpha$. Имеем: $\angle C + \angle N = 180^\circ$. Тогда по теореме 10.2 вокруг четырёхугольника $ACBN$ можно описать окружность. Так как около треугольника ABC

можно описать только одну окружность, то этой окружности принадлежат как точка M , так и точка N .

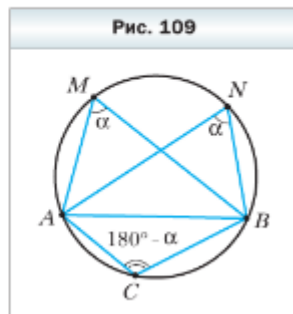


Рис. 109

Практические задания

326. Начертите прямоугольник со сторонами 2 см и 3 см. Опишите около него окружность.
327. Начертите произвольную равнобокую трапецию. Опишите около неё окружность.
328. Начертите равнобокую трапецию с большим основанием 6 см, боковой стороной 4 см и углом 60° . Впишите в неё окружность.
329. Начертите произвольный квадрат. Впишите в него окружность и опишите около него окружность.

Упражнения

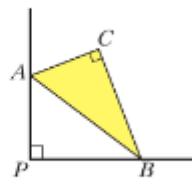
330. Можно ли описать окружность около четырёхугольника $ABCD$, если его углы A, B, C и D соответственно равны:
1) $90^\circ, 90^\circ, 80^\circ, 100^\circ$; 2) $90^\circ, 80^\circ, 90^\circ, 100^\circ$; 3) $50^\circ, 70^\circ, 130^\circ, 110^\circ$?
331. Можно ли описать окружность около четырёхугольника $ABCD$, если его углы A, B, C и D соответственно пропорциональны числам:
1) 3, 8, 11, 6; 2) 4, 5, 4, 2?
332. Докажите, что можно описать окружность около:
1) любого прямоугольника;
2) любой равнобокой трапеции.
333. Какая точка является центром окружности, описанной около прямоугольника?

334. Можно ли описать окружность около ромба, не являющегося квадратом?
335. В прямоугольнике $ABCD$ известно, что $AB = 12$ см, $\angle CAD = 30^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около данного прямоугольника.
336. Можно ли вписать окружность в четырёхугольник $ABCD$, если его стороны AB, BC, CD, AD соответственно пропорциональны числам:
1) 7, 8, 12, 11; 2) 7, 12, 8, 11?
337. Сумма двух противоположных сторон описанного около окружности четырёхугольника равна 18 см. Найдите периметр данного четырёхугольника.
338. Боковая сторона равнобокой трапеции равна 7 см. Чему равен периметр данной трапеции, если в неё можно вписать окружность?
339. В четырёхугольнике $CDEF$, в который можно вписать окружность, $CD = 6$ см, $DE = 8$ см, $EF = 12$ см. Найдите сторону CF .
340. Докажите, что в любой ромб можно вписать окружность. Какая точка является центром окружности, вписанной в ромб?
341. Можно ли вписать окружность в параллелограмм, который не является ромбом?
342. Под каким углом видна боковая сторона трапеции из центра вписанной окружности?
343. Один из углов ромба равен 60° , а большая диагональ равна 24 см. Найдите радиус окружности, вписанной в данный ромб.
344. Докажите, что если в прямоугольник можно вписать окружность, то этот прямоугольник является квадратом.
345. Докажите, что если около ромба можно описать окружность, то этот ромб является квадратом.
346. Сторона AD четырёхугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около него, $\angle ABC = 108^\circ$, $\angle BCD = 132^\circ$. Найдите углы BAD, ADC, CAD, BDA .
347. Найдите углы четырёхугольника $MNKP$, вписанного в окружность, если $\angle MKP = 58^\circ$, $\angle MPN = 34^\circ$, $\angle KMP = 16^\circ$.
348. Равнобокая трапеция вписана в окружность, центр которой принадлежит одному из оснований. Угол между диагоналями трапеции, противолежащий её боковой стороне, равен 56° . Найдите углы трапеции.

357. Биссектрисы BK и CM треугольника ABC пересекаются в точке O , $\angle A = 60^\circ$. Найдите $\angle CMK$.

360. Вершины A и B треугольника ABC с прямым углом C скользят по сторонам прямого угла с вершиной P (рис. 110). Докажите, что точка C при этом перемещается по отрезку.
361. Из произвольной точки M , принадлежащей углу с вершиной A , но не принадлежащей его сторонам, проведены перпендикуляры MP и MQ к сторонам угла. Из точки A проведён перпендикуляр AK к отрезку PQ . Докажите, что $\angle PAK = \angle MAQ$.

Рис. 110

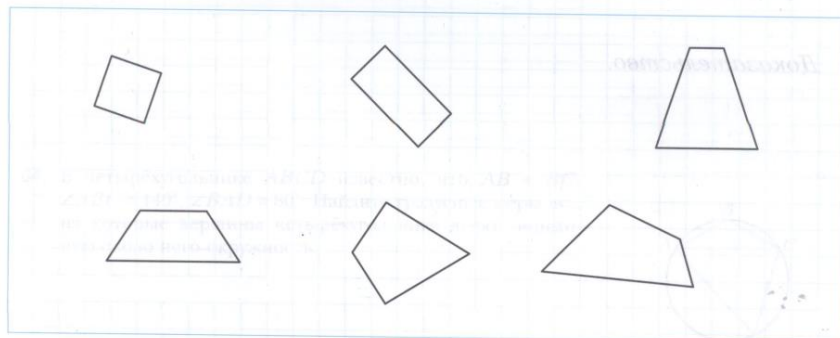


Описанная и вписанная окружности четырёхугольника

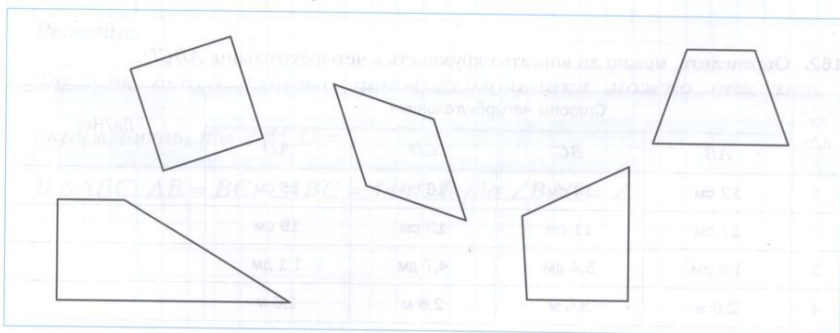


Практические задания

158. Около каждого из четырёхугольников, изображённых на рисунке, можно описать окружность. Постройте эти окружности.



159. В каждый из четырёхугольников, изображённых на рисунке, можно вписать окружность. Постройте эти окружности.



Решаем задачи

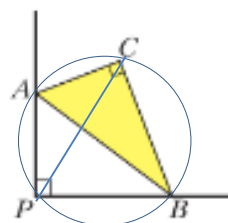
160. Определите, можно ли описать окружность около четырёхугольника $ABCD$.

№ п/п	Углы четырёхугольника				Да/Нет
	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	
1	70°	140°	110°	40°	
2	90°	80°	100°	90°	
3	36°	72°	154°	98°	
4	24°	135°	156°	45°	

162. Определите, можно ли вписать окружность в четырёхугольник $ABCD$.

№ п/п	Стороны четырёхугольника				Да/Нет
	AB	BC	CD	AD	
1	12 см	14 см	16 см	15 см	
2	17 см	11 см	13 см	19 см	
3	1,8 дм	5,4 дм	4,7 дм	1,1 дм	
4	2,5 м	3,6 м	2,8 м	1,6 м	

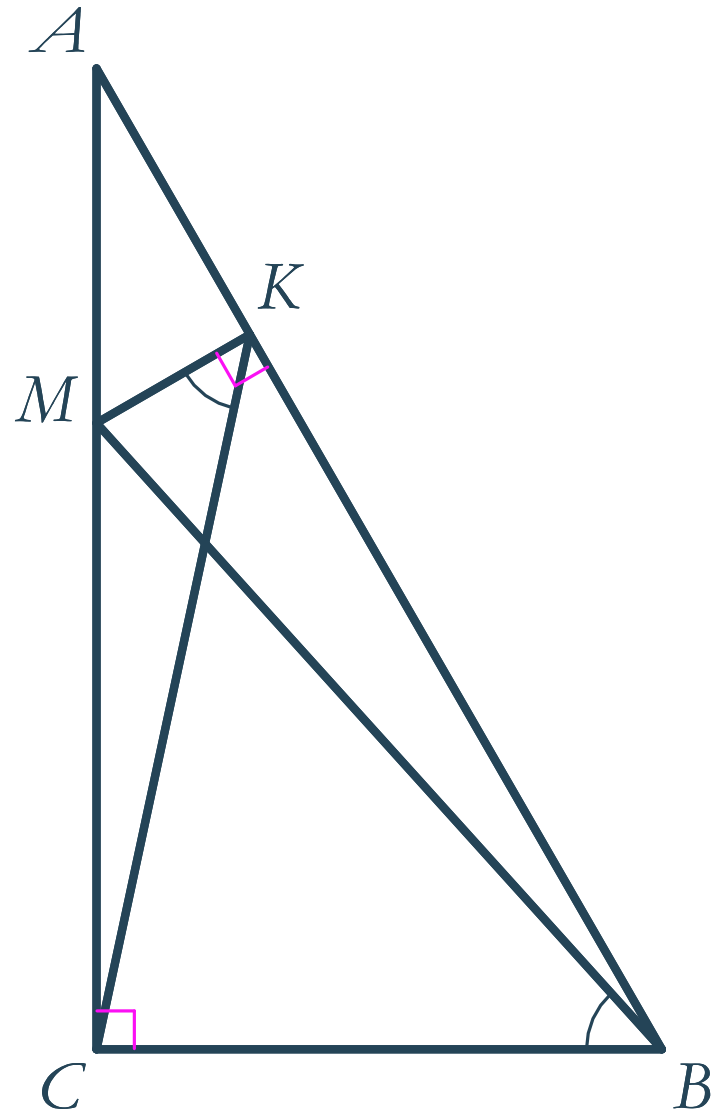
Решение задачи 360



Рассмотрим четырёхугольник $PACB$.
 $\angle P = \angle C = 90^\circ$, значит, около него можно описать окружность. Точка C лежит на луче PC . Поскольку $\angle CPB$ вписан в окружность и опирается на хорду CB , его величина не зависит от расположения $\triangle ACB$.
 Значит, точка C перемещается по отрезку, принадлежащему лучу PC .

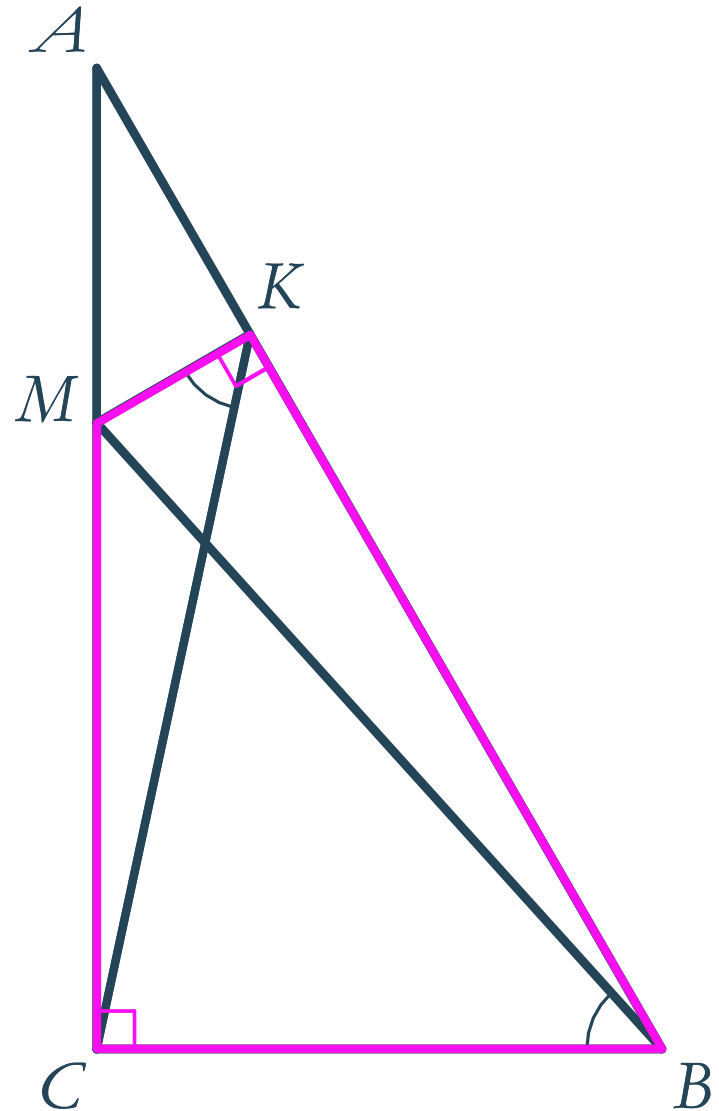
Метод вспомогательной окружности

Задача 1. Из произвольной точки M катета AC прямоугольного треугольника ABC опущен перпендикуляр MK на гипотенузу AB . Докажите, что $\angle MKC = \angle MBC$.



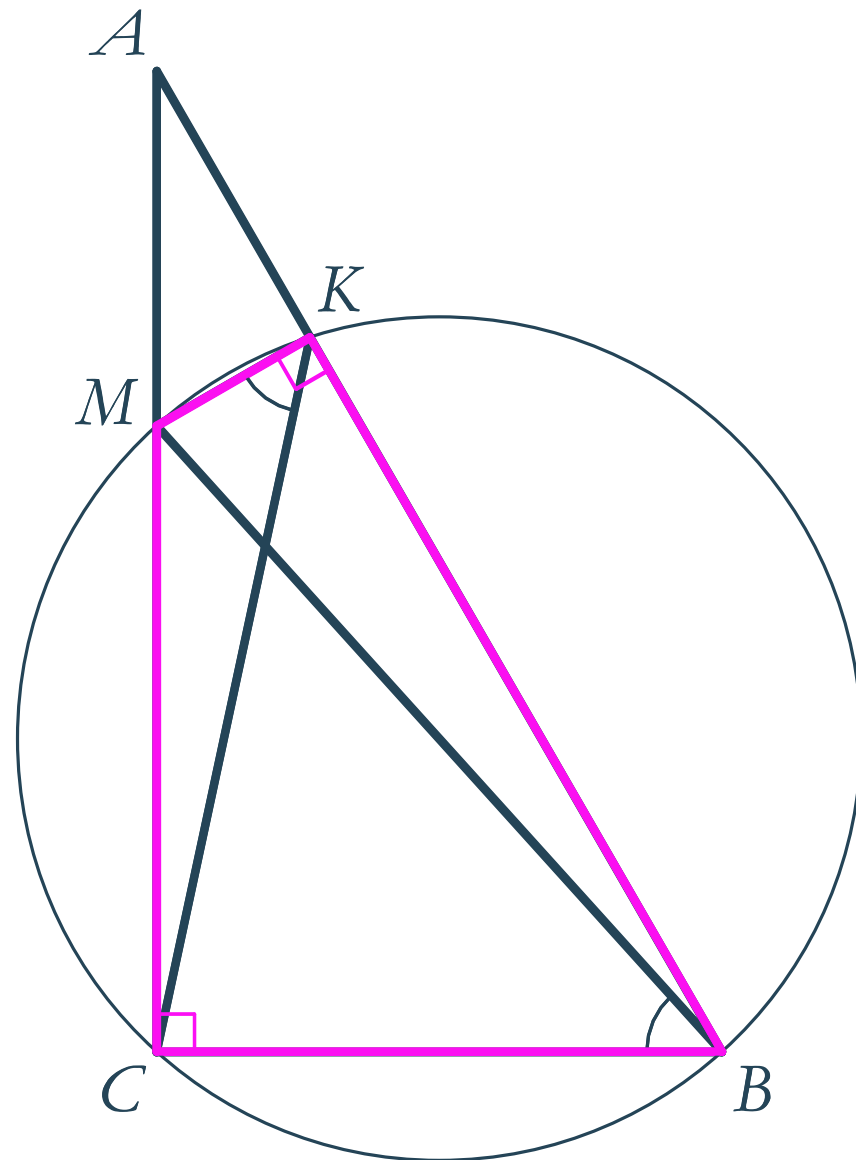
Метод вспомогательной окружности

Задача 1. Из произвольной точки M катета AC прямоугольного треугольника ABC опущен перпендикуляр MK на гипотенузу AB . Докажите, что $\angle MKC = \angle MBC$.



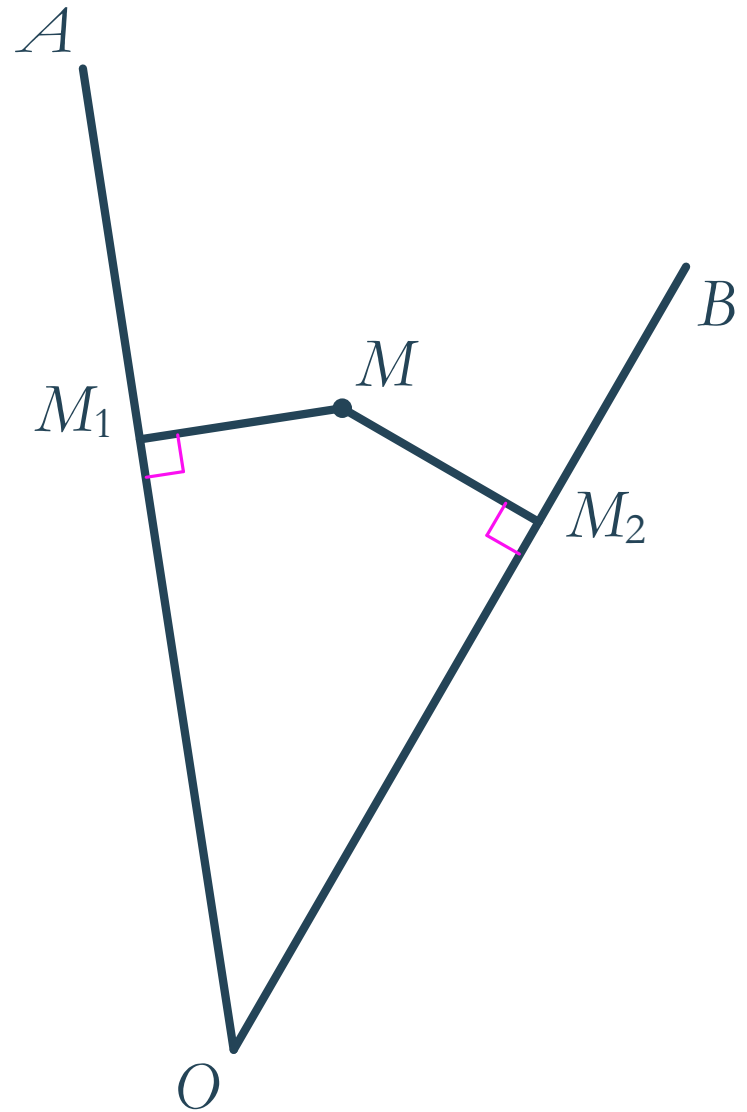
Метод вспомогательной окружности

Задача 1. Из произвольной точки M катета AC прямоугольного треугольника ABC опущен перпендикуляр MK на гипотенузу AB . Докажите, что $\angle MKC = \angle MBC$.



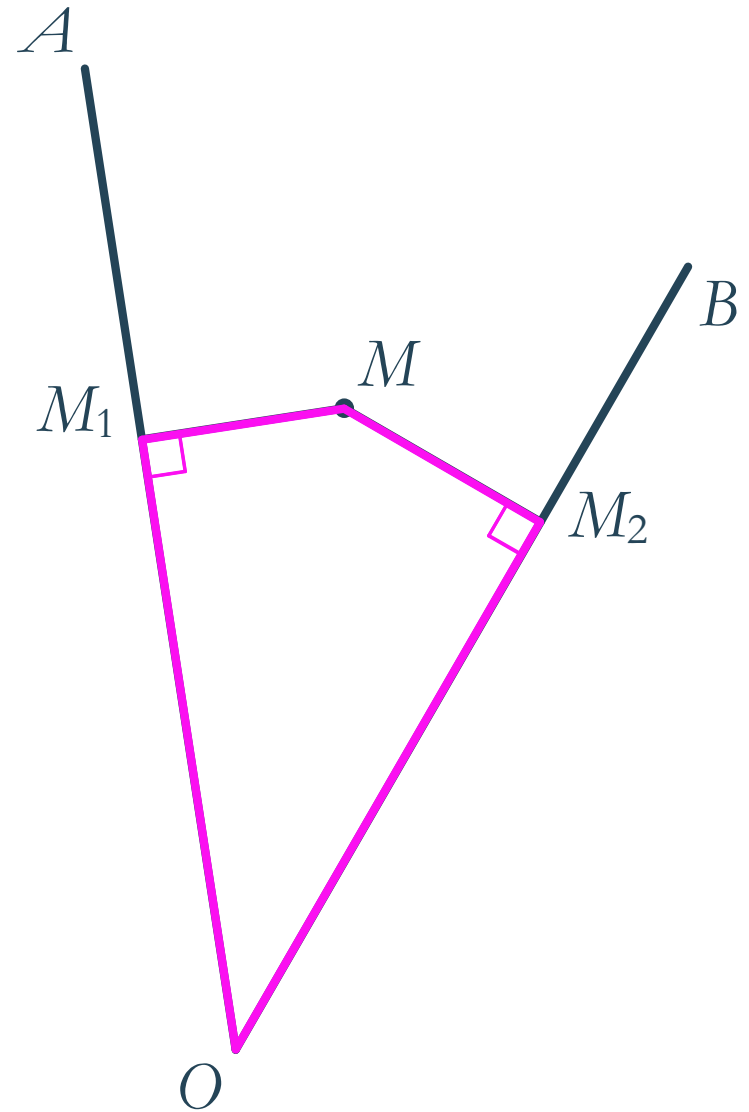
Метод вспомогательной окружности

Задача 2. Из точки M , которая принадлежит углу AOB , но не принадлежит его сторонам, опущены перпендикуляры MM_1 и MM_2 на прямые OA и OB . Докажите, что $MM_2 \leq OM$.



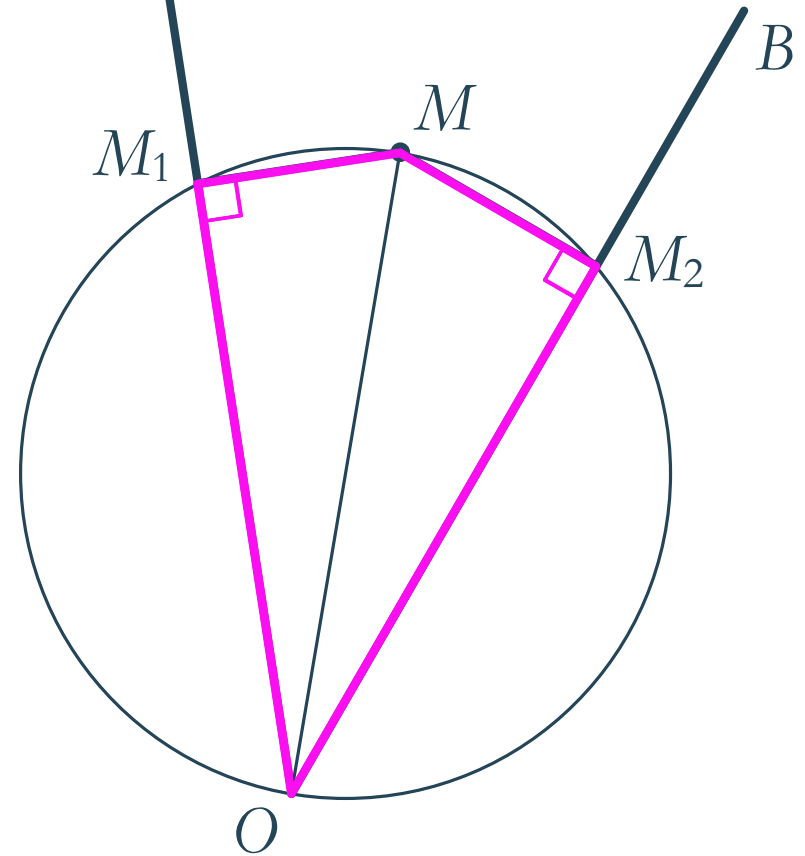
Метод вспомогательной окружности

Задача 2. Из точки M , которая принадлежит углу AOB , но не принадлежит его сторонам, опущены перпендикуляры MM_1 и MM_2 на прямые OA и OB . Докажите, что $MM_2 \leq OM$.



Метод вспомогательной окружности

Задача 2. Из точки M , которая принадлежит углу AOB , но не принадлежит его сторонам, опущены перпендикуляры MM_1 и MM_2 на прямые OA и OB . Докажите, что $MM_2 \leq OM$.



Ключевые задачи в курсе геометрии



Задача 1. Докажите, что площадь параллелограмма можно вычислить по формуле

$$S = ab \sin \alpha,$$

где a и b – соседние стороны параллелограмма, α – угол между ними.

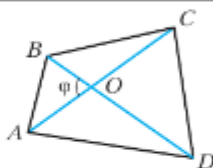
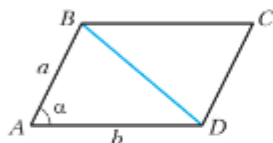
Решение. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, в котором $AB = a$, $AD = b$, $\angle BAD = \alpha$ (рис. 34).

Проведём диагональ BD . Поскольку $\triangle ABD = \triangle CDB$, то:

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} ab \sin \alpha = ab \sin \alpha. \blacktriangleleft$$

Рис. 34

Рис. 35



Задача 2. Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей и синуса угла между ними.

Решение. Пусть угол между диагоналями AC и BD четырёхугольника $ABCD$ равен φ . На рисунке 35 $\angle AOB = \varphi$.

Тогда $\angle BOC = \angle AOD = 180^\circ - \varphi$ и $\angle COD = \varphi$. Имеем:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} = \\ &= \frac{1}{2} OB \cdot OA \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin (180^\circ - \varphi) + \\ &+ \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} OD \cdot OA \cdot \sin (180^\circ - \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} OB (OA + OC) \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} OD (OC + OA) \cdot \sin \varphi = \\ &= \frac{1}{2} OB \cdot AC \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2} OD \cdot AC \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2} AC (OB + OD) \cdot \sin \varphi = \\ &= \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \varphi. \blacktriangleleft \end{aligned}$$



71. Докажите, что $m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$, где a , b и c – стороны треугольника, m_c – медиана треугольника, проведённая к стороне c .



743. Докажите, что площадь выпуклого четырёхугольника, диагонали которого перпендикулярны, равна половине их произведения.

744. Площадь ромба равна 120 см^2 , а его диагонали относятся как $5 : 12$. Найдите периметр ромба.

745. Найдите площадь ромба, сторона которого равна 25 см , а сумма диагоналей – 62 см .

746. Найдите площадь ромба, сторона которого равна 39 см , а разность диагоналей – 42 см .



747. Даны прямая l и параллельный ей отрезок AB . Докажите, что все треугольники AXB , где X – произвольная точка прямой l , равновелики.

748. Докажите, что если высота одного треугольника равна высоте другого треугольника, то площади данных треугольников относятся как их стороны, к которым проведены эти высоты.



749. Докажите, что медиана треугольника разбивает его на два равновеликих треугольника.



750. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка M так, что $\frac{AM}{MC} = \frac{m}{n}$. Докажите, что $\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = \frac{m}{n}$.

751. В треугольнике проведены три медианы. Докажите, что они разбивают треугольник на шесть равновеликих треугольников.

752. Через вершину B треугольника ABC проведите две прямые так, чтобы они разбили данный треугольник на три равновеликих треугольника.

753. Через вершину параллелограмма проведите прямые так, чтобы они разбили данный параллелограмм на: 1) четыре равновеликих многоугольника; 2) пять равновеликих многоугольников.

754. Через вершину ромба проведите две прямые так, чтобы они разбили данный ромб на три равновеликих многоугольника.

755. Постройте треугольник, равновеликий данному параллелограмму.



756. В треугольнике проведены три высоты. Докажите, что к наибольшей стороне треугольника проведена наименьшая высота.

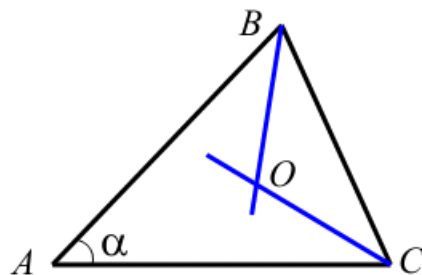


757. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка M так, что $\frac{AM}{MC} = \frac{m}{n}$. Пусть X – произвольная внутренняя точка отрезка BM . Дока-

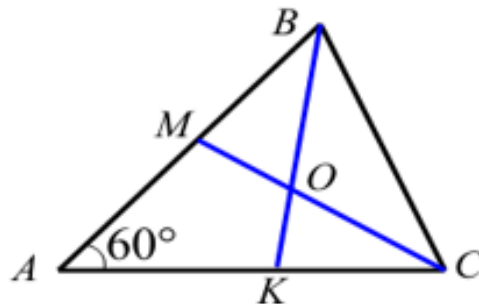
$$\text{жите, что } \frac{S_{ABX}}{S_{CBX}} = \frac{m}{n}.$$

Ключевые задачи в курсе геометрии

- ❏ Задача 1. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = \alpha$. Биссектрисы углов B и C пересекаются в точке O . Докажите, что $\angle BOC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.

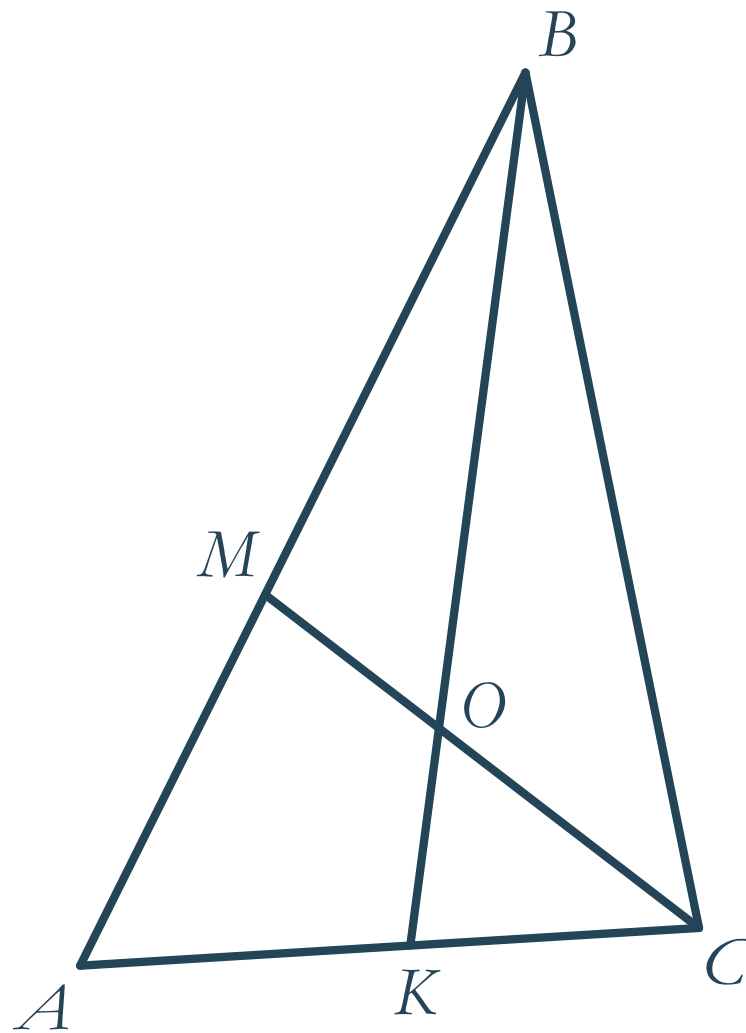


1. Существует ли треугольник, две биссектрисы которого перпендикулярны?
2. Существует ли треугольник, в котором одна биссектриса делит пополам другую биссектрису?
3. Биссектрисы BK и CM треугольника ABC пересекаются в точке O , $\angle A = 60^\circ$. Докажите, что $OK = OM$.



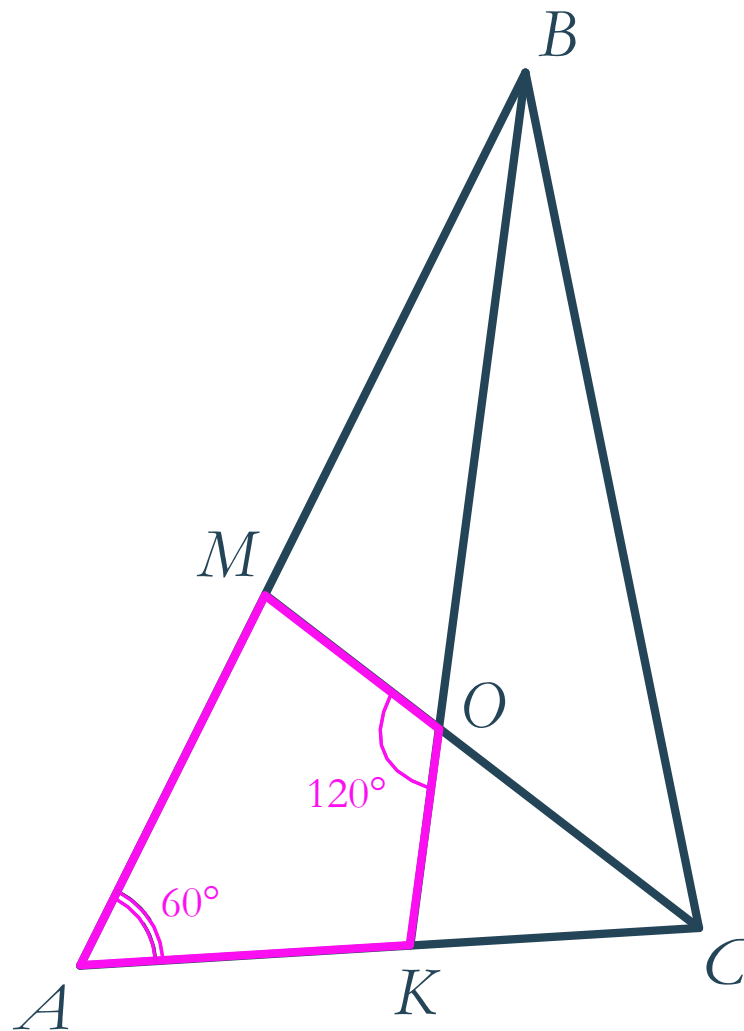
Метод вспомогательной окружности

Задача 3. Биссектрисы BK и CM треугольника ABC пересекаются в точке O , $\angle A = 60^\circ$. Докажите, что $OK = OM$.



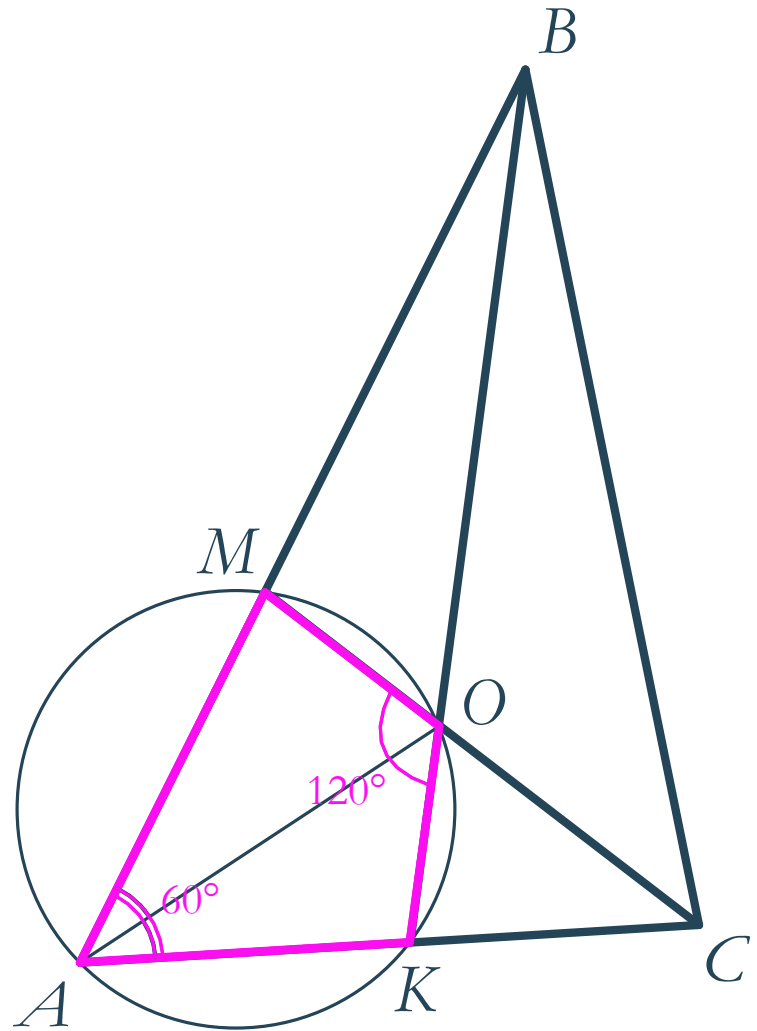
Метод вспомогательной окружности

Задача 3. Биссектрисы BK и CM треугольника ABC пересекаются в точке O , $\angle A = 60^\circ$. Докажите, что $OK = OM$.



Метод вспомогательной окружности

Задача 3. Биссектрисы BK и CM треугольника ABC пересекаются в точке O , $\angle A = 60^\circ$. Докажите, что $OK = OM$.



ЕГЭ по математике.

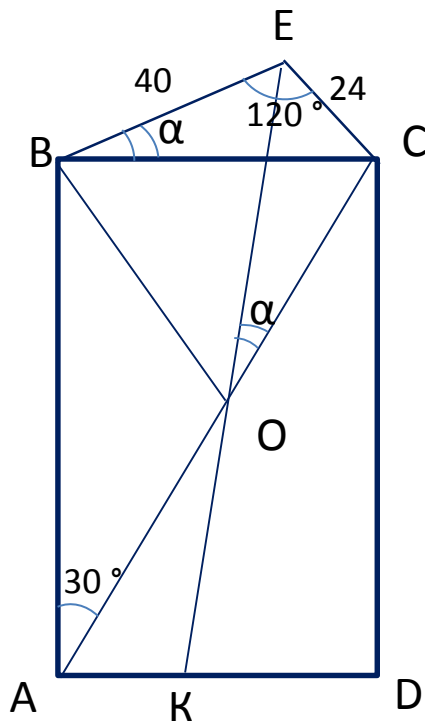
Профильный уровень.

Задача 16

- 9 Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30° . Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120^\circ$.
- а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.
- б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K . Найдите EK , если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.



- 16 Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .
- а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
- б) Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.



Решение.

- а) По условию $\angle BAC = 30^\circ$, тогда $\angle BOC = 60^\circ$.
 В четырехугольнике $BOCE$ $\angle O + \angle E = 180^\circ$.
 Следовательно, около него можно описать окружность.

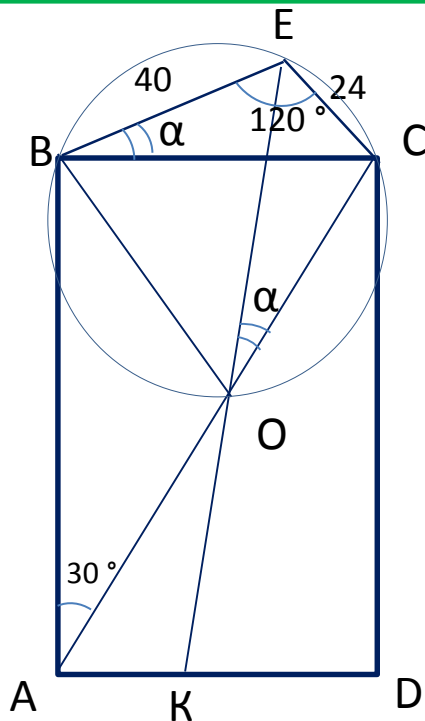
ЕГЭ по математике.

Профильный уровень.

Задача 16



- 9 Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30° . Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120^\circ$.
- а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.
- б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K . Найдите EK , если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.



Решение.

а) По условию $\angle BAC = 30^\circ$, тогда $\angle BOC = 60^\circ$.

В четырехугольнике $BOCE$ $\angle O + \angle E = 180^\circ$.

Следовательно, около него можно описать окружность.

$\angle CBE = \angle COE$ как углы, вписанные в одну окружность и опирающиеся на дугу EC этой окружности.

б) В $\triangle BEC$ по теореме косинусов

$$BC^2 = BE^2 + EC^2 - 2BE \cdot EC \cdot \cos 120^\circ = 56^2.$$

По теореме синусов $\frac{CE}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin 120^\circ}$, отсюда $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{14}$;

$$\cos \alpha = \frac{13}{14} \quad (\text{основное тригонометрическое тождество}).$$

В $\triangle BOC$ $BO = OC = BC = 56$, $\angle BOC = \angle OBC = \angle OCB = 60^\circ$.

$$\text{По теореме синусов для } \triangle OBE \quad \frac{OE}{\sin \angle OBE} = \frac{BE}{\sin \angle BOE},$$

$$OE = \frac{BE \cdot \sin(\alpha + 60^\circ)}{\sin(60^\circ - \alpha)} = \frac{40 \cdot (\sin \alpha \cdot \cos 60^\circ + \cos \alpha \cdot \sin 60^\circ)}{\sin 60^\circ \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos 60^\circ} = 64.$$

$$\text{По теореме синусов для } \triangle AOK \quad \frac{OK}{\sin \angle OAK} = \frac{OA}{\sin \angle OKA};$$

$$OK = OA \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin \angle OKA} = 56 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{14}{3\sqrt{3}} = 49.$$

$$EK = OE + OK = 64 + 49 = 113.$$

Ответ. 113.

Задачи повышенного уровня: внеписанная окружность

Основание AC равнобедренного треугольника ABC равно 6. Окружность радиуса 4,5 с центром вне этого треугольника касается продолжения боковых сторон треугольника и касается основания AC в его середине. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .



A36A43

Когда сделаны уроки

Внеписанная окружность треугольника

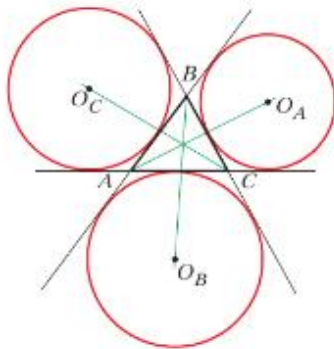
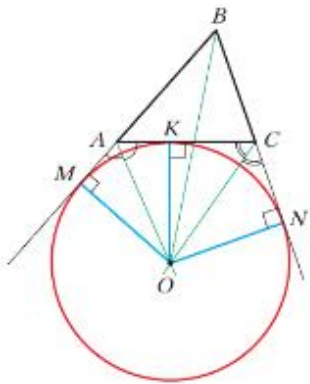
Проведём биссектрисы двух внешних углов с вершинами A и C треугольника ABC (рис. 37). Пусть O — точка пересечения этих биссектрис. Тогда точка O равноудалена от прямых AB , BC и AC .

Проведём три перпендикуляра: $OM \perp AB$, $OK \perp AC$, $ON \perp BC$. Очевидно, что $OM = OK = ON$. Следовательно, существует окружность с центром в точке O , которая касается стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Такую окружность называют **внеписанной** (см. рис. 37).

Так как $OM = ON$, то точка O принадлежит биссектрисе угла ABC .

Рис. 37

Рис. 38



Любой треугольник имеет три внеписанные окружности. На рисунке 38 их центры обозначены O_A , O_B , O_C . Радиусы этих окружностей обозначим соответственно r_a , r_b , r_c .

По свойству касательных, проведённых к окружности через одну точку, имеем: $CK = CN$, $AK = AM$ (см. рис. 37). Тогда $AC = AM + CN$. Следовательно, периметр треугольника ABC равен сумме $BM + BN$. Однако $BM = BN$. Тогда $BM = BN = p$, где p — полупериметр треугольника ABC .

Имеем:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{OAB} + S_{OCB} - S_{OAC} = \\ &= \frac{1}{2} OM \cdot AB + \frac{1}{2} ON \cdot BC - \frac{1}{2} OK \cdot AC = \\ &= \frac{1}{2} r_b (c + a - b) = \\ &= r_b \cdot \frac{a + b + c - 2b}{2} = \\ &= r_b \cdot \frac{2p - 2b}{2} = r_b (p - b). \end{aligned}$$

Отсюда $r_b = \frac{S}{p - b}$, где S — площадь треугольника ABC .

Аналогично можно показать, что $r_a = \frac{S}{p - a}$, $r_c = \frac{S}{p - c}$.

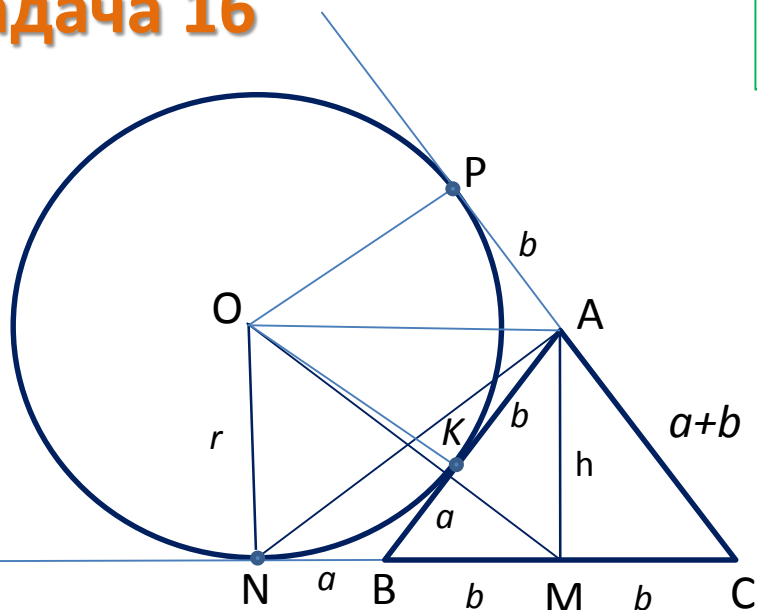
Упражнения

1. Докажите, что $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .
2. Докажите, что площадь S прямоугольного треугольника вычисляется по формуле $S = r_c \cdot r$, где r_c — радиус внеписанной окружности, касающейся гипотенузы треугольника, r — радиус вписанной окружности данного треугольника.
3. В равносторонний треугольник со стороной a вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что отрезок касательной, принадлежащий треугольнику, равен b . Найдите площадь треугольника, который эта касательная отсекает от равностороннего треугольника.
4. В четырёхугольнике $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна стороне AD , $\angle ADC = 135^\circ$, $\angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$. Докажите, что диагональ AC является биссектрисой угла BAD .
Указание. Докажите, что точка C — центр внеписанной окружности треугольника ABD .

ЕГЭ по математике.

Профильный уровень.

Задача 16



10 Окружность с центром O касается боковой стороны AB равнобедренного треугольника ABC , продолжения боковой стороны AC и продолжения основания BC в точке N . Точка M — середина основания BC .

а) Докажите, что $AN = OM$.

б) Найдите OM , если стороны треугольника ABC равны 10, 10 и 12.

Решение.

а) Докажем, что четырехугольник $OAMN$ — прямоугольник. $ON \perp BC$, т.к. N — точка касания окружности и прямой BC . $AM \perp BC$ как медиана, проведенная к основанию BC равнобедренного треугольника ABC . Следовательно, $ON \parallel AM$.

Пусть K — точка касания окружности и стороны AB $\triangle ABC$. Обозначим длины отрезков $BK=a$, $AK=b$, тогда $BN=BK=a$ и $AP=AK=b$. $AB=AK+BK=AC=a+b$. $PC=AP+AC=b+(a+b)=a+2b$, $CN=BN+BC=a+2 \cdot CM$: $CN=PC$, следовательно, $CM=b$.

По условию окружность является вневписанной окружностью треугольника ABC . Тогда ее радиус $r = \frac{S}{p-AB}$, $S = \frac{1}{2} AM \cdot BC = h \cdot b$, где $AM=h$. $p=a+2b$, $AB=a+b$, $p-AB=a+2b-(a+b)=b$; $r = \frac{h \cdot b}{b} = h$.

Доказано, что $ON=AM$, из чего следует, что $OAMN$ — прямоугольник, и $OM=AN$ как диагонали прямоугольника.

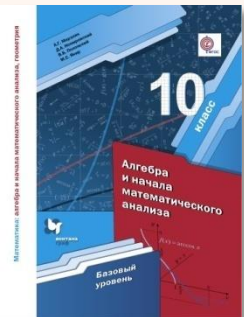
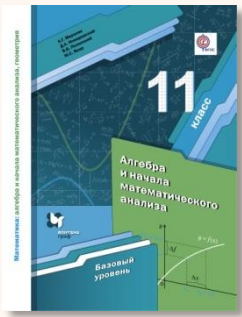
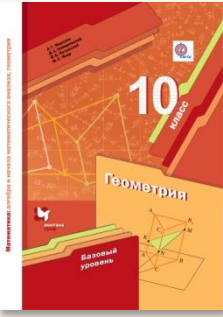
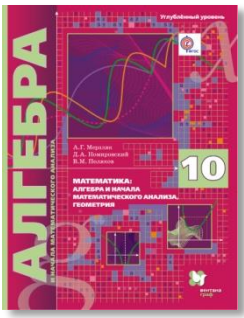
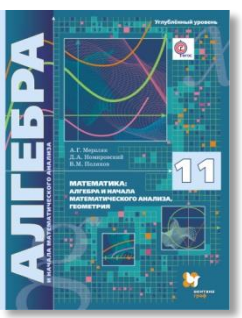
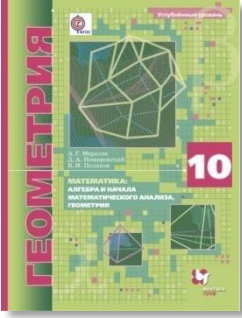
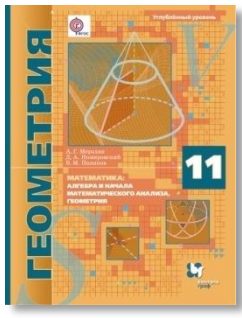
б) В $\triangle OMN$ по теореме Пифагора $OM^2 = ON^2 + MN^2$.

$ON = r = h = \sqrt{100 - 36} = 8$; $MN = a+b = AB = 10$,

тогда $OM = \sqrt{64 + 100} = 2\sqrt{41}$.

Ответ. $2\sqrt{41}$.

Апробация в 2017/18 учебном году

Авторский коллектив <i>(уровень изучения математики)</i>	Алгебра и начала математического анализа	Геометрия
Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Полонский В.Б., Якир М.С. <i>(базовый)</i>	 	 
Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Поляков В.М. <i>(углублённый)</i>	 	 

<https://drofa-ventana.ru>

 Введите название, автора или ISBN



Дошкольное образование



Начальное образование



Алгебра



Английский язык



Астрономия



Биология



Всеобщая история



География



Геометрия



Естествознание

 
ОБЪЕДИНЕННАЯ ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА

 ИНСТРУКЦИИ
ПО РАБОТЕ
С САЙТОМ

- Как скачать аудиоприложение
- Как зарегистрироваться на сайте
- Как зарегистрироваться на вебинар и многое другое

СМОТРЕТЬ 

Новости

Все 558



Спасибо за внимание!

Павлова Татьяна Николаевна
ведущий методист по математике
объединенной издательской группы «ДРОФА - ВЕНТАНА»
Pavlova.TN@drofa-ventana.ru