ОБЪЕДИНЕННАЯ
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА

дрофа

вентана граф

Подготовка к итоговой аттестации по математике. Решение задач с параметром

Павлова Татьяна Николаевна,
ведущий методист по математике
объединенной издательской группы «ДРОФА–ВЕНТАНА»

5 апреля 2017 г.

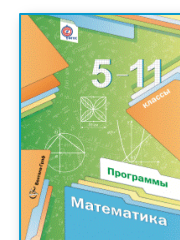
Математика Алгебра Геометрия

ФГОС

Линия УМК Авторы: Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.

Состав УМК:

- ✓ Учебник
- ✓ Рабочие тетради
- ✓ Дидактические материалы
- ✓ Методическое пособие
- ✓ Программа с CD
- ✓ Электронная форма учебника



ОБЪЕДИНЕННАЯ ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА дрофа вентана граф

Уравнения с параметром в курсе математики

275. Какое число надо подставить вместо a, чтобы корнем уравнения:
1) $(x + a) - 7 = 42$ было число 22;
2) $(a - x) + 4 = 15$ было число 3?

276. Какое число надо подставить вместо a, чтобы корнем уравнения:
1) $(x - 7) + a = 23$ было число 9;
2) $(11 + x) + 101 = a$ было число 5?

1163. При каких значениях a уравнение не имеет корней:
1) $ax = 1$; 2) $(a - 2)x = 3$?

1164. Найдите все целые значения a, при которых корень уравнения является целым числом:
1) $ax = -14$; 2) $(a - 2)x = 12$.

1165. Найдите все целые значения m, при которых корень уравнения является натуральным числом:
1) $mx = 20$; 2) $(m + 3)x = -18$.

Уравнения с параметром в курсе алгебры 7 класса

§ 2. Линейное уравнение с одной переменной

Пример 2. Решите уравнение:
1) $(a-1)x = 2$; 2) $(a+9)x = a+9$.

Решение. 1) При $a = 1$ уравнение принимает вид $0x = 2$. В этом случае корней нет. При $a \neq 1$ получаем: $x = \dfrac{2}{a-1}$.

Ответ: если $a = 1$, то уравнение не имеет корней; если $a \neq 1$, то $x = \dfrac{2}{a-1}$.

2) При $a = -9$ уравнение принимает вид $0x = 0$. В этом случае корнем уравнения является любое число. При $a \neq -9$ получаем: $x = 1$.

Ответ: если $a = -9$, то x — любое число; если $a \neq -9$, то $x = 1$. ◄

61. При каком значении a уравнение:
1) $ax = 6$; 2) $(3-a)x = 4$; 3) $(a-2)x = a+2$
не имеет корней?

62. При каком значении a любое число является корнем уравнения:
1) $ax = a$; 2) $(a-2)x = 2-a$; 3) $a(a+5)x = a+5$?

63. При каких значениях a уравнение:
1) $(a-5)x = 6$; 2) $(a+7)x = a+7$
имеет единственный корень?

64. Решите уравнение:
1) $(b+1)x = 9$; 2) $(b^2+1)x = -4$.

65. Решите уравнение $(m+8)x = m+8$.

66. Каким выражением можно заменить звёздочку в равенстве $6x + 8 = 4x + *$, чтобы получилось уравнение:
1) не имеющее корней;
2) имеющее бесконечно много корней;
3) имеющее один корень?

67. В равенстве $2(1{,}5x - 0{,}5) = 7x + *$ замените звёздочку таким выражением, чтобы получившееся уравнение:
1) не имело корней;
2) имело бесконечно много корней;
3) имело один корень.

Уравнения с параметром в курсе алгебры 7 класса

§ 26. Системы уравнений с двумя переменными. Графический метод решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными

Если графиками уравнений, входящих в систему линейных уравнений, являются прямые, то количество решений этой системы зависит от взаимного расположения двух прямых на плоскости:

1) если прямые пересекаются, то система имеет единственное решение;

2) если прямые совпадают, то система имеет бесконечно много решений;

3) если прямые параллельны, то система решений не имеет.

Пример, соответствующий случаю, когда система имеет единственное решение, мы уже рассмотрели выше.

Это система

$$\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13. \end{cases}$$

Теперь обратимся к примерам, которые иллюстрируют случаи 2 и 3.

Так, если в системе

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - y = 1, \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$

обе части первого уравнения умножить на 2, то решения этого уравнения, а значит, и всей системы не изменятся.

Имеем:

$$\begin{cases} x - 2y = 2, \\ x - 2y = 2. \end{cases}$$

Очевидно, что решения этой системы совпадают с решениями уравнения $x - 2y = 2$. Но это уравнение имеет бесконечно много решений, а следовательно, и рассматриваемая система имеет бесконечно много решений.

Приведём пример системы, которая не имеет решений:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + y = 2, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Действительно, умножим обе части первого уравнения системы на 3. Получим:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

Понятно, что не существует такой пары значений x и y, при которых выражение $2x + 3y$ одновременно принимает значения и 6, и 7.

В завершение подчеркнём, что именно графический метод нам подсказал, что не существует системы линейных уравнений, имеющей, например, ровно 2, или ровно 3, или ровно 100 и т. п. решений.

1021. При каком значении a имеет бесконечно много решений система уравнений:

1) $\begin{cases} x + 5y = 4, \\ 4x + 20y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + ay = 12, \\ 9x - 15y = 36? \end{cases}$

1022. При каких значениях a система уравнений:

1) $\begin{cases} 7x - 12y = 14, \\ 7x - 12y = a \end{cases}$

не имеет решений;

2) $\begin{cases} 6x + ay = 4, \\ 3x - 5y = 2 \end{cases}$

имеет бесконечно много решений?

1023. Подберите такие значения a и b, при которых система уравнений

$\begin{cases} x - 2y = 3, \\ ax + 4y = b: \end{cases}$

1) имеет бесконечно много решений;
2) имеет единственное решение;
3) не имеет решений.

1024. Подберите такие значения m и n, при которых система уравнений

$\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - my = n: \end{cases}$

1) имеет бесконечно много решений;
2) имеет единственное решение;
3) не имеет решений.

Уравнения с параметром в курсе алгебры 8 класса

23 Постройте график функции $y=\dfrac{x^4-13x^2+36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях параметра c прямая $y=c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Постройте график функции $y = x^2 - 4|x| + 2x$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2+x)|x|}{x+1}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

32AB12

§ 7. Равносильные уравнения. Рационалные уравнения

219. Для каждого значения a решите уравнение:

1) $\dfrac{x-1}{x-a}=0$; 4) $\dfrac{(x-a)(x-6)}{x-7}=0$;

2) $\dfrac{x-a}{x+5}=0$; 5) $\dfrac{(x-4)(x+2)}{x-a}=0$;

3) $\dfrac{a(x-a)}{x-3}=0$; 6) $\dfrac{x-a}{(x-4)(x+2)}=0$.

220. При каких значениях a уравнение $\dfrac{x+a}{x^2-4}=0$ не имеет корней?

221. При каких значениях a уравнение $\dfrac{(x-a)(x-3a)}{x+9}=0$ имеет один корень?

413. При каком значении a уравнение $x^2 = a + 1$:
1) имеет два корня;
2) имеет один корень;
3) не имеет корней?

1) $\dfrac{x^2-8x+7}{x-a}=0$; 3) $\dfrac{x^2-(3a+2)x+6a}{x-6}=0$;

2) $\dfrac{x-a}{x^2-8x+7}=0$; 4) $\dfrac{a(x-a)}{x+3}=0$.

797. При каких значениях a уравнение $\dfrac{x^2-ax+5}{x-1}=0$ имеет единственный корень?

648. Решите уравнение:
1) $x^2-7|x|=0$; 2) $x^2-6|x|+x=0$; 3) $2x^2-\dfrac{3x^2}{|x|}=0$.

649. При каком значении a уравнение $(a-2)x^2+(2a-1)x+a^2-4=0$ является:
1) линейным;
2) приведённым квадратным;
3) неполным неприведённым квадратным;
4) неполным приведённым квадратным?

650. Определите, при каком значении a один из корней квадратного уравнения равен 0, и найдите второй корень уравнения:
1) $x^2+ax+a-4=0$; 3) $ax^2+(a+3)x+a^2-3a=0$.
2) $4x^2+(a-8)x+a^2+a=0$;

ОБЪЕДИНЕННАЯ ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА дрофа вентана граф

Квадратные уравнения с параметром

§ 20. Формула корней квадратного уравнения

Пример 3. При каком значении b имеет единственный корень уравнение:

1) $2x^2 - bx + 18 = 0$;
2) $(b + 6)x^2 - (b - 2)x + 1 = 0$?

Решение. 1) Данное уравнение является квадратным. Оно имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю. Имеем:

$$D = b^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = b^2 - 144;$$
$$b^2 - 144 = 0;$$
$$b = -12 \text{ или } b = 12.$$

Ответ: $b = -12$ или $b = 12$.

2) При $b = -6$ получаем линейное уравнение $8x + 1 = 0$, имеющее один корень.

При $b \neq -6$ данное уравнение является квадратным. Оно имеет единственный корень, если его дискриминант равен нулю:

$$D = (b - 2)^2 - 4(b + 6) = b^2 - 4b + 4 - 4b - 24 = b^2 - 8b - 20.$$

Имеем: $b^2 - 8b - 20 = 0$, отсюда $b = -2$ или $b = 10$.

Ответ: $b = -2$, или $b = 10$, или $b = -6$. ◄

688. При каком значении b имеет единственный корень уравнение:
1) $2x^2 + 4x - b = 0$; 2) $3x^2 - bx + 12 = 0$?

689. При каком значении b имеет единственный корень уравнение:
1) $6x^2 - 18x + b = 0$; 2) $8x^2 + bx + 2 = 0$?

690. Докажите, что при любом значении p имеет два корня уравнение:
1) $4x^2 - px - 3 = 0$; 2) $x^2 + px + p - 2 = 0$.

691. Докажите, что при любом значении m не имеет корней уравнение:
1) $x^2 + mx + m^2 + 1 = 0$; 2) $x^2 - 2mx + 2m^2 + 9 = 0$.

692. Докажите, что при любом значении b уравнение $x^2 + bx - 7 = 0$ имеет два корня.

693. Для каждого значения a решите уравнение:
1) $x^2 + (3a + 1)x + 2a^2 + a = 0$; 3) $a^2x^2 - 24ax - 25 = 0$;
2) $x^2 - (2a + 4)x + 8a = 0$; 4) $3(2a - 1)x^2 - 2(a + 1)x + 1 = 0$.

694. Для каждого значения a решите уравнение:
1) $x^2 - (2a - 5)x - 3a^2 + 5a = 0$; 3) $ax^2 - (a + 1)x + 1 = 0$.
2) $x^2 + (3a - 4)x - 12a = 0$;

695. При каком значении b имеет единственный корень уравнение:
1) $bx^2 - 6x - 7 = 0$; 3) $(b - 4)x^2 + (2b - 8)x + 15 = 0$?
2) $(b + 5)x^2 - (b + 6)x + 3 = 0$;

696. При каком значении b имеет единственный корень уравнение:
1) $bx^2 + x + b = 0$; 2) $(b + 3)x^2 + (b + 1)x - 2 = 0$?

§ 21. Теорема Виета

737. Сумма квадратов корней уравнения $3x^2 + ax - 7 = 0$ равна $\frac{46}{9}$. Найдите значение a.

738. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - ax + 8 = 0$ удовлетворяют условию $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{5}{2}$. Найдите значение a.

739. Верно ли утверждение:
1) уравнение $7x^2 + 4x - a^2 - 1 = 0$ имеет корни разных знаков при любом значении a;
2) если уравнение $x^2 + 6x + a^2 + 4 = 0$ имеет корни, то независимо от значения a они оба отрицательны?

740. Найдите все целые значения b, при которых имеет целые корни уравнение:
1) $x^2 + bx + 6 = 0$; 2) $x^2 + bx - 12 = 0$.

741. Найдите все целые значения b, при которых имеет целые корни уравнение:
1) $x^2 + bx + 8 = 0$; 2) $x^2 + bx - 18 = 0$.

742. Корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$ равны его коэффициентам b и c. Найдите b и c.

743. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 4x + a = 0$ равна: 1) 12; 2) 6?

744. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (a - 1)x - 2a = 0$ равна 9?

§ 22. Квадратный трёхчлен

763. Постройте график функции:
1) $y = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1}$; 2) $y = \frac{3x^2 - 10x + 3}{x - 3} - \frac{x^2 - 4}{x + 2}$.

764. Постройте график функции:
1) $y = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$; 2) $y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} - \frac{x^2 - x - 30}{x + 5}$.

765. Разложите на множители многочлен:
1) $x^2 - 6xy + 5y^2$; 3) $3m^2 - 8mn - 3n^2$;
2) $a^2 + 5ab - 36b^2$; 4) $4x^2 - 5xy + y^2$.

766. Разложите на множители многочлен:
1) $a^2 - 14ab + 40b^2$; 2) $12b^2 + bc - 6c^2$.

767. Для каждого значения a решите уравнение:
1) $(a^2 - a - 6)x = a^2 - 9$; 2) $(a^2 - 8a + 7)x = 2a^2 - 13a - 7$.

768. Для каждого значения a решите уравнение $(a^2 + 7a - 8)x = a^2 + 16a + 64$.

796. Для каждого значения a решите уравнение:
1) $\frac{x^2 - 8x + 7}{x - a} = 0$; 3) $\frac{x^2 - (3a + 2)x + 6a}{x - 6} = 0$;
2) $\frac{x - a}{x^2 - 8x + 7} = 0$; 4) $\frac{a(x - a)}{x + 3} = 0$.

797. При каких значениях a уравнение $\frac{x^2 - ax + 5}{x - 1} = 0$ имеет единственный корень?

Линейные неравенства и системы неравенств с параметром

§ 5. Решение линейных неравенств с одной переменной. Числовые промежутки

157. При каких значениях a уравнение:
1) $4x + a = 2$ имеет положительный корень;
2) $(a + 6)x = 3$ имеет отрицательный корень;
3) $(a - 1)x = a^2 - 1$ имеет единственный положительный корень?

158. При каких значениях m уравнение:
1) $2 + 4x = m - 6$ имеет неотрицательный корень;
2) $mx = m^2 - 7m$ имеет единственный отрицательный корень?

159. Найдите все значения a, при которых имеет два различных действительных корня уравнение:
1) $ax^2 + 2x - 1 = 0$;
2) $(a + 1)x^2 - (2a - 3)x + a = 0$;
3) $(a - 3)x^2 - 2(a - 5)x + a - 2 = 0$.

160. Найдите все значения a, при которых не имеет корней уравнение $(a - 2)x^2 + (2a + 1)x + a = 0$.

161. Существует ли такое значение a, при котором не имеет решений неравенство (в случае утвердительного ответа укажите это значение):
1) $ax > 3x + 4$; 2) $(a^2 - a - 2)x \le a - 2$?

162. Существует ли такое значение a, при котором любое число является решением неравенства (в случае утвердительного ответа укажите это значение):
1) $ax > -1 - 7x$; 2) $(a^2 - 16)x \ge a + 4$?

163. Для каждого значения a решите неравенство:
1) $ax > 0$; 3) $ax \ge a$; 5) $(a - 2)x > a^2 - 4$;
2) $ax < 1$; 4) $2(x - a) < ax - 4$; 6) $(a + 3)x \le a^2 - 9$.

164. Для каждого значения a решите неравенство:
1) $a^2x \le 0$; 2) $a + x < 2 - ax$; 3) $(a + 4)x > 1$.

§ 6. Системы линейных неравенств с одной переменной

207. При каких значениях a имеет хотя бы одно решение система неравенств:
1) $\begin{cases} x \ge 3, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \le 3, \\ x \ge a? \end{cases}$

208. При каких значениях a не имеет решений система неравенств:
1) $\begin{cases} x > 4, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \le 1, \\ x \ge a? \end{cases}$

209. При каких значениях a множеством решений системы неравенств $\begin{cases} x > -1, \\ x \ge a \end{cases}$ является промежуток:
1) $(-1; +\infty)$; 2) $[1; +\infty)$?

210. Для каждого значения a решите систему неравенств $\begin{cases} x < 2, \\ x \le a. \end{cases}$

211. Для каждого значения a решите систему неравенств $\begin{cases} x < -3, \\ x > a. \end{cases}$

212. При каких значениях a множество решений системы неравенств $\begin{cases} x \ge 7, \\ x < a \end{cases}$ содержит ровно четыре целых числа?

213. При каких значениях b множество решений системы неравенств $\begin{cases} x < 5, \\ x \ge b \end{cases}$ содержит ровно три целых числа?

214. При каких значениях a наименьшим целым решением системы неравенств $\begin{cases} x \ge 6, \\ x > a \end{cases}$ является число 9?

215. При каких значениях b наибольшим целым решением системы неравенств $\begin{cases} x \le b, \\ x < -2 \end{cases}$ является число -6?

216. При каких значениях a корни уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$ меньше числа 5?

217. При каких значениях a корни уравнения $x^2 - (4a - 2)x + 3a^2 - 4a + 1 = 0$ принадлежат промежутку $[-2; 8]$?

218. При каких значениях a один из корней уравнения $3x^2 - (2a + 5)x + 2 + a - a^2 = 0$ меньше -2, а другой — больше 3?

Квадратные неравенства, системы неравенств и системы уравнений с параметром

§ 12. Решение квадратных неравенств

435. При каких значениях a данное неравенство выполняется при всех действительных значениях x:
1) $x^2 - 4x + a > 0$;
2) $x^2 + (a - 1)x + 1 - a - a^2 \geq 0$;
3) $-\frac{1}{4}x^2 + 5ax - 9a^2 - 8a < 0$;
4) $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a + 1 > 0$?

436. При каких значениях a не имеет решений неравенство:
1) $-x^2 + 6x - a > 0$;
2) $x^2 - (a + 1)x + 3a - 5 < 0$;
3) $ax^2 + (a - 1)x + (a - 1) < 0$?

437. Для каждого значения a решите систему неравенств:
1) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 > 0, \\ x > a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x^2 - 3x - 1 \leq 0, \\ x < a. \end{cases}$

438. Для каждого значения a решите систему неравенств:
1) $\begin{cases} x^2 - x - 72 < 0, \\ x > a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 9x + 8 > 0, \\ x < a. \end{cases}$

§ 13. Системы уравнений с двумя переменными

470. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x - y = a \end{cases}$
1) имеет одно решение;
2) имеет два решения;
3) не имеет решений?

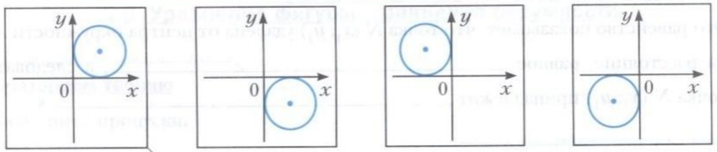
471. При каких значениях k система уравнений $\begin{cases} y - x^2 = 4, \\ y = kx + 3 \end{cases}$
1) имеет одно решение;
2) имеет два решения;
3) не имеет решений?

472. Сколько решений в зависимости от значения a имеет система уравнений:
1) $\begin{cases} y = |x|, \\ x^2 + y = a; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x = 1, \\ xy = a; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ |x| = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + a? \end{cases}$

473. Сколько решений в зависимости от значения a имеет система уравнений:
1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ |y| = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = a - |x|; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = 4? \end{cases}$

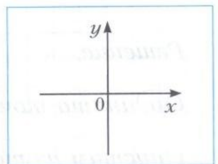
Задачи из курса геометрии 9 кл.

165. Установите соответствие между окружностью, радиус которой равен 2, касающейся осей координат, и её уравнением.



$(x+2)^2+(y-2)^2=4$ $\quad$ $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ $\quad$ $(x+2)^2+(y+2)^2=4$ $\quad$ $(x-2)^2+(y+2)^2=4$

173. Отметьте знаком ✓ координатную четверть, в которой находится точка M, если эта точка принадлежит окружности $(x-4)^2+(y+3)^2=1$.



I четверть ☐ $\quad$ III четверть ☐

II четверть ☐ $\quad$ IV четверть ☐

174. Отметьте знаком ✓ верное равенство, если окружность $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ касается оси ординат.

$R=|a|$ ☐ $\quad$ $R=|b|$ ☐ $\quad$ $R=\sqrt{a^2+b^2}$ ☐ $\quad$ $R=|a-b|$ ☐

175. Отметьте знаком ✓ верное равенство, если окружность $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ проходит через начало координат.

$R=|a|$ ☐ $\quad$ $R=|b|$ ☐ $\quad$ $R=\sqrt{a^2+b^2}$ ☐ $\quad$ $R=|a-b|$ ☐

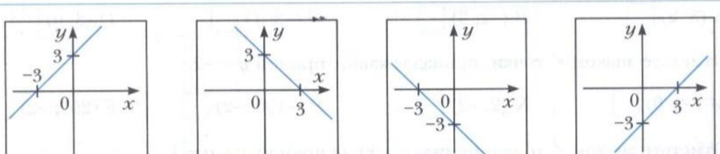
195. Отметьте знаком ✓ точки, через которые может проходить прямая $y=kx$ при $k>0$.

$A\left(1;\frac{1}{3}\right)$ ☐ $\quad$ $B\ (2;-4)$ ☐ $\quad$ $C\ (-5;3)$ ☐ $\quad$ $D\ (-3;-4)$ ☐

196. Отметьте знаком ✓ точки, через которые не может проходить прямая $y=kx$ при $k<0$.

$E\ (-9;3)$ ☐ $\quad$ $F\ (12;-36)$ ☐ $\quad$ $M\ (-1;-10)$ ☐ $\quad$ $N\ (4;16)$ ☐

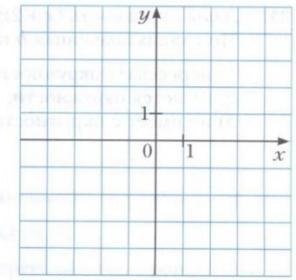
197. Установите соответствие между прямой и её уравнением.



$x+y=3$ $\quad$ $x+y=-3$ $\quad$ $x-y=-3$ $\quad$ $x-y=3$

211. Даны окружность $x^2+y^2=4$ и прямая $x=a$. При каких значениях a:

1) прямая пересекает окружность;
2) прямая касается окружности;
3) прямая не имеет с окружностью общих точек?



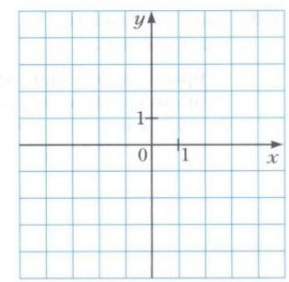
Решение.

Центр данной окружности — $\quad$ *, а её радиус равен* $\quad$.

Построим данную окружность.

212. Даны окружность $(x+2)^2+(y-1)^2=9$ и прямая $y=b$. При каких значениях b прямая:

1) пересекает окружность;
2) касается окружности;
3) не имеет с окружностью общих точек?



Решение.

Центр данной окружности — точка ($\quad$ *;* $\quad$ *), а её радиус равен* $\quad$.

Построим данную окружность:

Графический метод решения уравнений с параметром

§ 5 Построение графиков функций $y = f(x) + b$ и $y = f(x + a)$

Пример 7. Определите количество корней уравнения $|x - a| + 2|x + 1| = 3$ в зависимости от значения параметра a.

Решение. Запишем данное уравнение в виде:

$$|x - a| = 3 - 2|x + 1|.$$

Рассмотрим функции $f(x) = |x - a|$ и $g(x) = 3 - 2|x + 1|$. Задача сводится к тому, чтобы выяснить, сколько точек пересечения в зависимости от значения параметра a имеют графики функций f и g.

График функции g изображён на рисунке 5.18 красным цветом.

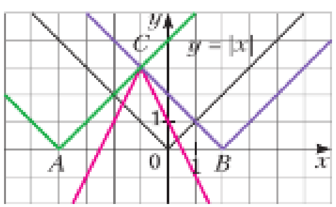


Рис. 5.18

График функции f — это фигура, которую получают в результате параллельного переноса вдоль оси абсцисс графика функции $y = |x|$ (синим цветом изображён график для отрицательного значения a, зелёным — для положительного, чёрным — для $a = 0$).

Из рисунка 5.18 видно, что если вершина угла, являющегося графиком функции f, расположена на оси абсцисс левее точки A или правее точки B, то графики функций f и g не пересекаются. Если вершина угла совпадает либо с точкой A, либо с точкой B, то графики функций f и g имеют одну общую точку — точку $C(-1; 3)$. Если вершина угла находится между точками A и B, то графики функций f и g имеют две общие точки.

Координаты точек A и B имеют вид $(a; 0)$.

Значения параметра a, при которых вершина угла, являющегося графиком функции f, совпадает с точкой A или с точкой B, можно найти, подставив в уравнение $y = |x - a|$ координаты точки C. Имеем: $3 = |-1 - a|$. Отсюда $a = -4$ или $a = 2$.

Получаем: $A(-4; 0)$, $B(2; 0)$.

Ответ: Если $a < -4$ или $a > 2$, то корней нет; если $a = -4$ или $a = 2$, то один корень; если $-4 < a < 2$, то 2 корня. ■

5.26. Определите количество корней уравнения $a - |x| = x^2$ в зависимости от значения параметра a.

5.27. При каких значениях параметра a уравнение $|x| + a = -x^2$ имеет два корня?

5.28. Сколько корней в зависимости от значения параметра a имеет уравнение $\sqrt{x - a} = 1 - x$?

5.29. Сколько корней в зависимости от значения параметра a имеет уравнение $\sqrt{x + a} = 2 - x$?

◆ ◆ ◆

5.30. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = |x - a|$ на отрезке $[1; 3]$.

5.31. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = (x + a)^2$ на отрезке $[-4; -2]$.

5.32. Определите количество корней уравнения $3|x| = |x - a|$ в зависимости от значения параметра a.

5.33. Определите количество корней уравнения $|x - a| + |x| = 2$ в зависимости от значения параметра a.

5.34. Сколько корней в зависимости от значения параметра a имеет уравнение $x^2 + 1 = |x - a|$?

Графический метод решения уравнений с параметром

§ 6 Построение графиков функций $y = f(|x|)$ и $y = |f(x)|$

Пример 3. При каких значениях параметра a уравнение $|2|x| - 1| = x - a$ имеет три корня?

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = |2|x| - 1|$. Проведём построение её графика по такой схеме:

$y = 2x - 1 \longrightarrow y = 2|x| - 1 \longrightarrow y = |2|x| - 1|$.

График функции f изображён на рисунке 6.5 красным цветом.

Рассмотрим функцию $g(x) = x - a$. Её графиком является прямая.

Задача сводится к тому, чтобы найти такое положение прямой $g(x) = x - a$, при котором графики функций f и g имеют три общие точки.

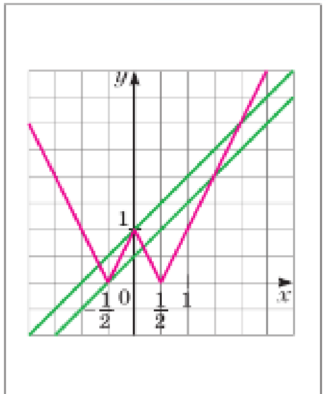


Рис. 6.5

Это условие будет выполнено только тогда, когда прямая $g(x) = x - a$ пройдёт через точку $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ или через точку $(0; 1)$ (рис. 6.5). Найдём значения параметра a, соответствующие этим положениям прямой. Имеем: $\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} - a = 0, \\ 0 - a = 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a = -\frac{1}{2}, \\ a = -1. \end{array}\right.$

Ответ: $a = -\frac{1}{2}$ или $a = -1$. ■

6.10. Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a:
1) $||x| - 1| = a$; 2) $|(|x| - 1)^2 - 1| = a$; 3) $|\sqrt{x} - 2| = a$?

6.11. Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a:
1) $|x^2 - 1| = a$; 2) $|(x + 2)^2 - 3| = a$; 3) $|(|x| - 2)^2 - 3| = a$?

◆◆◆

6.16. Постройте график функции:
1) $y = \left|\sqrt{|x| - 1} - 1\right|$; 2) $y = \left|\frac{1}{|x - 2|} - 1\right|$; 3) $y = \left|\frac{|x| + 2}{|x| - 1}\right|$.

6.17. Постройте график функции:
1) $y = \left|\sqrt{2|x| - 1} - 1\right|$; 2) $y = \left|\sqrt{|3x + 1|} - 2\right|$; 3) $y = \left|\frac{|x| - 2}{|x| + 1}\right|$.

6.18. При каких значениях параметра a уравнение $||x - 1| - 1| = x - a$ имеет бесконечно много корней?

6.19. При каких значениях параметра a уравнение $||x + 2| - 3| = a - x$ имеет бесконечно много корней?

6.20. При каких значениях параметра a уравнение $|2|x - 1| - 3| = x - a$ имеет три корня?

6.21. При каких значениях параметра a уравнение $|3|x + 1| - 2| = a - x$ имеет три корня?

6.22. При каких значениях параметра a уравнение $|2|x + a| - 1| = x - 1$ имеет единственный корень?

6.23. При каких значениях параметра a уравнение $|3|x - a| - 2| = 2 - x$ имеет единственный корень?

§ 7 Квадратичная функция, её график и свойства

Пример 3. При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + 2x - 1 + |x - a|$ на $D(f)$ больше, чем 2?

Решение. Имеем: $D(f) = \boldsymbol{R}$. Если $\min\limits_{\boldsymbol{R}} f(x) > 2$, то для любого $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется неравенство:

$$x^2 + 2x - 1 + |x - a| > 2. \qquad (*)$$

Следовательно, задача сводится к тому, чтобы найти все значения параметра a, при которых неравенство $(*)$ выполняется при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

Имеем: $|x - a| > -x^2 - 2x + 3$.

Рассмотрим функции $g(x) = |x - a|$ и $h(x) = -x^2 - 2x + 3$.

Достаточно найти те значения параметра a, при которых все точки графика функции g (угла, вершина которого расположена на оси абсцисс) находятся выше соответствующих точек графика функции h (параболы с вершиной в точке $(-1; 4)$, ветви которой направлены вниз).

На рисунке 7.6 показаны два положения графика функции g, при которых графики функций h и g имеют одну общую точку. Если вершина угла расположена на оси абсцисс левее точки A или правее точки B, то получаем искомое взаимное расположение графиков функций g и h.

Если вершина угла совпадает с точкой A, то прямая $y = x - a$ имеет с параболой $y = -x^2 - 2x + 3$ одну общую точку. Этому случаю соответствуют те значения параметра a, при которых уравнение $-x^2 - 2x + 3 = x - a$ имеет единственное решение.

Получаем: $-x^2 - 3x + 3 + a = 0$; $D = 9 + 12 + 4a = 0$. Отсюда $a = -\dfrac{21}{4}$.

Если вершина угла совпадает с точкой B, то прямая $y = a - x$ имеет с параболой $y = -x^2 - 2x + 3$ одну общую точку. Значение параметра a, соответствующее этому случаю, равно $\dfrac{13}{4}$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Ответ: $a < -\dfrac{21}{4}$ или $a > \dfrac{13}{4}$. ■

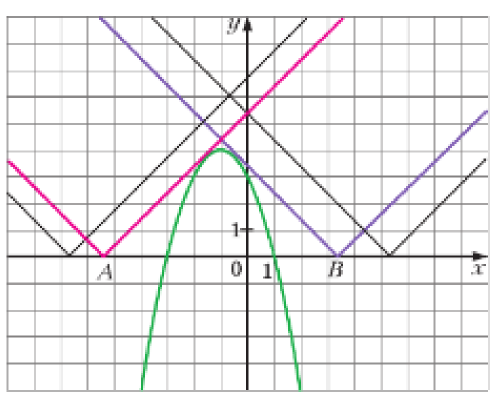


Рис. 7.6

Пример 4. При каких значениях параметра a уравнение $(a + 4x - x^2 - 3)(a - 1 - |x - 2|) = 0$ имеет три корня?

Решение. Рассмотрим координатную плоскость xa, т. е. координатную плоскость, каждая точка которой имеет координаты вида $(x; a)$.

Рассматривая данное уравнение как уравнение с двумя переменными x и a, построим его график на координатной плоскости xa.

Переходим к равносильной совокупности:

$$\left[\begin{aligned} &a = x^2 - 4x + 3,\\ &a = |x - 2| + 1. \end{aligned}\right.$$

Графиком первого уравнения совокупности является парабола с вершиной в точке $(2; -1)$, второго — угол с вершиной в точке $(2; 1)$. Следовательно, графиком исходного уравнения является объединение этих фигур (на рисунке 7.7 график изображён зелёным цветом).

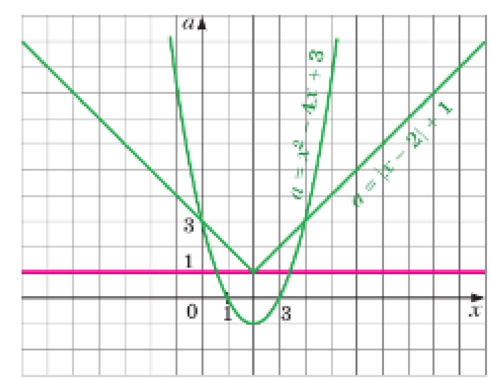


Рис. 7.7

Количество точек пересечения с этим графиком горизонтальной прямой $a = a_1$ соответствует количеству корней данного уравнения при значении параметра a, равном a_1.

Из рисунка 7.7 видно, что только прямая $a = 1$ пересекает график уравнения в трёх точках.

Ответ: $a = 1$. ■

ОБЪЕДИНЕННАЯ ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА
дрофа
вентана граф

§ 7 Квадратичная функция, её график и свойства

7.24. При каком значении параметра a график функции $y = ax^2 + (a-2)x + \frac{1}{4}$ имеет с осью абсцисс одну общую точку?

7.25. При каком значении параметра c наибольшее значение функции $y = -5x^2 + 10x + c$ равно -3?

7.26. При каком значении параметра c наименьшее значение функции $y = 0{,}6x^2 - 6x + c$ равно -1?

7.27. При каких значениях параметра c вершина параболы $y = x^2 - 8x + c$ расположена выше прямой $y = -2$?

7.28. При каких значениях параметра a прямая $y = x - 1$ имеет с параболой $y = x^2 - 2ax + 3$ одну общую точку?

7.29. При каких значениях параметра a прямая $y = -x + 4$ имеет с параболой $y = x^2 - 3x - a$ одну общую точку?

7.30. На рисунке 7.8 изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов a, b и c.

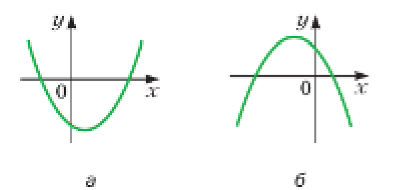


Рис. 7.8

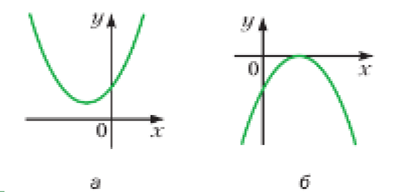


Рис. 7.9

7.31. На рисунке 7.9 изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов a, b и c.

7.32. Могут ли графики квадратичных функций $y = ax^2 + bx + c$ и $y = cx^2 + bx + a$ быть расположены так, как показано на рисунке 7.10?

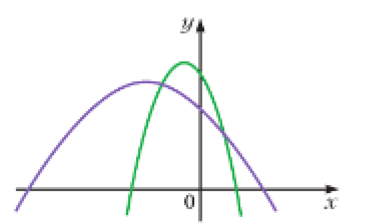


Рис. 7.10

7.63. Определите количество корней уравнения $x^4 + 2ax^2 - x + a^2 + a = 0$ в зависимости от значения параметра a.

7.64. На координатной плоскости xy укажите все точки, через которые не проходит ни одна из парабол вида $y = x^2 - 4ax + 2a^2 - 3$.

7.65. Функция $f(x) = x^2 + bx + c$ имеет два нуля, один из которых принадлежит промежутку $(0;\ 1)$, а другой не принадлежит этому промежутку. Докажите, что $f(c) \leqslant 0$.

§ 8 Решение квадратных неравенств

8.13. При каких значениях параметра a не имеет корней уравнение:
1) $x^2 + (a-2)x + 25 = 0$; 2) $4{,}5x^2 - (4a+3)x + 3a = 0$?

8.14. При каких значениях параметра b имеет два различных корня уравнение:
1) $x^2 - 8bx + 15b + 1 = 0$; 2) $2x^2 + 2(b-6)x + b - 2 = 0$?

8.24. При каких значениях параметра a данное неравенство выполняется при всех действительных значениях x:
1) $x^2 - 4x + a > 0$;
2) $x^2 + (a-1)x + 1 - a - a^2 \geqslant 0$;
3) $(a-1)x^2 - (a+1)x + a + 1 > 0$;
4) $(a-3)x^2 - 2ax + 3a - 6 > 0$?

8.25. При каких значениях параметра a не имеет решений неравенство:
1) $-x^2 + 6x - a > 0$;
2) $x^2 - (a+1)x + 3a - 5 < 0$;
3) $ax^2 + (a-1)x + (a-1) < 0$;
4) $(a+4)x^2 - 2ax + 2a - 6 < 0$?

8.26. При каких значениях параметра a функция $y = 0{,}5x^2 - 3x + a$ принимает неотрицательные значения при всех действительных значениях x?

8.27. При каких значениях параметра a функция $y = -4x^2 - 16x + a$ принимает отрицательные значения при всех действительных значениях x?

8.28. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + (2-a)x + 3 - 2a \leqslant 0$ имеет единственное решение?

8.29. Для каждого значения параметра a решите систему неравенств:
1) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 > 0, \\ x > a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x^2 - 3x - 1 \leqslant 0, \\ x < a. \end{cases}$

8.30. Для каждого значения параметра a решите систему неравенств:
1) $\begin{cases} x^2 - x - 72 < 0, \\ x > a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 9x + 8 > 0, \\ x < a. \end{cases}$

§ 9 Решение неравенств методом интервалов

9.27. Найдите множество решений неравенства в зависимости от значения параметра a:
1) $|x-a|(5x^2 - 2x - 3) < 0$; 2) $|x-a|(5x^2 - 2x - 3) \leqslant 0$.

9.28. Найдите множество решений неравенства в зависимости от значения параметра a:
1) $|x-a|(7x^2 - 4x - 3) < 0$; 2) $|x-a|(7x^2 - 4x - 3) \leqslant 0$.

9.29. Найдите множество решений неравенства в зависимости от значения параметра a:
1) $|x-1|(x^2 - (a+3)x + 3a) < 0$; 2) $|x-1|(x^2 - (a+3)x + 3a) \leqslant 0$.

9.30. Найдите множество решений неравенства в зависимости от значения параметра a:
1) $|x+2|(x^2 - (a+1)x + a) < 0$; 2) $|x+2|(x^2 - (a+1)x + a) \leqslant 0$.

§ 10 Расположение нулей квадратичной функции относительно данной точки

Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + (a - 1)x + 2a^2 - a - 1 = 0$ имеет корни разных знаков?

Решение. Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = x^2 + (a - 1)x + 2a^2 - a - 1$. Её графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Корни данного уравнения будут иметь разные знаки тогда и только тогда, когда точка 0 будет расположена между числами x_1 и x_2 — нулями функции f (рис. 10.1).

Нули функции f и точка 0 будут расположены в указанном порядке в том и только в том случае, когда значение функции f в точке 0 является отрицательным, т. е. $f(0) < 0$.

При исследовании рисунка 10.1 может сложиться впечатление, что условия $f(0) < 0$ недостаточно: надо ещё потребовать выполнения неравенства $D > 0$, где D — дискриминант квадратного трёхчлена $x^2 + (a - 1)x + 2a^2 - a - 1$. Однако это требование является избыточным, что следует из таких наглядно очевидных соображений: если ветви параболы направлены вниз (вверх) и существует точка, в которой квадратичная функция принимает положительное (отрицательное) значение, то парабола пересекает ось абсцисс в двух точках.

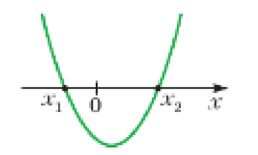


Рис. 10.1

Итак, искомое значение параметра a найдём из условия $f(0) < 0$.

Имеем: $2a^2 - a - 1 < 0$.

Решив это неравенство, получаем ответ.

Ответ: $-\frac{1}{2} < a < 1$. ■

Пример 5. При каких значениях параметра a только один корень уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ удовлетворяет условию $1 < x < 3$?

Решение. В условии не сказано, что данное уравнение имеет два различных корня. Поэтому рассмотрим два случая: $D = 0$ и $D > 0$, где D — дискриминант данного квадратного уравнения.

Случай 1. $D = 0$. Имеем: $a^2 - 8 = 0$. Отсюда $a = -2\sqrt{2}$ или $a = 2\sqrt{2}$. Подставим найденные значения параметра a в квадратное уравнение. Для первого значения параметра получаем $x = -\sqrt{2}$, а для второго — $x = \sqrt{2}$. Поскольку $-\sqrt{2} \notin (1; 3)$ и $\sqrt{2} \in (1; 3)$, то из двух найденных значений параметра в ответ входит $a = 2\sqrt{2}$.

Случай 2. $D > 0$. Пусть x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) — нули квадратичной функции $f(x) = x^2 - ax + 2$. Найдём все значения параметра a, при которых $x_1 \in (1; 3)$, а $x_2 \notin (1; 3)$ или $x_1 \notin (1; 3)$, а $x_2 \in (1; 3)$ (рис. 10.10). Нули x_1 и x_2 расположены относительно точек 1 и 3 так, как показано на рисунке 10.10, тогда и только тогда, когда выполняется следующая совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(1) > 0, \\ f(3) \leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(1) \leqslant 0, \\ f(3) > 0. \end{cases}\end{array}\right.$$

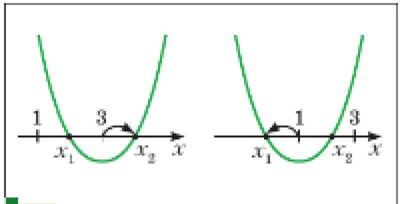


Рис. 10.10

Решив эту совокупность (сделайте это самостоятельно), получим $3 < a < \frac{11}{3}$.

Ответ: $3 \leqslant a < \frac{11}{3}$ или $a = 2\sqrt{2}$. ■

Упражнения

10.1. Найдите все значения параметра a, при которых один из корней уравнения $x^2 - (a^2 - 2)x - a^2 + 3a + 2 = 0$ больше 1, а другой меньше 1.

10.2. Найдите все значения параметра a, при которых один из корней уравнения $ax^2 - (a - 1)x + a^2 - 10 = 0$ больше -3, а другой меньше -3.

10.3. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 - (2a + 1)x + a^2 - 4a + 3 = 0$ являются положительными числами?

10.4. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 + 2(2a + 3)x + 4a^2 - 3a - 1 = 0$ являются отрицательными числами?

10.5. Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2 - (2a + 1)x + 2a + 9 = 0$ больше -1.

10.6. Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2 - 2(a + 1)x - 2a - 2 = 0$ меньше 1.

10.14. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2 - 2(a + 1)x + a^2 - a - 6 > 0$ выполняется для всех неположительных значений x.

10.15. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 + 2(a + 1)x + 3a + 1 \leqslant 0$ выполняется для всех значений x, меньших 1?

10.16. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 + 2ax + 3a^2 - 5a + 2 > 0$ выполняется для всех значений x, больших -1?

10.17. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $ax^2 - 2(a - 3)x + a + 3 > 0$ выполняется для всех $x \in [-2; 2]$.

10.18. При каких значениях параметра a из неравенства $2x^2 + x < 0$ следует неравенство $ax^2 - 2(a - 3)x + a - 1 > 0$?

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $x^2 - a(a^2 + 1)x + a^4 < 0$ имеет решения и множество решений неравенства содержится в интервале $(-3; 1)$.

Системы уравнений с параметром

§ 12 Графические методы решения систем уравнений с двумя переменными

Пример 3. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} x + 3|y| + 5 = 0, \\ (x - a)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ имеет ровно три решения?

Решение. Легко установить (сделайте это самостоятельно), что графиком первого уравнения системы является объединение двух лучей, имеющих общее начало $A(-5;\ 0)$. На рисунке 12.2 этот график выделен зелёным цветом. Графиком второго уравнения системы является окружность с центром в точке $(a;\ 0)$ и радиусом 2.

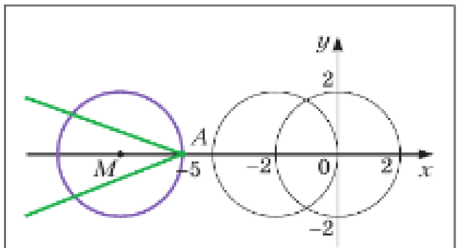


Рис. 12.2

Найдём такое положение окружности, при котором она имеет три общие точки с графиком первого уравнения системы. Из рисунка 12.2 видно, что такое условие выполняется, если окружность проходит через точку A и её центр, точка M, лежит левее этой точки. Поскольку радиус окружности равен 2, то $MA = 2$. Поэтому центр окружности находится в точке $M(-7;\ 0)$. Отсюда $a = -7$.

Ответ: $a = -7$. ■

◆◆

12.5. Сколько решений в зависимости от значения параметра a имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} y = |x|, \\ x^2 + y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + a. \end{cases}$

12.6. Сколько решений в зависимости от значения параметра a имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ |y| = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = a - |x|; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$

◆◆◆

12.7. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} (2a - 3)x - ay = 3a - 2, \\ 5x - (2a + 3)y = 5 \end{cases}$ имеет единственное решение?

12.8. Докажите, что система уравнений $\begin{cases} ax + (a - 1)y = 2a, \\ 3(a + 2)x + (4a + 1)y = a + 5 \end{cases}$ имеет единственное решение при всех значениях параметра a.

12.9. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a, \\ x + y = 1 \end{cases}$ не имеет решений.

12.10. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} (a - 2)x + 27y = 4{,}5, \\ 2x + (a + 1)y = -1 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

12.11. Найдите все значения параметров a и b, при которых совпадают множества решений систем уравнений $\begin{cases} ax + 2y = b + 1, \\ x + y = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x + y = a^2 + 2, \\ x + 3y = 3. \end{cases}$

12.14. Определите, при каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} (y - x)^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 3 - a \end{cases}$ имеет ровно два решения.

12.15. Найдите наименьшее значение параметра c, при котором система уравнений $\begin{cases} \left(x - c\sqrt{3}\right)^2 + y^2 - 2y = 0, \\ \sqrt{3}\,|x| - y = 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

12.16. Найдите наибольшее значение параметра c, при котором система уравнений $\begin{cases} \left(x + c\sqrt{3}\right)^2 + y^2 + 6y + 8 = 0, \\ \sqrt{3}\,|x| + y = 6 \end{cases}$ имеет единственное решение.

12.17. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x = a + \sqrt{y}, \\ y^2 - x^2 - 2x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$ имеет решения.

ОБЪЕДИНЕННАЯ ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА
дрофа
вентана граф

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет ровно три решения система уравнений

$$\begin{cases} y + a = |x| + 5, \\ x^2 + (y - 2a + 5)^2 = 4. \end{cases}$$

Решение.

Перепишем уравнения системы:

$$\begin{cases} y = |x| + 5 - a; \\ x^2 + (y - (2a - 5))^2 = 4. \end{cases}$$

График первого уравнения – прямой угол с вершиной в точке *(0; 5-a)*.

График второго уравнения – окружность с центром в точке *(0; 2a-5)* и радиусом $R=2$.

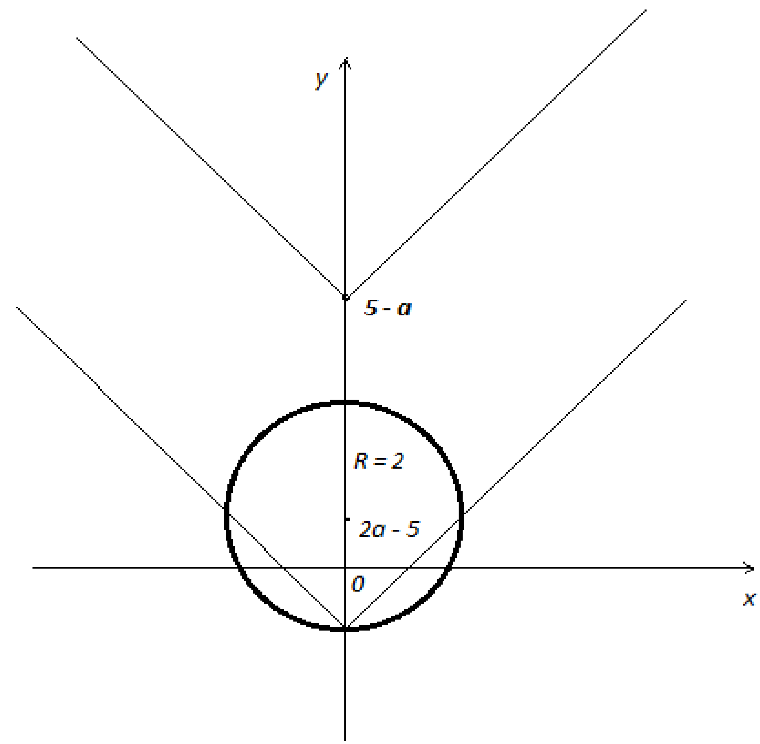
Графики имеют ровно три общие точки, если вершина угла принадлежит окружности, а стороны пересекают её:

$2a - 5 - 2 = 5 - a$,

$3a = 12$,

$a = 4$.

Ответ. $a = 4$.

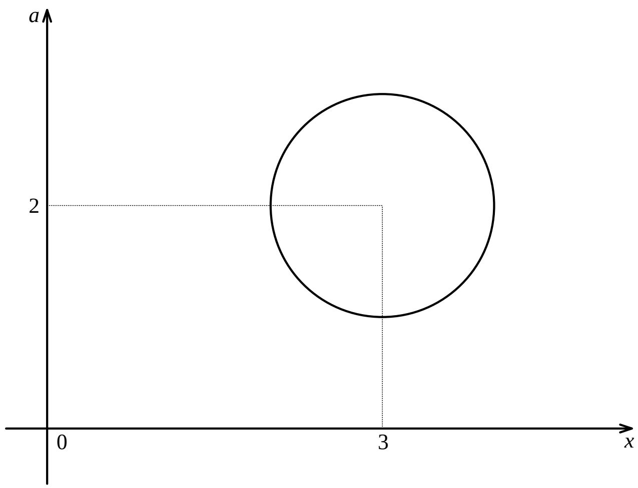


Найдите все значения параметра a, при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение.

Перепишем данное уравнение так:

$$(x-3)^2 + (a-2)^2 = 1.$$

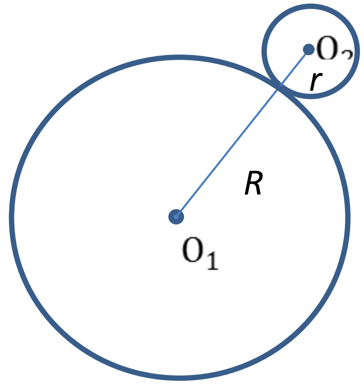
Его графиком в системе координат $x0a$ является окружность.

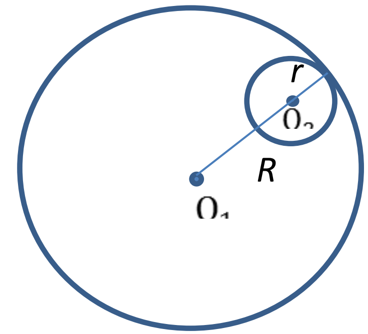


Ответ: $a = 2$.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases}(x-2a-5)^2 + (y-3a+5)^2 = 16,\\ (x-a-2)^2 + (y-2a+1)^2 = 81.\end{cases}$$





Решение.

Первое уравнение системы – уравнение окружности с центром в точке O_2 $(2a+5;\ 3a-5)$ и радиусом $r=4$, второе – уравнение окружности с центром в точке O_1 $(a+2;\ 2a-1)$ и радиусом $R=9$. Окружности имеют только одну общую точку при внешнем или внутреннем касании.

При внешнем касании расстояние между центрами окружностей $O_1O_2=R+r=13$, при внутреннем касании $O_1O_2=R-r=5$.

По формуле расстояния между точками

$$O_1O_2 = \sqrt{(2a+5-a-2)^2+(3a-5-2a+1)^2};$$

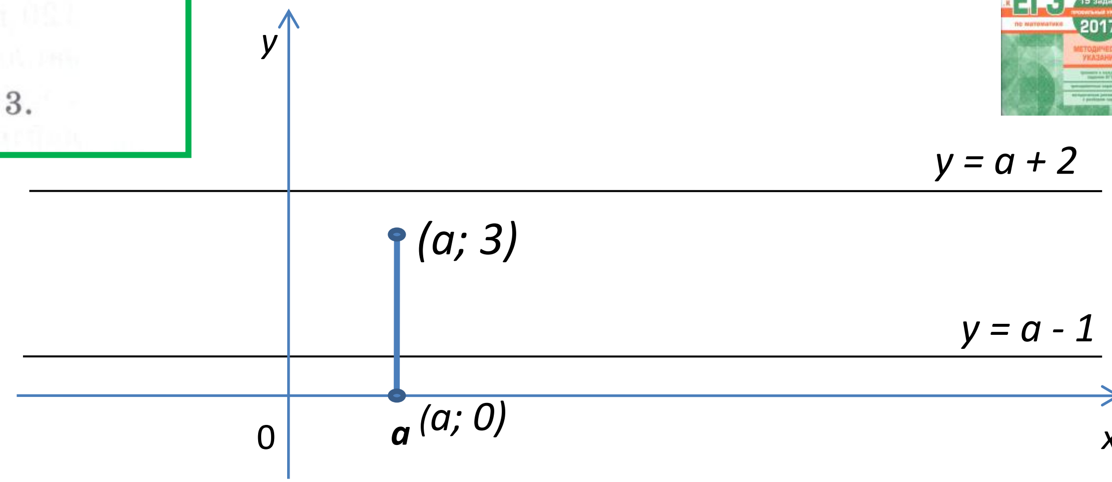
$$O_1O_2 = \sqrt{(a+3)^2+(a-4)^2};\ O_1O_2{}^2 = 2a^2 - 2a + 25.$$

В первом случае $2a^2 - 2a + 25 = 169$, $a = -8$ или $a = 9$; во втором случае $2a^2 - 2a + 25 = 25$, $a = 0$ или $a = 1$.

Ответ: $a \in \{-8; 0; 1; 9\}$.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система

$$\begin{cases} y^2-(2a+1)y+a^2+a-2=0, \\ \sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+(y-3)^2}=3. \end{cases}$$



Решения первого уравнения системы: $y = a + 2$ и $y = a - 1$. Это уравнения прямых, параллельных оси абсцисс, расстояние между которыми равно 3.

Второе уравнение задает множество точек координатной плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до точек $(a; 0)$ и $(a + 3; 0)$ равна 3.

Так как расстояние между точками равно 3, второму уравнению удовлетворяют координаты всех точек отрезка с концами в точках $(a; 0)$ и $(a + 3; 0)$. Прямые $y = a+2$ и $y = a - 1$ будут иметь с отрезком только одну общую точку, если $a + 2 \geq 0$ *и* $a - 1 \leq 3$, но прямые не проходят через концы отрезка, т.е. $a + 2 \neq 3$. Таким образом, значения a должны удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} a \geq -2; \\ a \leq 4; \\ a \neq 1. \end{cases}$$

Ответ: $a \in [-2; 1) \cup (1; 4]$.

Пример 8. При каких значениях параметра a множеством решений неравенства $|x - 3| + |a - 2| \leqslant 4$ является промежуток вида $[m; n]$, длина которого не больше 4?

Решение. Графиком данного неравенства на координатной плоскости xa является квадрат, изображённый на рисунке 15.9 (убедитесь в этом самостоятельно).

Если горизонтальная прямая $a = a_0$ пересекает квадрат по отрезку MN, то множеством решений неравенства является промежуток $[x_1; x_2]$, где x_1 и x_2 — абсциссы точек M и N соответственно (см. рис. 15.9).

Из рисунка 15.10 видно, что длина отрезка MN не будет превышать 4, если $-2 < a \leqslant 0$ или $4 \leqslant a < 6$.

Ответ: $-2 < a \leqslant 0$ или $4 \leqslant a < 6$. ■

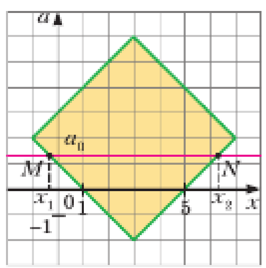


Рис. 15.9

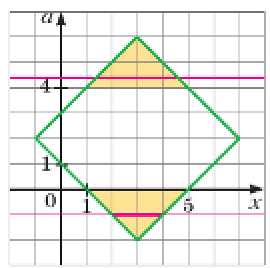


Рис. 15.10

15.15. При каких значениях параметра a множеством решений неравенства $2|x + 1| + |a - 4| \leqslant 2$ является промежуток вида $[m; n]$, длина которого не меньше 1?

15.16. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $(x^2 - a)(a - 2x - 8) > 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leqslant 4$.

15.17. При каких значениях параметра a множество решений неравенства $x(x - 4) + a^2(a + 4) \leqslant ax(a + 1)$ содержит не более четырёх целых значений x?

Пример 3. При каких значениях параметра a неравенство $3 - |x - a| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение?

Решение. Запишем данное неравенство так:

$$|x - a| < 3 - x^2.$$

Это неравенство равносильно системе $\begin{cases} x - a < 3 - x^2, \\ x - a > -3 + x^2. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} a > x^2 + x - 3, \\ a < -x^2 + x + 3. \end{cases}$

Полученная система должна иметь хотя бы одно отрицательное решение. Поэтому задача сводится к тому, чтобы найти все значения параметра a, при которых имеет решение система $\begin{cases} a > x^2 + x - 3, \\ a < -x^2 + x + 3, \\ x < 0. \end{cases}$

На координатной плоскости xa изобразим решения последней системы.

Графиком первого неравенства системы является множество точек, лежащих выше параболы $a = x^2 + x - 3$, графиком второго неравенства — множество точек, лежащих ниже параболы $a = -x^2 + x + 3$, графиком третьего неравенства — открытая полуплоскость, расположенная слева от оси ординат. Пересечение указанных множеств изображено на рисунке 16.7 жёлтым цветом.

Система имеет решения, если горизонтальные прямые пересекают построенную фигуру. Это пересечение обеспечивается условием $-\frac{13}{4} < a < 3$.

Ответ: $-\frac{13}{4} < a < 3$. ■

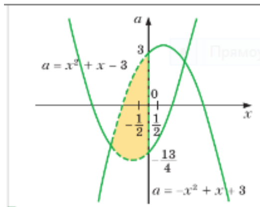


Рис. 16.7

16.24. При каких значениях параметра a неравенство $2 > |x + a| + x^2$ имеет хотя бы одно положительное решение?

16.25. При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases} |2x - a| + |x + a| \leqslant 6, \\ 2x^2 + x - 2a \geqslant 2 \end{cases}$ имеет:

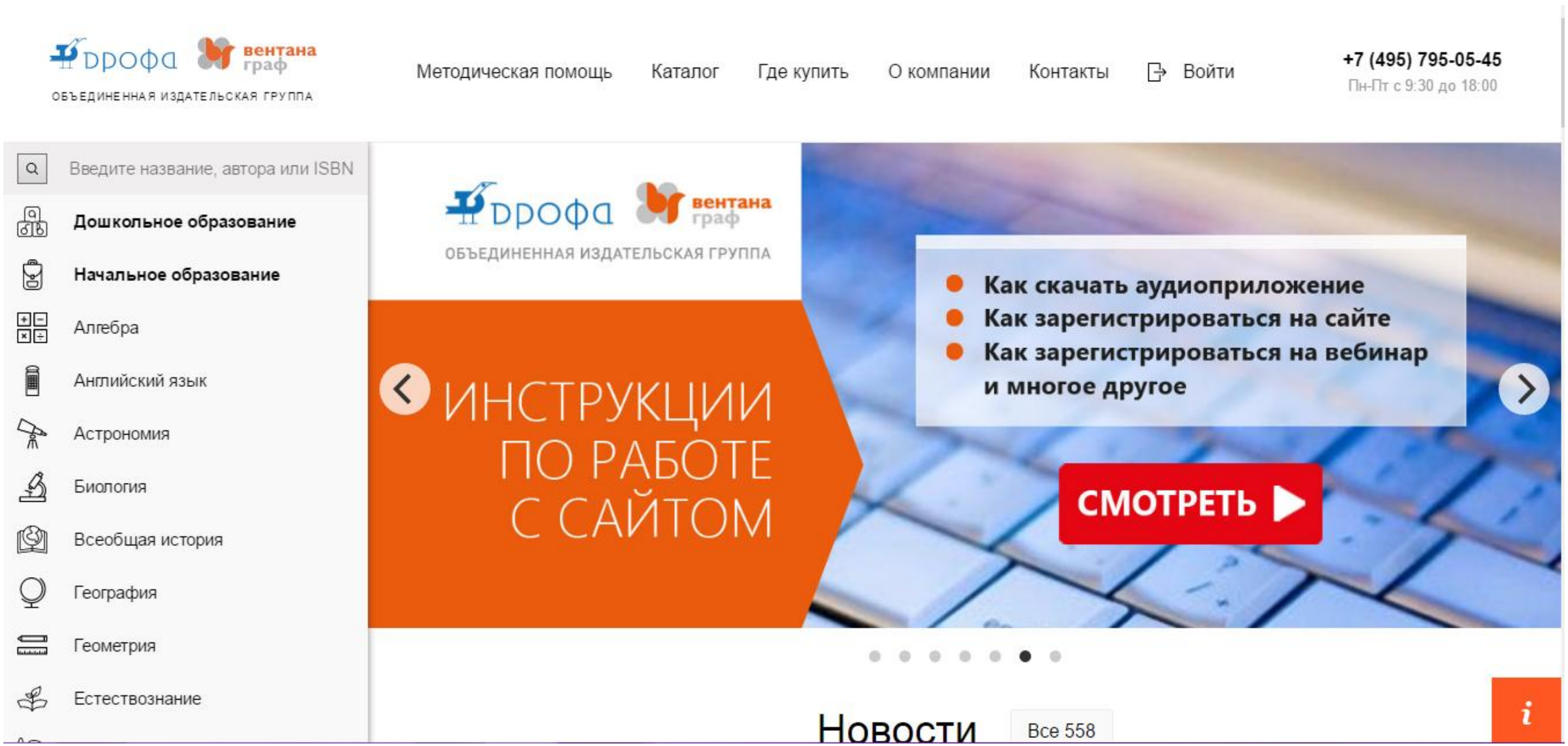
1) решения;
2) единственное решение;
3) только отрицательные решения;
4) только положительные решения;
5) только решения, удовлетворяющие условию $|x| \geqslant 1$;
6) множество решений, содержащих не более одного целого числа?

ОБЪЕДИНЕННАЯ
ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА

дрофа

вентана граф

https://drofa-ventana.ru



ОБЪЕДИНЕННАЯ ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА дрофа вентана граф

Спасибо за внимание!

Павлова Татьяна Николаевна
ведущий методист по математике
объединенной издательской группы «ДРОФА - ВЕНТАНА»
Pavlova.TN@drofa-ventana.ru