ОБЪЕДИНЕННАЯ ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА дрофа вентана граф

Как изучать элементы теории вероятностей и статистики в школьном курсе математики?

Г.К.Муравин, кандидат педагогических наук, профессор,
заведующий кафедрой математического образования
Института развития образовательных технологий,
автор УМК по математике для 1–11 классов

О.В.Муравина, кандидат педагогических наук, доцент,
Институт развития образовательных технологий,
автор УМК по математике для 1 – 11 классов

4 апреля 2017

Три подхода к понятию вероятностей: статистический, классический и аксиоматический

- **Аксиоматический подход**, разработанный великим математиком А.Н.Колмогоровым (1903—1987), использует понятия и методы высшей математики и при планировании школьного курса не рассматривался.
- В большинстве школьных учебников реализован **статистический подход**. В нем вероятность рассматривается как предел, к которому стремится частота (отношение числа благоприятных исходов к числу всех проведенных опытов) при увеличении числа опытов. Обычно делается попытка статистически убедиться в том, что в половине всех бросаний монетки выпадает решка, и на этом основании сделать вывод о том, что выпадение решки и выпадение орла события равновероятные. Например, в известной книге Бунимовича Е.А., Булычева В.А. «Вероятность и статистика», изданной в 2002 г.

  Заметив, что частоты при увеличении числа опытов изменяются незначительно, авторы на 43-й странице книги делают важный вывод, в значительной степени перечеркивающий попытки выйти на вероятность от частоты:

  «Устойчивость частот является скорее не математиче-ским, а экспериментальным фактом. На нем основывается частотное, или **статистическое, определение вероятности:** *за вероятность случайного события можно приближенно принять его частоту, полученную в длинной серии экспериментов.* Чем больше число проведенных экс-периментов, тем точнее можно оценить вероятность события по его частоте».

  Конечно, это определение вероятности не совсем «настоящее»: ведь, какой бы длинной ни была наша серия экспериментов, частота все равно будет колебаться. Например, в рассмотренной выше серии из 1000 экспериментов частота продолжает колебаться между 0,15 и 0,18. Нет также полной уверенности, что в дальнейшем частота не выскочит из этого интервала».

  Но тогда совершенно неочевидно, что существует сама вероятность, приближенное значение которой находили. А сколько уроков на это потрачено!

Элементы теории вероятностей и математической статистики в УМК Г.К.Муравина, О.В.Муравиной

Место элементов теории вероятностей в УМК Г.К.Муравина, О.В.Муравиной

- Учебники алгебры для 7-9 классов были созданы еще до включения элементов теории вероятностей и математической статистики в школьную программу. Естественно, что перед нами встала проблема как отбора содержания, так и выбора места его изучения в курсе. Задача далеко не простая, так как непосредственная связь, скажем, вычисления вероятности прослеживается лишь с дробями и процентами. Однако рассмотрение вероятности на начальном этапе темы дроби (5 класс) затруднит изучение дробей, а для этапа ее закрепления (6 класс) дроби в задачах на вероятность уж слишком простые.
- В решении задач на вероятность часто используется подсчет числа комбинаций – комбинаторика. В курсе алгебры для комбинаторики находится место при изучении произведения многочленов и при выводе формулы бинома Ньютона, т.е. в начале 8 класса. Таким образом, начинать изучение вероятности и комбинаторики нужно в 7 классе. В то же время, этот материал никак не связан с алгебраическим содержанием курса алгебры 7 класса. Это определяет его место в 7 классе – после изучения алгебраического материала и перед итоговым повторением.

Элементы теории вероятностей, комбинаторики и статистики в УМК Г.К.Муравина, О.В.Муравиной

- Следующее соображение, на основании которого распределялся материал, – невозможность выделения времени на изучение всего материала в одном классе, и очевидная необходимость неоднократного обращения к нему в течение достаточно продолжительного периода (с 7 по 11 классы). В противном случае, к концу 9 класса изученный материал будет забыт, а навыки решения задач – утрачены.
- В 8 классе в главе 5 повторяется классическое определение вероятности и формулы комбинаторики, решаются задачи, среди которых встречаются и более сложные, чем в 7 классе. А также рассматриваются ситуации нахождения вероятностей вне классической схемы: так называемые геометрическая и статистическая вероятности.
- В 9 классе рассматриваются понятия суммы и произведения событий, в связи с которыми появляются несовместные и независимые события, а также вводится понятие условной вероятности. Кроме того, школьники знакомятся с некоторыми понятиями статистики для рядов результатов: средним арифметическим, медианой, модой, размахом, *отклонением и дисперсией*. Получают школьники и начальное представление о математическом ожидании случайной величины.
- В старших классах этот материал повторяется с добавлением схемы Бернулли, а в новых учебниках – и формулы Байеса.
- Соотнося материал с соответствующими заданиями ОГЭ и ЕГЭ, можно заметить, что примерно 60% заданий можно решить после 7 класса, 85% – после 8 класса и все 100% – после 11 класса.

Понятие вероятности в 7 классе

Ключевым понятием классической схемы является понятие равновероятных исходов. Поэтому формированию отчетливых представлений о равновероятных и неравновероятных исходах, а также формированию умений отличать одни от других посвящается первый этап изучения темы. Начинается он со знаменитого парадокса Буридана, о несчастном осле, не сумевшем выбрать, какую из двух одинаковых охапок сена съесть.

Пример 1. В пенале у Пети лежат три шариковые ручки — одна с синей, вторая с зелёной, а третья с чёрной пастой. Петя наугад (не глядя в пенал) берёт одну из ручек. Равновероятны ли при этом возможности:

1) достать синюю ручку и достать чёрную ручку;

2) достать чёрную ручку и ручку другого цвета?

Рассматриваются другие ситуации, в которых школьники должны определить, равновероятны ли указанные возможности.

Понятие вероятности в 7 классе

Часто имеющиеся возможности только выглядят равновероятными, а на самом деле таковыми не являются, т. е. какие-то из них *более вероятны*, а другие *менее вероятны*.

Пример 2. Пете подарили три новые книги, но на дачу родители разрешили ему взять только одну из них. Петя взял две монеты и решил, что в случае выпадения двух орлов возьмёт первую книгу, в случае двух решек — вторую, а если выпадут орёл и решка, он возьмёт с собой третью книгу. Являются ли перечисленные варианты (два орла, две решки, орёл и решка) равновероятными? Если нет, то какой из них более вероятен?

Понятие вероятности в 7 классе

В упражнениях школьники знакомятся с сюжетами и объектами, которые затем будут являться источником задач на комбинаторику и вероятность: игральные кости, карточная колода и т.п. Полагаю, что для учителя не представляет труда увеличить число задач, если вдруг ученики будут затрудняться с ответами.
Работа с упражнениями фронтальная с использованием сигнальных карточек. Советуем отводить на материал темы примерно половину урока, а оставшееся время посвящать повторению алгебраической и функциональной линии.

! Контрольные вопросы и задания

1. Приведите примеры равновероятных возможностей и возможностей, которые не являются равновероятными.

2. На десяти карточках записаны целые числа от 0 до 9. Наугад выбирают две карточки и находят сумму записанных на них чисел. Равновероятны ли возможности получить в сумме число 1 и число 9? Если нет, то какая сумма более вероятна?

Во втором контрольном задании школьники должны заметить, что возможностей получить число 9 больше, чем число 1: 9 - 0, 8 - 1,…, 5 - 4.
Заметим, что рассматриваются равновероятные элементарные исходы, т.е. такие, что выполняются только при одном из испытаний. Так, например, при бросании игральной кости выпадение 4 очков – элементарный исход, а выпадение четного числа очков – нет.

Понятие вероятности в 7 классе

Когда мы бросаем монету, достоверным событием является то, что монета обязательно упадёт или орлом, или решкой вверх, а невозможным событием можно считать, например, что монета упадёт на ребро. Вероятность достоверного собы-

Вероятность достоверного события равна 1.

Вероятность невозможного события равна нулю.

Обозначим вероятность выпадения орла или решки как $P_{\text{орёл или решка}}$, вероятность выпадения орла как $P_{\text{орёл}}$, а вероятность выпадения решки — $P_{\text{решка}}$. Тогда получаем:

$$P_{\text{орёл или решка}} = P_{\text{орёл}} + P_{\text{решка}} = 1.$$

Поскольку вероятности выпадения орла и выпадения решки равны, имеем:

$$P_{\text{орёл}} = P_{\text{решка}} = \frac{1}{2}.$$

Понятие вероятности в 7 классе

Пример 1. Найти вероятность выпадения двух очков при бросании игральной кости.

Решение. При бросании игральной кости достоверным событием является выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Все эти шесть исходов равновероятны, и никакие два из них не могут случиться одновременно, значит, вероятность достоверного события — 1 — поровну распределяется между ними. Поэтому вероятность каждого из них, и в частности вероятность выпадения двух очков, равна $\frac{1}{6}$.

В большинстве задач интересующее нас событие может произойти не в одном, а в нескольких из числа возможных исходов.

Пример 2. Какова вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет число очков, большее 4?

Решение. Число очков, большее 4, — это 5 или 6. Значит, интересующее нас событие происходит, когда выпадает 5 или 6 очков, т. е. в двух из всех шести равновероятных исходов бросания игральной кости. Вероятность каждого из этих вариантов равна $\frac{1}{6}$, значит,

$$P_{5 \text{ или } 6} = P_5 + P_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Заметим, что вероятность находится как сумма дробей с числителями, равными 1, знаменателями которых является число всех равновероятных вариантов, на которые распадается соответствующее достоверное событие. Однако сумму равных слагаемых обычно заменяют произведением. Это приводит нас к важному выводу.

Вероятность события равна дроби, знаменатель которой — число всех равновероятных исходов, а числитель — число тех из них, при которых это событие происходит.

Понятие вероятности в 7 классе

Пример 3. В коробке лежат три чёрных и четыре белых бильярдных шара. Из неё наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар будет: а) чёрным; б) белым?

Решение. Когда из коробки вынимают один шар, им с равной вероятностью может оказаться любой из семи находящихся в ней шаров. Значит, есть всего 7 равновероятных возможностей вынуть шар из коробки. В трёх из них вынутый шар окажется чёрным, поскольку в коробке 3 чёрных шара.

Аналогично находим вероятность вытащить белый шар.

$$P_{\text{шар чёрный}} = \frac{3}{7}, \; P_{\text{шар белый}} = \frac{4}{7}.$$

Ответ: $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{7}$.

Задачи по теории вероятностей на ОГЭ и ЕГЭ

19 На тарелке лежат пирожки, одинаковые на вид: 4 с мясом, 8 с капустой и 3 с яблоками. Петя наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что пирожок окажется с яблоками.

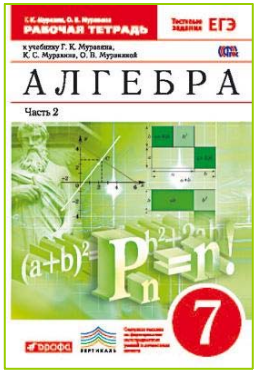
Ответ: ___________________________.

ОГЭ

4. В урне 5 белых и 7 чёрных шаров. Из урны наугад вынимают один шар. Какова вероятность, что шар будет чёрным?

А. $\frac{5}{7}$ В. $\frac{7}{5}$

Б. $\frac{7}{12}$ Г. $\frac{5}{2}$



439. В коробке лежат три красных, три жёлтых и четыре белых бильярдных шара. Найдите вероятность того, что взятый наугад шар окажется:

1) белым; 2) цветным.

440. В коробке находятся две карточки. Обе стороны одной из них белые, а другая с одной стороны белая, а с другой чёрная. Из коробки наугад вынимают одну из карточек и кладут её на стол так, что цвет нижней стороны не виден. Если верхняя сторона этой карточки будет белой, то какова вероятность, что её нижняя сторона будет чёрной?

441. Подбрасывают три монеты разного достоинства.

1) Сколько при этом имеется равновероятных возможностей?

2) Найдите вероятность того, что выпадет:

а) три решки; в) хотя бы одна решка;

б) ни одной решки; г) одна решка и два орла.

442. На книжную полку ставят 3 книги, не обращая внимания на их названия. Учитывая, что на полку попали «Три мушкетёра» А. Дюма и «Айвенго» В. Скотта, найдите вероятность следующих событий:

1) книга «Три мушкетёра» стоит первой слева, а «Айвенго» — первой справа;

2) «Три мушкетёра» — первая слева книга;

3) «Три мушкетёра» и «Айвенго» стоят рядом, причём «Айвенго» — справа от «Трёх мушкетёров»;

4) «Три мушкетёра» и «Айвенго» стоят рядом.

! Контрольные вопросы и задания

1. В портфеле лежат 4 книги: учебник математики, учебник истории, учебник английского языка и сборник зарубежной научной фантастики. Из портфеля наугад вынимают одну книгу. Из каких равновероятных возможностей складывается это событие? Какова вероятность вытащить какой-нибудь учебник?

2. На десяти карточках записаны целые числа от 0 до 9. Наугад выбирают две карточки и находят сумму записанных на них чисел. Какова вероятность получить сумму, равную:

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 6; 5) 9?

Задачи по теории вероятностей на ОГЭ и ЕГЭ

10 В чемпионате по прыжкам в воду участвуют 35 спортсменов: 7 из России, 12 из Китая, 9 из Японии и 7 из США. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий первым, окажется из России.

Ответ: ___________________________.

ИЛИ

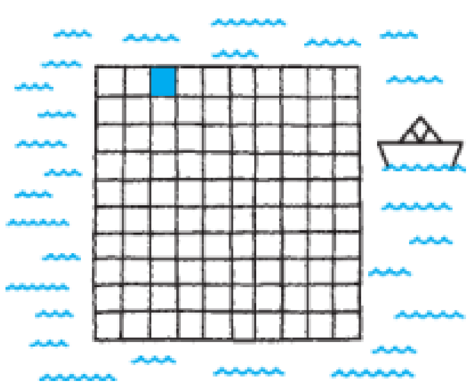
Из каждых 100 лампочек, поступающих в продажу, в среднем 3 неисправны. Какова вероятность того, что случайно выбранная в магазине лампочка окажется исправной?

Ответ: ___________________________.

ЕГЭ

7 класс

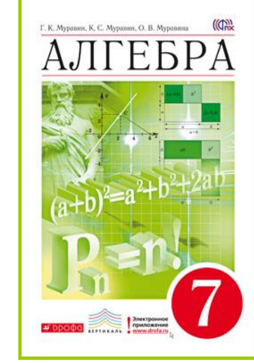
433. В квадрате для игры в «Морской бой» ставится один одноклеточный корабль. Какова вероятность с первой попытки в него попасть?



434. Для праздничной школьной лотереи изготовили 100 билетов. На каждый из них может выпасть один из 20 выигрышей. Какая вероятность выиграть, купив один билет этой лотереи?

435. В лотерее среди 1 млн билетов 300 тыс. выигрышных. Найдите вероятность того, что купленный билет окажется выигрышным.

Задачи по теории вероятностей на ОГЭ и ЕГЭ



440. В коробке находятся две карточки. Обе стороны одной из них белые, а другая с одной стороны белая, а с другой чёрная. Из коробки наугад вынимают одну из карточек и кладут её на стол так, что цвет нижней стороны не виден. Если верхняя сторона этой карточки будет белой, то какова вероятность, что её нижняя сторона будет чёрной?

Эта, да и все рассмотренные до этого момента задачи предполагали или отсутствие или устные вычисления, что делало естественным фронтальную работу с ними.
При ответе ученик должен следовать плану:
1) назвать число всех элементарных равновероятных исходов;
2) указать число благоприятных исходов из них;
3) вычислить вероятность события.
После каждого пункта ответа ученики класса должны поднятием соответствующих сигнальных карточек обозначить свое согласие или несогласие с ним. Ученикам, несогласным с ответом, следует предоставить возможность озвучить свой вариант.

Правило произведения, формулы комбинаторики в 7 классе

Чтобы найти число вариантов выбора пары элементов, число способов выбора первого элемента умножают на число способов, которыми к первому элементу можно присоединить второй.

Правило произведения непосредственно приводит к понятию перестановки на основании задачи вычисления числа пятизначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, не повторяя их. Получив произведение первых 5 натуральных чисел, мы вводим обозначение факториала и формулу числа перестановок: $P_n = n!$

Добавив цифры 6 и 7 получим формулу размещения их числа: $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

Поскольку $A_n^n = n!$ *доопределяем n! для n = 0.*

$$n! = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \text{ при } n = 2, 3, 4, \ldots, \\ 1 \text{ при } n = 0 \text{ и } n = 1 \end{cases}$$

Правило произведения, формулы комбинаторики в 7 классе

Вместо того чтобы выбирать по одной цифре из 7, выберем сначала сразу все 5 цифр числа и будем затем их переставлять. Обозначим число вариантов, которыми можно выбрать 5 цифр из 7, как C_7^5. Тогда каждому из этих вариантов соответствует P_5 перестановок выбранных цифр, а всего из данных 7 цифр можно будет составить $C_7^5 \cdot P_5$ пятизначных чисел. Как мы видели в примере 2, должно получиться число размещений из 7 по 5: $C_7^5 \cdot P_5 = A_7^5$. Отсюда получаем число вариантов выбора 5 элементов из 7:

$$C_7^5 = \frac{A_7^5}{P_5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21.$$

Выбирая 5 цифр из 7 данных, мы обращали внимание не на порядок выбора, а только на сочетание цифр, т. е. на то, какие цифры выбирали. Результат такого выбора называют *сочетанием*.

Правило произведения, формулы комбинаторики в 7 классе

Формулы комбинаторики

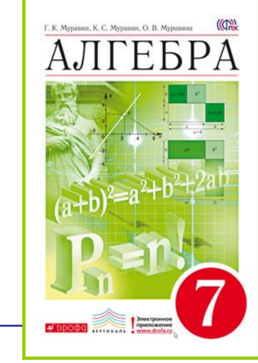
$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n! \quad 1! = 0! = 1$$

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

При решении комбинаторных задач сначала необходимо понять, о каких, упорядоченных или неупорядоченных комбинациях идет речь в задаче. Это предполагает предварительный фронтальный анализ задачного массива. В отличие от устной работы на первом этапе, здесь ученики, сначала записывают свой вариант в тетрадь, и только затем поднимают зеленую карточку готовности. Принцип разделения трудностей, один из главных принципов нашего УМК, требует разделения идейного и технического компонентов деятельности. После того как получен ответ в обозначениях, сами вычисления, если они трудоемки или не проводятся или переносятся в домашнюю работу.

Обсуждение задач 7 класса



Решите по правилу произведения задачи.

1. 1) Четверо учеников сдают экзамен по математике. Сколько есть вариантов установить очерёдность вызова первых трёх из них к экзаменатору?

2) Сколькими способами из 30 учеников класса можно выбрать старосту, ответственного за спорт и редактора стенгазеты, если это должны быть разные ученики? Объясните, почему в данных задачах мы имеем дело с размещениями.

2. Сколько стран могут использовать для своего государственного флага три горизонтальные полосы одинаковой ширины и разных цветов: белого, красного, синего и жёлтого?

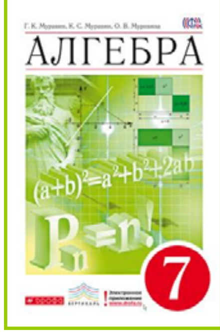
3. В списке учеников 7 класса 26 человек, из них 12 девочек, а остальные — мальчики.

1) Сколькими способами можно назначить трёх дежурных: двух мальчиков и девочку?

2) Сколькими способами можно набрать в футбольную команду 11 мальчиков?

3) Решить задачу 2) при условии, что Петю Иванова обязательно следует включить в команду.

Обсуждение задач 7 класса



4. Из мешка для русского лото, в котором содержатся деревянные бочонки, помеченные числами от 1 до 99, вынимают по одному бочонку.
1) Сколько существует способов вытащить первый и второй бочонки так, чтобы сумма чисел на них оказалась равной 100?
2) Какова вероятность этого события?
3) Какова вероятность, что на первом же вынутом бочонке будет простое число?
4) Какова вероятность, что число на первом же вынутом бочонке будет кратно 5?

Решите задачи по формуле сочетаний.

5. 1) Сколькими способами читатель может выбрать 3 книги из 7 предложенных?
2) Сколько имеется вариантов назначения трёх дежурных из 25 учеников класса?
3) Объясните, в чём особенность задач, которые решаются по формуле сочетаний.

6. В шахматном турнире принимают участие 10 шахматистов. Сколько будет сыграно партий, если каждая пара участников играет между собой один раз?

Обсуждение задач 7 класса

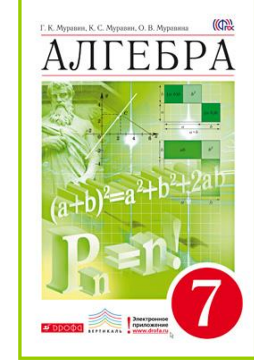
7. Из 25 вопросов к экзамену Сергей выучил 20. Какова вероятность, что Сергей получит:
1) пятёрку на экзамене, если в билете 3 вопроса;
2) четвёрку на экзамене, если четвёрку выставляют за два правильных ответа?

8. Каждую секунду точка M передвигается по координатной плоскости на 1 единицу вправо или на 1 единицу вверх, причём оба направления равновероятны. Стартует точка M из начала координат.
1) Найдите вероятность того, что через 5 с точка M окажется в точке:
а) $A(0; 5)$; б) $B(4; 1)$.
2) Где с наибольшей вероятностью окажется точка M через 5 с?
3) Чему эта вероятность равна?
4) С какой вероятностью точка M через 7 с попадёт в точку (3;4)?

9. В коробке лежат три чёрных и четыре белых бильярдных шара. Из неё наугад вынимают два шара. Какова вероятность, что: а) оба шара окажутся чёрными; б) оба шара окажутся белыми; в) шары будут разного цвета?

10. Коля, Саша, Алла и Маша должны сдавать зачёт по математике. Учитель усаживает их по двое за первые две парты в левом ряду.
1) Найдите число возможных вариантов рассадки учеников.
2) С какой вероятностью Коля и Саша окажутся за одной партой?

Обсуждение задач 7 класса



11. Сколько существует: а) двузначных чисел, записанных чётными цифрами; б) трёхзначных чисел, кратных 5; в) четырёхзначных чисел, оканчивающихся нулём; г) пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

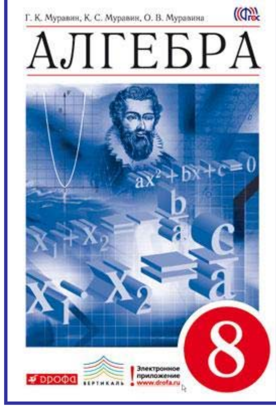
12. Сколько различных автомобильных номеров может быть выдано, если номер состоит из трёх русских букв (начертание каждой из которых совпадает с начертанием соответствующей буквы латинского алфавита) и четырёх цифр?

13. Одна из клеток квадрата для игры в «Морской бой» окрашивается в красный цвет, две — в зелёный и три — в синий.

1) Сколько при этом возможно комбинаций?

2)* Сколькими способами можно расставить два одноклеточных корабля в квадрате игры в «Морской бой»?

Обсуждение задач 8 класса

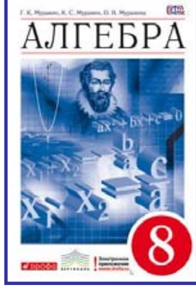


Пример 4. На книжную полку случайным образом ставят десять книг, среди которых две книги А. Дюма «Три мушкетёра» и «20 лет спустя». Найти вероятность того, что эти книги окажутся рядом.

Решение. Книги расставляют случайным образом, значит, все $P_{10} = 10!$ возможных расстановок книг на полке равновероятны.

Будем теперь искать число благоприятных исходов, в которых книги Дюма окажутся рядом. Нам совершенно не важно, какую книгу взяли первой, чтобы поставить на полку, а какую — последней. Представим себе, что, когда дошла очередь до книги «Три мушкетёра», остальные 9 книг уже стояли на полке. Разместить там эти 9 книг можно было $P_9 = 9!$ способами. В каждом из них книгу «Три мушкетёра» можно поставить либо слева, либо справа от книги «20 лет спустя». По правилу произведения получаем $9! \cdot 2$ благоприятных исходов. Теперь можно найти вероятность того, что книги А. Дюма окажутся рядом: $\frac{1}{5}$.

Обсуждение задач 8 класса



14. Какова вероятность того, что карта, наугад вытащенная из карточной колоды, в которой 36 карт, окажется: 1) червой; 2) картинкой; 3) валетом или королём?

15. Какова вероятность того, что число очков, выпавших при бросании игральной кости, окажется: 1) больше 2; простым числом; 3) числом, кратным 3?

16. В автобусе 20 мест.

1) Сколькими способами: а) могут занять места три пассажира в этом автобусе; б) можно рассадить 20 пассажиров в этом автобусе?

2) С какой вероятностью при случайной рассадке в автобусе Саша и Коля окажутся соседями, если в автобусе сдвоенные сиденья?

17. 11 мальчиков случайным образом выстраиваются в шеренгу. С какой вероятностью Коля и Саша окажутся соседями?

Сколькими способами 6 мальчиков можно разделить:

а) на две равные по численности группы;

б) на группы, в одной из которых 2, а в другой 4 мальчика?

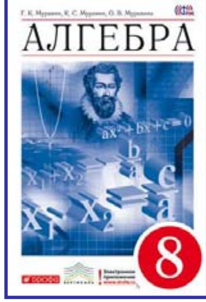
18. Из колоды в 36 карт случайным образом берётся сначала одна карта, а затем – другая. Какова при этом вероятность того, что:

а) обе карты одной масти;

б) обе карты одного достоинства;

в) вторая карта «старше» первой?

Обсуждение задач 8 класса



19. Из колоды в 36 карт случайным образом вынимают 6 карт. Найдите вероятность того, что среди этих 6 карт будет:
1) только один туз; 2) хотя бы один туз; 3) все четыре туза.

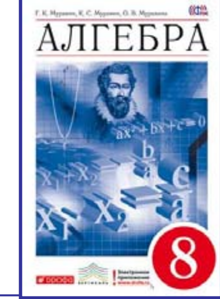
20. 25 учеников класса разыгрывают между собой 15 билетов в театр. Найдите вероятность того, что:
1) Коле достанется билет;
2) Коле и Саше достанутся билеты;
3) ни Коле, ни Саше билетов не достанется.

Некоторые задачи используют геометрические сюжеты

ЕГЭ: Сколько существует точек пересечения диагоналей выпуклого семнадцатиугольника, если никакие три из диагоналей не пересекаются в одной и той же точке?

ЕГЭ: На окружности отметили 5 точек. Наугад взяты 2 пары точек (у пар нет общих точек), которые соединены хордами. Найти вероятность того, что хорды не пересекаются. (В ответе указать вероятность, умноженную на 15.)

Геометрическое определение вероятности



Геометрическое определение вероятности применяется, когда все элементарные равновероятные исходы можно изобразить точками некоторой фигуры F так, что вероятность попадания точки в любую часть A фигуры F пропорциональна мере (длине, площади, объёму) A. В этом случае вероятность события A находится, как отношение меры A к мере F.

Задача 1. В квадрат вписан круг. Какова вероятность того, что случайным образом выбранная точка квадрата окажется внутри круга?

Решение.

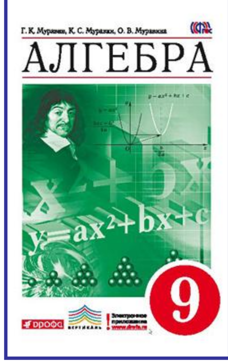
$S_A = \pi R^2$, $S_F = (2R)^2$. $P(A) = \frac{\pi R^2}{(2R)^2} = \frac{\pi}{4}$. Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Задача 2. На плоскость, разделённую параллельными полосами шириной 20 см (расстояние между осевыми линиями полос равно 50 см), случайным образом брошен круг радиуса 5 см. Какова вероятность того, что круг пересечёт какую-нибудь из границ полос?

Решение.

Расстояние между соседними полосами 30 см. Окружность не пересечет границ, если центр круга окажется не ближе 5 см от них. Для этого есть 10 см внутри полосы и 20 см вне полосы. Всего 30 см из 50 см. Ответ: $\frac{3}{5}$.

Статистическая вероятность в 9 классе



Статистическая вероятность *появляется в нашем курсе, когда оказывается бессильной классическая схема.*

За вероятность случайного события можно принять его частоту, когда число испытаний достаточно велико.

Мы остановимся на переходе от частоты к вероятности и обратно, что может облегчить решение задач.

Задача 1. Из коробки, в которой лежат 10 шаров, наугад вынимают один шар, затем кладут его обратно в коробку и перемешивают шары. Этот эксперимент проделали 100 раз, и в результате 72 раза был вытащен белый, а 28 раз чёрный шар. Выскажите наиболее вероятную гипотезу о числе чёрных шаров в коробке.

Задача 2. При контрольной оценке всхожести зёрен пшеницы из 1000 зёрен 27 оказались невсхожими. Какова вероятность, что наугад взятое зерно из этой же партии окажется всхожим?

Решение.

Частота всхожести (1000 – 27) : 1000 = 0,973. Ответ: 0,973.

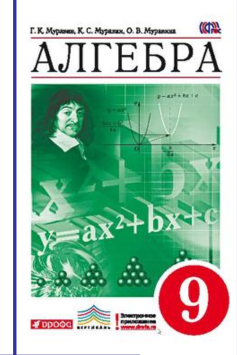
Обсуждение заданий из ЕГЭ

1. Вероятность, что блендер прослужит больше года 92%, а что больше 2 лет – 83%. Какова вероятность, что в течение второго года блендер сломается?
Решение. Будем считать, что купили 100 блендеров. После первого года из сотни купленных блендеров осталось 92, а за второй год из строя вышли еще 92 – 83 = 9. Искомая вероятность равна 0,09. Ответ: 0,92.

2. По статистическим данным вероятность того, что телефон марки “Sumsung”, купленный в магазине “Евросеть”, прослужит больше 4 лет, равна 0,83. Вероятность того, что он прослужит больше 5 лет, равна 0,66. Найдите вероятность того, что телефон данной марки выйдет из строя в течение пятого года эксплуатации.

3. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая – 55%. Первая фабрика выпускает 2% бракованных стекол, а вторая – 3%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.
Решение. Пусть первая фабрика выпускает 4500, а вторая 5500 стекол. Тогда брака на первой фабрике 90, а на второй 165 стекол. (90 + 165) : (4500 + 5500) = 0,0255.
Ответ: 0,0255.

Вероятность в 9 классе



В 9 классе настает время познакомиться с рядом важных понятий: условной вероятностью, произведением и суммой событий, противоположным событием, несовместными и независимыми событиями. Напомним их.

Событие, которое заключается в том, что произойдёт и событие A, и событие B, записывают AB и называют *произведением событий* A и B.

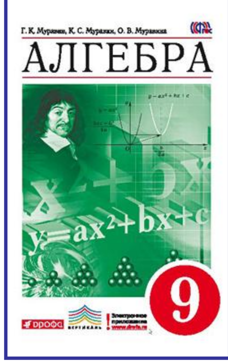
Событие, которое заключается в том, что произойдет хотя бы одно из событий A или B называют их суммой

Вероятность события B при условии, что произошло событие A, обозначается $P(B/A)$ и называется ***условной вероятностью.***

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Обсуждение задач 9 класса



Некоторые задачи иногда можно упростить, разбивая искомое событие на сумму или произведение более простых событий.

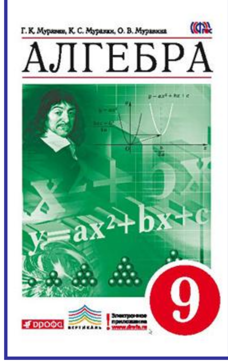
21. 1) Сколькими способами: а) могут занять места три пассажира в этом автобусе; б) можно рассадить 20 пассажиров в этом автобусе?
2) С какой вероятностью при случайной рассадке в автобусе Саша и Коля окажутся соседями, если в автобусе сдвоенные сиденья?
Решение. Первым в автобусе место занимает Саша, вторым Коля.
Вероятность, что Саша займёт какое-нибудь место, равна 1, а что Коля займет место рядом с ним – $\frac{19}{20}$.

$$P(CK) = P(C)\cdot P(K/C) = 1\cdot\frac{19}{20} = \frac{19}{20}.$$

22. 11 мальчиков случайным образом выстраиваются в шеренгу. С какой вероятностью Коля и Саша окажутся соседями?

$$P(CK) = P(C)\cdot P(K/C) = 1\cdot\frac{2}{11} = \frac{2}{11}.$$

Обсуждение задач 9 класса



Если события A и B вместе произойти не могут – это несовместные события. Вероятность их произведения равна 0.

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Событие, которое заключается в том, что событие A не произойдет, называют противоположным событию A. Его вероятность

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

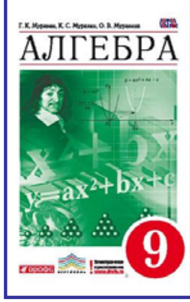
Если при выполнении события A вероятность B не изменяется, то эти события независимые, и

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Задача ОГЭ. Стрелок 3 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок первые 2 раза попал в мишени, а последний раз промахнулся.

Решение. Разбиваем на три независимых события, и находим вероятность их произведения $P = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot (1 - 0{,}6) = 0{,}144$. Ответ: 0,144.

Обсуждение задач 9 класса



Есть много задач, в которых проще находить вероятность противоположного события. Обычно в них речь идет о выполнении или наличии ***хотя бы чего-то одного.***

23. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трёх орудий таковы: $p_1 = 0{,}8$, $p_2 = 0{,}7$, $p_3, = 0{,}9$. Найдите вероятность хотя бы одного попадания при одном залпе из всех орудий.

Решение. Р = 1 – (1 – 0,8)(1 – 0,7)(1 – 0,9) = 1 – 0,006 = 0,994.

Ответ: 0,994.

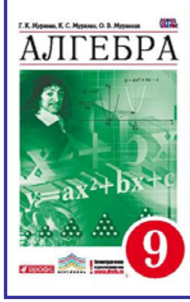
24. Вероятность попадания в цель у первого стрелка равна 0,8, у второго — 0,9. Стрелки делают по выстрелу. Найдите вероятность: 1) двойного попадания; 2) хотя бы одного попадания; 3) одного попадания.

25. При артиллерийской стрельбе автоматическая система делает выстрел по цели. Если промах, то система делает повторный выстрел. Выстрелы повторяются до тех пор, пока цель не будет уничтожена. Вероятность уничтожения некоторой цели при первом выстреле равна 0,3, при втором выстреле – 0,4, а при каждом последующем – 0,6. Сколько выстрелов потребуется для того, чтобы вероятность уничтожения цели была не менее 0,95?

Решение. $P(n$ промахов$) < 0{,}05$. $\quad 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot (0{,}4)^{n-2} < 0{,}05$, $n = 5$.

Ответ: 5 выстрелов.

Обсуждение задач 9 класса



26. Из урны с белыми, чёрными и синими шарами извлекают один шар. Событие A означает появление белого шара, событие B — появление чёрного шара. Что означает событие: 1) AB; 2) $A + B$?

27. На игральной кости грани с 1, 2 и 3 очками окрашены в белый цвет, а грани с 4, 5 и 6 — в чёрный.

1) Какова вероятность того, что выпадет чётное число очков, если выпадет чёрная грань?

2) Какова вероятность того, что выпадет чёрная грань, если выпадет чётное число очков?

28. В первом ящике 1 белый и 5 чёрных шаров, во втором 8 белых и 4 чёрных шара. Из каждого ящика случайным образом вынимают по шару. Найдите вероятность того, что шары окажутся разными по цвету.

29. Два измерительных прибора работают независимо. Вероятность выхода из строя первого прибора равна 0,3, а вероятность выхода из строя второго прибора равна 0,4. Найдите вероятность того, что: а) оба прибора выйдут из строя; б) хотя бы один из приборов выйдет из строя; в) ни один из приборов не выйдет из строя.

30. Издательство отправило учебники в три школы. Вероятность своевременной доставки учебников в первую школу равна 0,7, во вторую — 0,8, в третью — 0,9. Найдите вероятности следующих событий:

а) ни одна из этих школ не получит учебники вовремя;

б) только одна из этих школ получит учебники вовремя;

в) хотя бы одна из этих школ получит учебники вовремя.

Обсуждение задач 9 класса

31. Стрельбу в цель ведут 10 солдат. Для пяти из них вероятность попадания равна 0,6, для трёх — 0,5, а для остальных — 0,4. Какова вероятность поражения цели?

32. Известно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин — дальтоники. Наугад выбранное лицо оказалось дальтоником. Какова вероятность, что это мужчина? (Считать, что количество мужчин и женщин одинаково.)

Решение. Из 10 000 человек дальтоников будет 500 + 25 = 525 (ч.). Вероятность, что это мужчина $\frac{500}{525} = \frac{20}{21}$. Ответ: $\frac{20}{21}$.

33. 10 солдат по одному разу стреляют в одну и ту же мишень. У пяти из них вероятность попадания в мишень равна 0,6, у двух — 0,5, а у остальных — 0,3. Найдите математическое ожидание числа попаданий в мишень.

Решение. $5 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}3 = 4{,}9$. Ответ: 4,9.

34. Играющему в «Поле чудес» предлагают выбрать из трёх ящичков один, в котором лежит приз. После того как играющий сделал свой выбор, ведущий, который знает, в каком ящичке находится приз, показывает, что один из оставшихся двух ящичков пустой. Играющему предоставляется возможность изменить свой первоначальный выбор. Следует ли ему воспользоваться этой возможностью?

Задача ЕГЭ. Вероятность, что два случайно взятых лотерейных билета окажутся выигрышными, составляет 0,04. Какова вероятность, что хотя бы один из двух билетов окажется выигрышным?

ОБЪЕДИНЕННАЯ ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА дрофа вентана граф

Благодарим за внимание!

Контакты для связи:

olgamuravina@gmail.com

muravins.ru

http://drofa-ventana.ru