ОБЪЕДИНЕННАЯ ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА дрофа вентана граф

Задания с параметрами в УМК по математике для 5-11 классов Г.К.Муравина, О.В.Муравиной

Г.К.Муравин, кандидат педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математического образования Института развития образовательных технологий, автор УМК по математике для 1–11 классов

25 мая 2017

УМК по математике для 5-11 классов

Книга доступна в форме:

Печатная Электронная

615 ₽

каждая 4-я книга за 1 рубль
*кроме предзаказов

Купить в магазине издательской группы

639 ₽ есть в наличии Купить в Ozon

Загрузить электронное приложение

Нашли ошибку в учебнике?

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Углубленный уровень. Учебник

Описание Методическая помощь

Книга доступна в форме:

Печатная Электронная

149 ₽ есть в наличии

Купить в LECTA

149 ₽ есть в наличии Купить в .pdf в Litres

Загрузить электронное приложение

Нашли ошибку в учебнике?

Автор	Муравин Г.К., Муравина О.В.
Серия	Линия УМК Г. К. Муравина. Алгебра и начала математического анализа (10-11) (углуб.)
ISBN	978-5-358-15263-2

18. Задания с параметрами

В большинстве уравнений и неравенств буквами обозначены переменные. Однако бывают случаи, когда буквами заменяют конкретные числа и решают уравнение или неравенство в общем виде. Так, например, решение квадратного уравнения в общем виде привело к формуле корней. В записи общего вида квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ буквами a, b и c заменены все числовые коэффициенты и свободный член квадратного трёхчлена, но возможна и замена отдельных чисел.

Буквы, заменяющие в уравнении или неравенстве конкретные числовые данные, называют ***параметрами***.

Задания с параметрами в 5-6 классах

Со времён Декарта параметры обычно обозначают первыми (a, b, c), а переменные — последними (x, y, z) буквами латинского алфавита. Это позволяет во многих случаях не указывать, какой буквой обозначен параметр, а какой — переменная.

Решая уравнение или неравенство с параметрами, для любых допустимых значений параметров указывают, какими будут его решения.

Задания с параметрами начинают встречаться школьникам уже в 5–6 классах, где, например, им предлагают выразить из равенства одну из переменных через другие, или, выполнить следующее задание.

Задание для 6 класса. При каких значениях a верно неравенство $|a - 6| > |a|$?

Решение. Число $a - 6$ расположено на координатной прямой на 6 единиц левее числа a. Поскольку модуль числа – это расстояние от него до нуля, нуль должен быть ближе к a. Изобразив на координатной оси данные числа, находим, что 0 должен быть правее, чем середина отрезка, соединяющего данные числа, т.е. $0 > a - 3$. Ответ: $a < 3$.

Задания с параметрами в 7–9 классах

- В 7 классе исследуются линейные уравнения с одним неизвестным, системы линейных уравнений с двумя неизвестными, линейная функция и ее график.
- В 8 классе, рассматриваются квадратные уравнения, но, по-настоящему, с идеологией решения заданий с параметрами ученики могут встретиться (но могут и не встретиться) в 9 классе исследуя квадратный трехчлен вместе с его графиком.
- Рассмотрим несколько примеров из нашего учебника для 9 класса.

Пример 1. При каких значениях a один корень уравнения $2x^2 - 2(a-1)x + a^2 - 3a - 10 = 0$ больше 3, а другой меньше 3?

Р е ш е н и е. Число 3 должно располагаться на координатной прямой между корнями квадратного трёхчлена

$$f(x) = 2x^2 - 2(a-1)x + a^2 - 3a - 10.$$

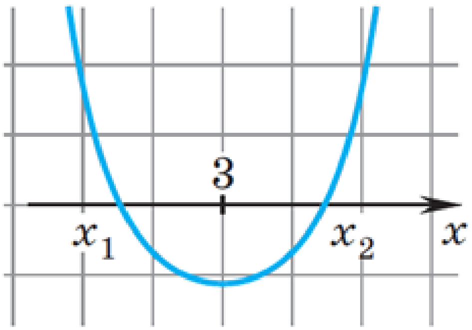


Рис. 59

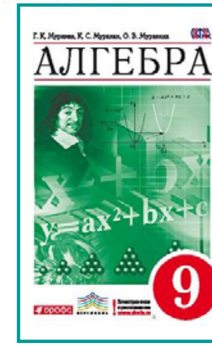
Поскольку старший коэффициент квадратного трёхчлена положителен, ветви соответствующей параболы направлены вверх и она должна пересекать ось абсцисс слева и справа от точки $x = 3$ (рис. 59). При этом значение трёхчлена в точке $x = 3$ должно быть отрицательным. Другими словами, число 3 будет расположено между корнями трёхчлена тогда и только тогда, когда $f(3) < 0$, т. е.

$$2 \cdot 3^2 - 2(a-1) \cdot 3 + a^2 - 3a - 10 < 0.$$

Решив это квадратное неравенство, найдём искомые значения a. $a^2 - 9a + 14 < 0$, $2 < a < 7$.

О т в е т: $2 < a < 7$.

Пример 2. Найти все значения a, при которых уравнение $2x - (a + 4)\sqrt{x - 3} + a + 10 = 0$ имеет единственный корень.



Р е ш е н и е. Обозначим $\sqrt{x - 3}$ буквой z, тогда

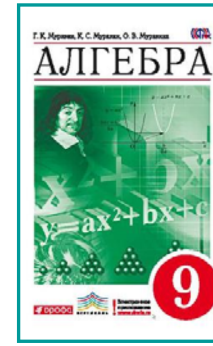
$$x - 3 = z^2 \text{ и } x = z^2 + 3.$$

Уравнение принимает вид

$$2(z^2 + 3) - (a + 4)z + a + 10 = 0,\ 2z^2 - (a + 4)z + a + 16 = 0.$$

Заметим, что каждому неотрицательному значению z соответствует единственное значение x, а отрицательные значения z не удовлетворяют *условию введения переменной* z. Поэтому исходное уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда уравнение, полученное нами с помощью подстановки, имеет *единственный неотрицательный корень*.

Таким образом, ответ на вопрос задачи складывается из тех значений a, при которых уравнение



$$2z^2 - (a+4)z + a + 16 = 0$$

имеет:

1) *единственный корень* при условии, что он является неотрицательным числом;

2) *корни разных знаков*;

3) *один корень, равный нулю* при условии, что второй корень меньше нуля.

Рассмотрим эти три случая.

1) Единственный корень квадратное уравнение имеет тогда, когда его дискриминант равен нулю.

$$(a+4)^2 - 4 \cdot 2(a+16) = 0, \quad a^2 + 16 + 8a - 8a - 8 \cdot 16 = 0,$$

$$a^2 = 7 \cdot 16, \quad a_{1;\,2} = \pm 4\sqrt{7}.$$

При каждом из этих значений a корень уравнения равен $\frac{a+4}{4}$. Это число положительно при $a = 4\sqrt{7}$ и отрицательно при $a = -4\sqrt{7}$. Таким образом, условию первого случая соответствует только одно значение a, равное $4\sqrt{7}$.

2) Когда корни имеют разные знаки, их произведение отрицательно. Поскольку старший коэффициент уравнения положителен, по формуле Виета имеем $a + 16 < 0$. Значит, $a < -16$.

3) Уравнение имеет корень, $x_1 = 0$ при $a + 16 = 0$, $a = -16$. При этом значении a второй корень уравнения найдём по формуле Виета: $x_1 + x_2 = \frac{a+4}{2}$, $x_2 = \frac{-16+4}{2} = -6$. Ненулевой корень уравнения отрицателен, что соответствует условию рассматриваемого случая.

Объединим найденные значения a и запишем их в ответ.

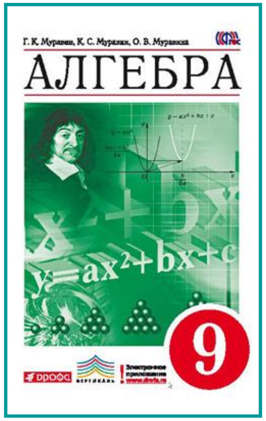
Ответ: $a = 4\sqrt{7}$, $a \leqslant -16$.

Пример 3. Найти все значения a, при которых любое число из промежутка $[1; 3]$ является решением неравенства $x^2 + 3ax - 2a > 0$.

Решение. Как и во многих задачах, связанных с квадратным трёхчленом, удобно отдельно рассмотреть два случая: 1) $D < 0$; 2) $D \geqslant 0$.

1) Когда дискриминант отрицателен, все точки параболы $f(x) = x^2 + 3ax - 2a$ расположены в верхней полуплоскости. Значит, все числа, и в частности числа отрезка $[1; 3]$, являются решениями неравенства $x^2 + 3ax - 2a > 0$.

$$D = 9a^2 + 8a = a(9a + 8),$$
$$D < 0:\ a(9a + 8) < 0,$$
$$-\frac{8}{9} < a < 0.$$



2) Когда дискриминант больше или равен нулю, одна из двух ветвей параболы должна располагаться над отрезком

[1; 3] оси абсцисс (рис. 60). Из рисунка видно, что если вершина параболы расположена слева от этого отрезка, то значение трёхчлена должно быть положительным при $x = 1$, а если справа, то при $x = 3$.

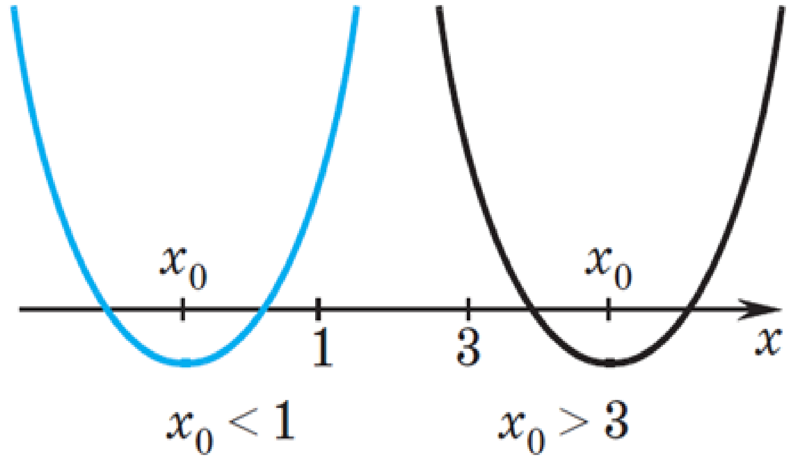
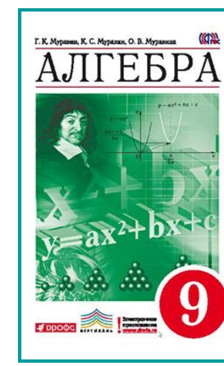


Рис. 60

Обозначив абсциссу вершины параболы буквой x_0, получим

$$\begin{cases} x_0 < 1, \\ f(1) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_0 > 3, \\ f(3) > 0. \end{cases}$$



Подставим в эти системы $f(1) = 1 + 3a - 2a = 1 + a$, $f(3) = 3^2 + 9a - 2a = 9 + 7a$ и $x_0 = \dfrac{-3a}{2}$:

Пример 3. Найти все значения a, при которых любое число из промежутка $[1;\ 3]$ является решением неравенства $x^2 + 3ax - 2a > 0$.

Решение.

$$\begin{cases} \dfrac{-3a}{2} < 1, \\ 1 + a > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \dfrac{-3a}{2} > 3, \\ 9 + 7a > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > -\dfrac{2}{3}, \\ a > -1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a < -2, \\ a > -\dfrac{9}{7}; \end{cases}$$

$$a > -\frac{2}{3}.$$

Остаётся объединить значения a, найденные нами при рассмотрении обоих случаев. Отметим их на координатной прямой (рис. 61).

Теперь легко записать ответ.

Ответ: $a > -\dfrac{8}{9}$.

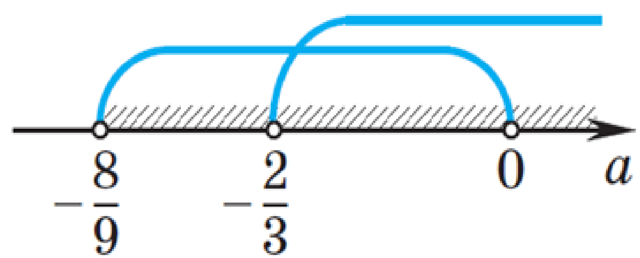
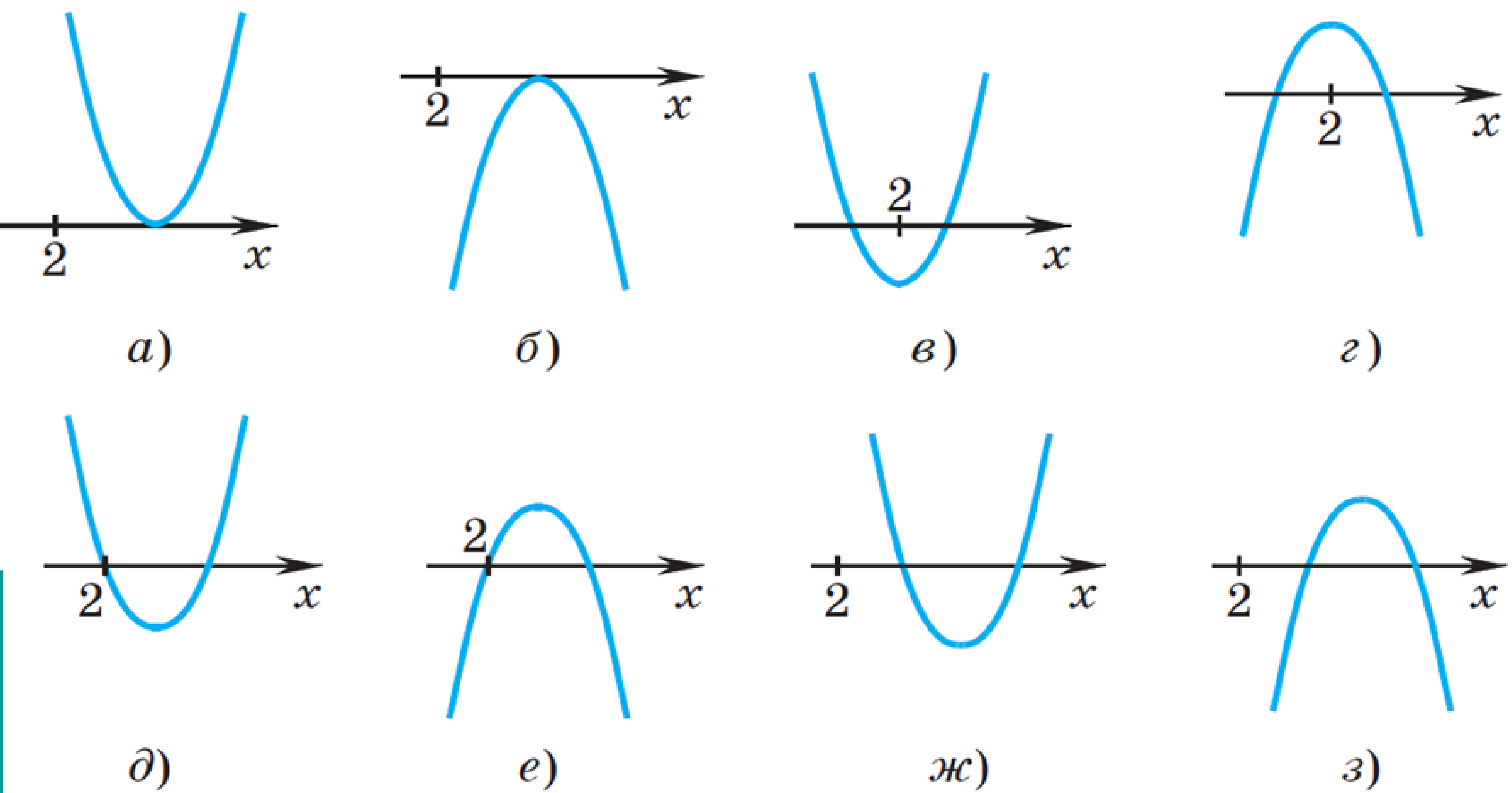


Рис. 61

Приведу одно из заданий учебника, которое прекрасно закрепляет основные свойства квадратного трехчлена и напрашивается, чтобы его спроектировали на доску и работали с ним фронтально. В процессе фронтальной работы полезно использовать сигнальные карточки.

227. По графику функции $y = f(x)$, изображённому на рисунке 62, сформулируйте свойства, связанные с числом 2, которыми обладает квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Задания с параметром в 10 классе

В 10 классе задания с параметрами, в основном, связаны с новыми функциями. Следующее задание предполагает графическое решение на клетчатой бумаге.

68.* Найдите все значения k такие, что уравнение:

1) $kx - 1 = [x]$; 2) $kx - 1 = \{x\}$ имеет ровно:

а) два положительных корня; б) два отрицательных корня; в) два корня.

При повторении квадратичной функции восстанавливаются рассмотренные в 9 классе идеи:

76. Определите знак числа a, если известно, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней и $a - b + c > 0$.

77. Найдите все значения a, при которых:

1) один корень уравнения $x^2 - 2x + a = 0$ больше, а другой меньше, чем a;

2) уравнение $x^2 - ax + a - 1 = 0$ имеет единственный положительный корень.

При работе с корнями четной степени необходимо введение требования неотрицательности.

133. Найдите все значения a, при которых уравнение имеет единственный корень:

1) $\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}+4\sqrt[6]{x+\sqrt{x}}+a=0$;

2) $2z+\sqrt[4]{z}-3\sqrt{2z+\sqrt[4]{z}+1}+a+1=0$.

Квадратный трехчлен относительно показательной функции предъявляет к своим корням требование положительности.

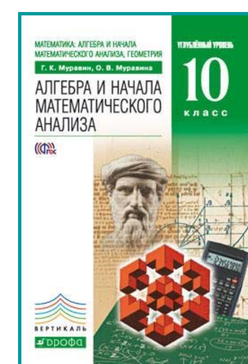
173. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$4^x-a\cdot 2^x+a-1=0:$$

1) имеет два корня;

2) не имеет корней;

3) имеет единственный корень.



187. Найдите все значения a, при которых уравнение $\log_2(4^x - a) - x = 0$ имеет:

1) единственный корень; 2) два корня.

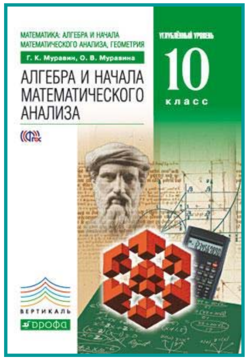
Рассматривается квадратный трехчлен от sin или cos на промежутке.

316*. Найдите все значения a, при которых определённая на интервале $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$ функция:

1) $y = \sin^2 x - 2a \sin x - 7$;

2) $y = \cos^2 x - 2a \cos x - 7$

принимает своё наименьшее значение.



При повторении преобразований графиков в конце 10 класса можно предложить следующую задачу.

523. 1) Найдите все значения a, при которых уравнение $|4 + 2|x| - x^2| = a$ имеет:

а) 2 корня; б) 4 корня; в) 5 корней; г) 6 корней.

2) При каких значениях a уравнение не имеет корней?

В 11 классе задачам с параметрами выделен целый пункт главе 5, но они встречаются и в процессе изучения материала.

141. При каком значении a число 2 является:

1) точкой минимума;

2) точкой максимума функции:

а) $y = (2x - a)^6 (x + a)^4$;

б) $y = (x - a)^6 (x - 1)^3$;

в) $y = (2x - a)^3 (x + a)^4$;

г) $y = (5x - a)^3 (x + a)^5$?

Решение.

141. 1) а) Найдём критические точки функции.

$y' = ((2x - a)^6 (x + a)^4)' = 12(2x - a)^5 (x + a)^4 + 4(2x - a)^6 \times$ $\times (x + a)^3 = 4(2x - a)^5 (x + a)^3 (3(x + a) + 2x - a) = 4(2x - a)^5 \times$ $\times (x + a)^3 (5x + 2a)$. $y' = 0$ при $x_1 = -a$, $x_2 = -0{,}4a$, $x_3 = 0{,}5a$. При переходе через точки x_1 и x_3 производная меняет знак с «минуса» на «плюс», значит, эти точки — точки минимума. Имеем: $2 = -a$ или $2 = 0{,}5a$. $a = -2$, $a = 4$.

Впрочем, задание а) можно решить устно из графических соображений.

В главе «Первообразная и интеграл» можно найти одну из моих любимых задач.

274. При каком значении k площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x - 3$ и прямой $y = kx + 1$, будет наименьшей?

274. Вблизи точек пересечения с прямой парабола сливается с касательными. С учётом этого задача становится совершенно аналогичной задаче 190 из п. 10 об отсечении треугольника наименьшей площади от угла. Если точка $A(0;\ 1)$ не является серединой отрезка секущей, заключённого внутри параболы, то секущую можно немного повернуть так, чтобы площадь отсекаемой фигуры уменьшилась, а значит, в этом случае площадь не минимальна. Таким образом, точка A должна быть серединой соответствующего отрезка (рис. 154).

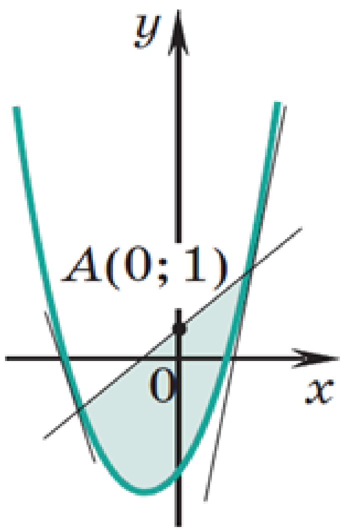


Рис. 154

Отсюда следует, что абсциссы точек пересечения должны быть противоположны. Значит, сумма корней соответствующего квадратного уравнения должна быть равна нулю.

$$x^2 + 2x - 3 = 1 + kx,\ x^2 - (k - 2)x - 4 = 0.$$

При этом по теореме Виета $k - 2 = 0$, $k = 2$.

Перейдем теперь в пункт «Задания с параметрами» (п.18) в 11 классе.

Пример 1. Решить неравенство $ax^2 - 2x + 1 < 0$.

Решение. В этом неравенстве один параметр a, который может принимать любые значения.

Если $a = 0$, имеем линейное неравенство $-2x + 1 < 0$, решение которого: $x > 0{,}5$.

Если $a \neq 0$ — неравенство квадратное.

Его дискриминант $1 - a$ положителен при $a < 1$, равен нулю при $a = 1$ и отрицателен при $a > 1$.

При решении квадратных неравенств важен знак старшего коэффициента квадратного трёхчлена. Поэтому случай $a < 1$ нужно разбить на $a < 0$ и $0 < a < 1$.

1. Если $a < 0$, то решениями неравенства являются все числа, меньшие меньшего, и все числа, большие большего корня квадратного трёхчлена $ax^2 - 2x + 1$:

$$x < \frac{1 + \sqrt{1 - a}}{a} \quad \text{или} \quad x > \frac{1 - \sqrt{1 - a}}{a}.$$

Пример 1. Решить неравенство $ax^2 - 2x + 1 < 0$.

2. Если $0 < a < 1$, то решения неравенства расположены между корнями: $\dfrac{1-\sqrt{1-a}}{a} < x < \dfrac{1+\sqrt{1-a}}{a}$.

3. Если $a = 1$ — неравенство не имеет решений.

4. Если $a > 1$ — неравенство не имеет решений.

В ответе указываются все рассмотренные случаи.

Ответ: если $a = 0$, то $x > 0{,}5$;

если $a < 0$, то $x < \dfrac{1+\sqrt{1-a}}{a}$ или $x > \dfrac{1-\sqrt{1-a}}{a}$;

если $0 < a < 1$, то $\dfrac{1-\sqrt{1-a}}{a} < x < \dfrac{1+\sqrt{1-a}}{a}$;

если $a \geqslant 1$, то нет решений.

Пример 3. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{3x-2} = x + a$ имеет единственный корень.

Решение 1. Обозначим $\sqrt{3x-2} = y$, тогда $3x - 2 = y^2$ и $x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)$. Получим:

$$y = \frac{1}{3}(y^2 + 2) + a,\ y^2 - 3y + 2 + 3a = 0.$$

Исходное уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда уравнение $y^2 - 3y + 2 + 3a = 0$ имеет единственный неотрицательный корень. Это возможно в трёх случаях: 1) когда единственный корень уравнения неотрицателен; 2) когда корни имеют разные знаки; 3) когда один корень равен нулю, а второй отрицателен.

Рассмотрим эти случаи.

Пример 3. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{3x-2} = x + a$ имеет единственный корень.

1. Единственный корень ($D = 0$): $9 - 4(2 + 3a) = 0$, $a = \frac{1}{12}$. При этом значении a единственный корень уравнения равен $\frac{3}{2}$ (положителен).

2. Корни разных знаков: $2 + 3a < 0$, $a < -\frac{2}{3}$.

3. Один из корней равен нулю: $2 + 3a = 0$, $a = -\frac{2}{3}$. При этом значении a второй корень равен 3 (положителен). Значит, в этом случае уравнение имеет два корня, что не соответствует заданию.

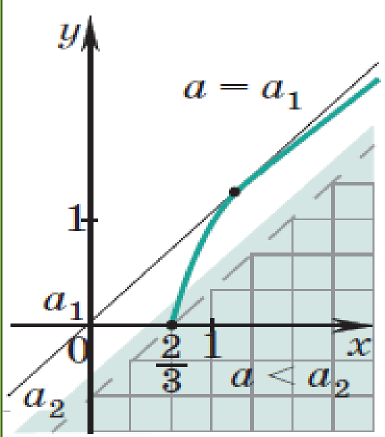


Рис. 108

Решение 2. График функции $y = \sqrt{3x-2}$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ сдвигом вправо на 2 с последующим сжатием к оси ординат в 3 раза.

Графиком функции $y = x + a$ при любом a является прямая, параллельная прямой $y = x$ (рис. 108).

Из рисунка видно, что графики имеют единственную общую точку при $a = a_1$ (касание графиков) и при $a < a_2$.

Пример 4. При каких значениях a имеет четыре корня уравнение $x^2 - a = 2|x|$?

Р е ш е н и е 1. Перепишем данное уравнение иначе:

$$x^2 - 2|x| + 1 = a + 1, \; (|x| - 1)^2 = a + 1.$$

Левая часть уравнения задаёт функцию, график которой получается из параболы $y = x^2$ сдвигом на 1 вправо и симметрией точек графика, расположенных в правой полуплоскости относительно оси ординат. Правой части уравнения соответствует прямая, перпендикулярная оси ординат и пересекающая её в точке $a + 1$.

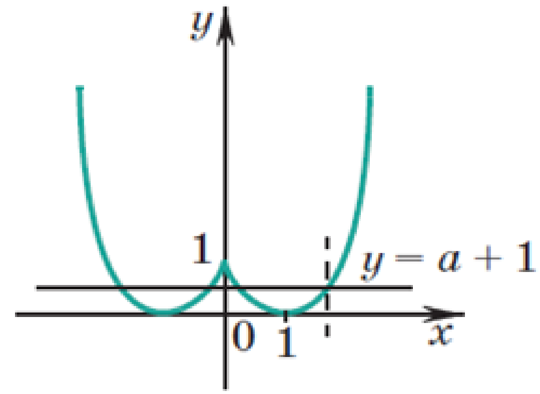


Рис. 109

На рисунке 109 видно, что графики имеют четыре общие точки, если прямая $y = a + 1$ пересекает ось ординат между 0 и 1.

Значит, $0 < a + 1 < 1$, $-1 < a < 0$.

Р е ш е н и е 2. Обозначим $|x| = y$. Искомые значения a соответствуют случаю двух положительных корней уравнения $y^2 - 2y - a = 0$. Значит, меньший корень этого уравнения должен быть больше нуля:

$$1 - \sqrt{1 + a} > 0, \; \sqrt{1 + a} < 1, \; 0 < 1 + a < 1, \; -1 < a < 0.$$

Пример 5. Найти все значения параметра a, при которых решением неравенства $\sqrt{5-x} + \sqrt{x^2 - 2ax + a^2} \leqslant 2$ является отрезок.

Р е ш е н и е. Перепишем неравенство, попутно упростив его: $|x - a| \leqslant 2 - \sqrt{5-x}$. Выражение, стоящее в правой части неравенства, задаёт функцию, график которой получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ в результате сдвига на 5 влево, симметрии относительно начала координат и сдвига на 2 вверх:

$$\sqrt{x} \to \sqrt{x+5} \to -\sqrt{-x+5} \to 2 - \sqrt{-x+5}.$$

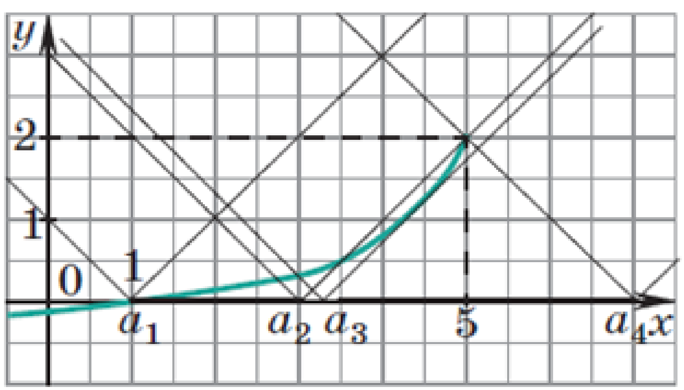


Рис. 110

Левой части неравенства соответствует график функции $y = |x|$, который сдвигается на a вдоль оси абсцисс (рис. 110).

Ответом к задаче будут два промежутка: $a_1 < a < a_2$ и $a_3 \leqslant a < a_4$. Вычислений требует только значение a_3, соответствующее случаю касания, а остальные три значения a легко устанавливаются по рисунку:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_4 = 7.$$

При решении некоторых уравнений и неравенств оказывается удобным временно поменять ролями параметр и переменную, т. е. считать параметр переменной, а переменную параметром.

Пример 6. Решить неравенство

$$4x^4 + 4ax^2 + 32x + a^2 + 8a > 0$$

при всех положительных значениях a.

Р е ш е н и е. Левая часть неравенства является многочленом четвёртой степени относительно x и всего лишь второй

степени относительно a. Попытаемся поэтому разложить левую часть на множители как квадратный трёхчлен

$$a^2 + (4x^2 + 8)a + 4x^4 + 32x.$$

$$\frac{D}{4} = (2x^2 + 4)^2 - 4x^4 - 32x = 16x^2 - 32x + 16 = 16(x - 1)^2;$$

$$a_{1;\,2} = -2x^2 - 4 \pm 4(x - 1);$$

$$a^2 + (4x^2 + 8)a + 4x^4 + 32x = (a + 2x^2 - 4x + 8)(a + 2x^2 + 4x).$$

Вернём теперь x звание переменной и, рассматривая выражения в скобках как квадратные трёхчлены относительно x, решим неравенство: $(2x^2 - 4x + 8 + a)(2x^2 + 4x + a) > 0$.

Пример 6. Решить неравенство

$$4x^4 + 4ax^2 + 32x + a^2 + 8a > 0$$

при всех положительных значениях a.

При $a > 0$ значения трёхчлена в первой скобке положительны. Трёхчлен во второй скобке имеет два корня при $a < 2$, один корень при $a = 2$ и не имеет корней при $a > 2$. Найдя корни по формуле корней, записываем ответ.

Ответ: если $0 < a < 2$, то $x < \dfrac{-2 - \sqrt{4 - 2a}}{2}$ или $x > \dfrac{-2 + \sqrt{4 - 2a}}{2}$; если $a = 2$: $x \neq -1$; если $a > 2$, x — любое число.

В ряде задач с параметрами графическое решение удобно проводить в системе координат xOa.

Пример 7. Найти все значения a, при которых решением неравенства $|2x^2 + x - a - 8| \leqslant x^2 + 2x - 2a - 4$ является отрезок.

Р е ш е н и е. Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x^2 + x - a - 8 \leqslant x^2 + 2x - 2a - 4, \\ 2x^2 + x - a - 8 \geqslant -x^2 - 2x + 2a + 4. \end{cases}$$

Упрощая, получим: $\begin{cases} a \leqslant -x^2 + x + 4, \\ a \leqslant x^2 + x - 4. \end{cases}$

Будем рассматривать параметр a как переменную и отметим на координатной плоскости xOa множество точек, координаты которых удовлетворяют полученной системе. Эти точки одновременно находятся под обеими параболами $a = -x^2 + x + 4$ и $a = x^2 + x - 4$ (рис. 111). Приравнивая друг другу правые части этих уравнений, находим координаты точек пересечения парабол: $(-2; -2)$ и $(2; 2)$.

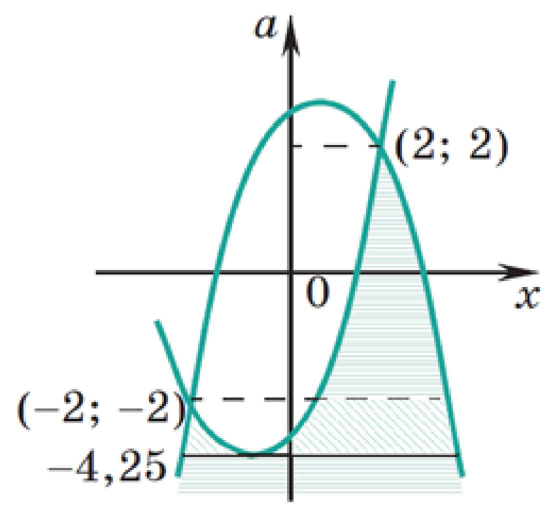


Рис. 111

Пример 7. Найти все значения a, при которых решением неравенства $|2x^2 + x - a - 8| \leqslant x^2 + 2x - 2a - 4$ является отрезок.

На рисунке видно, что некоторые прямые, параллельные оси абсцисс, имеют с закрашенной областью общий отрезок. Наша задача — указать ординаты точек этих прямых. Это, во-первых, ординаты вершины параболы $a = x^2 + x - 4$ ($x_0 = -0{,}5$; $a_0 = -4{,}25$) и точек, расположенных ниже её. Во-вторых, это точки интервала $(-2; 2)$.

О т в е т: при $a \leqslant -4{,}25$ и $|a| < 2$.

Рассмотрим ещё два примера, ключевым в которых является требование единственности решения.

Пример 8. При каких значениях параметра a уравнение $\cos ax = 2 - \cos x$ имеет единственный корень?

Решение. При всех значениях a данное уравнение имеет корень $x = 0$. Чтобы этот корень оказался единственным, $\cos ax$ и $\cos x$ не должны одновременно принимать значение 1 ни при каком другом значении x. Отсюда

$$\frac{2\pi m}{a} \neq 2\pi n \ (m, n \in \mathbf{Z}, m \neq 0, n \neq 0). \text{ Имеем } a \neq \frac{m}{n}.$$

Дробью $\frac{m}{n}$ можно записать любое рациональное число, значит, неравенство $a \neq \frac{m}{n}$ говорит о том, что a не является рациональным числом.

Ответ: при любых иррациональных значениях a.

Пример 9. Найти значения параметров a и b, при которых система $\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение. Заметим, что система не изменится, если одновременно поменять знаки x и y, т. е. если тройка чисел $(\alpha; \beta; \gamma)$ является решением системы, то и тройка $(-\alpha; -\beta; \gamma)$ тоже её решение. Эти решения в силу требования единственности должны совпадать, что может произойти только при $x = y = 0$. Но тогда система принимает вид $\begin{cases} z = a, \\ z = b, \\ z^2 = 4, \end{cases}$ откуда $b = a = \pm 2$.

Единственное решение система может иметь только при этих значениях параметров, а вот имеет ли — следует проверить.

Проверка.

1. Если $a = b = 2$, то $\begin{cases} xzy + z = 2, \\ xyz^2 + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$ Вычтем из второго уравнения первое: $\begin{cases} xyz + z = 2, \\ xy(z^2 - z) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$

Пример 9. Найти значения параметров a и b, при которых система $\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Второе равенство системы выполняется, когда хотя бы один из множителей произведения $xyz(z - 1)$ обращается в нуль. Подстановка в систему значения $x = 0$ приводит к решению $(0; 0; 2)$. К этому же решению приводит и подстановка $y = 0$. Значение $z = 0$ не удовлетворяет первому уравнению системы, а при $z = 1$ получаем систему $\begin{cases} xy = 1, \\ x^2 + y^2 = 3, \end{cases}$ которая имеет ненулевые решения. Значит, при $a = b = 2$ система имеет несколько решений, что не соответствует заданию.

2. Если $a = b = -2$, то $\begin{cases} xyz + z = -2, \\ xyz^2 + z = -2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4, \end{cases}$ $\begin{cases} xyz + z = -2, \\ xyz\,(z - 1) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4. \end{cases}$

Подставляя, как и в первом случае, значение $x = 0$, получаем решение $(0; 0; -2)$. К этому же решению приводит и подстановка $y = 0$. Значение $z = 0$ не удовлетворяет системе, а при $z = 1$ получаем систему $\begin{cases} xy = -3, \\ x^2 + y^2 = 3, \end{cases}$ которая не имеет решений.

Значит, при $a = b = -2$ система имеет единственное решение.

Ответ: система имеет единственное решение при $a = b = -2$.

Методика работы с заданиями с параметрами

- Теперь пора поговорить о методике работы с задачами. Понятно, что выполнять решение достаточного для обучения количества задач на уроках невозможно, времени не хватит. Чтобы повысить эффективность урока полезно разбирать задания фронтально и их решения в электронной форме учебников, а также обсуждать задания из других источников, которых так много в Интернете.
- Приведем сначала упражнения из нашего учебника.

Задания из учебника 11 класса

326. Решите уравнение относительно переменной x:

1) $(a^2 + a - 12)x = a^2 - 2a - 3$;
2) $(a^2 - 4a + 3)x = a^2 - 6a + 5$.

327. 1) При каком значении параметра b корень уравнения $3x(b + 4) = 6b + 35$ в 2 раза больше корня уравнения $2(x + 1) = 3(x - 2)$?
2) При каком значении параметра a корень уравнения $a(2x - 1) - 1 = 4a - x$ в 4 раза меньше корня уравнения $x - 7 = 3(3 - x)$?

328. Стороны треугольника a, b и c. Какую наибольшую площадь может иметь этот треугольник в зависимости от d, если $a \leqslant 4$, $b \leqslant 5$ и $c \leqslant d$?

329. Найдите все значения a, при которых число 2:

1) является корнем уравнения:
а) $|x + 2a| \cdot x + 1 - a = 0$;
б) $\left(a + 2x^3 - \operatorname{tg}\frac{7\pi x}{2}\right)\sqrt{ax + 1} = 0$;
в) $|x - a| \cdot x + a - 3 = 0$;
г) $\sqrt{2 \cdot 2^x - a} = x^2 + a$;
2) не является решением неравенства $-2 \leqslant |x + 3a| - x^2$.

330. 1) Найдите значения параметра a, при которых:
а) число нуль является корнем уравнения
$\sqrt{a\cos 2x - 3\sin 2x} = \cos x$;
б) число $-\frac{\pi}{2}$ является корнем уравнения
$\sqrt{2\sin 2x - a\cos 2x} = -\sin x$.
2) Для найденных значений a решите данное уравнение.

331. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(0{,}2)^x = \frac{2a + 3}{5 - a}$:

1) не имеет корней;
2) имеет отрицательные корни.

332. Линейным или квадратным является уравнение $5b(b - 2)x^2 + (5b - 2)x - 16 = 0$ относительно x при:
1) $b = 1$; 2) $b = 2$; 3) $b = 0{,}4$; 4) $b = 0$?

333. Определите вид уравнения
$$2ax(x - 1) + x(ax - 12) = 3x + 8$$
относительно x при:
1) $a = 1$; 2) $a = -6$; 3) $a = -2$; 4) $a = 0$.

334. При каких значениях параметра a уравнение
$$ax(ax + 3) + 6 = x(ax - 6)$$
является:
1) квадратным; 2) неполным квадратным; 3) линейным?

335. Решите относительно x уравнение:

1) $x^2 - 2x + c = 0$;
2) $x^2 - ax = 0$;
3) $mx^2 - 6x + 1 = 0$;
4) $12x^2 + 7cx + c^2 = 0$.

336. Решите уравнение:

1) $(m - 1)x^2 + 2(m - 1)x + m + 3 = 0$;
2) $\frac{3mx - 5}{(m - 1)(x + 3)} + \frac{3m - 11}{m - 1} = \frac{2x + 7}{x + 3}$.

337. 1) Найдите значения параметра a, при которых сумма квадратов корней квадратного трёхчлена $x^2 - ax + a - 1$ является наименьшей.
2) При каких значениях параметра k уравнение имеет: единственный корень; имеет два корня; имеет три корня

а) $kx + 2 = \left|7 - \frac{4}{x}\right|$;
б) $\left|\frac{6}{x} - 5\right| = kx - 1$;
в) $|kx + 2| = 7 - \frac{4}{x}$;
г) $|kx - 1| = \frac{6}{x} - 5$?

338. Для всех допустимых значений параметра a решите неравенство:

1) $\frac{x}{a + 2} > 2x - a$;
2) $\frac{x}{a - 4} \geqslant 3x - 2a$.

339. При каких значениях параметра a система уравнений:

1) $\begin{cases} 4x + ay = 2, \\ ax + y = 1 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений;
2) $\begin{cases} 4x + ay = 4, \\ ax + y = 3 \end{cases}$ не имеет решений?

Задания из учебника 11 класса

340. Найдите все значения параметра a, при которых не имеет корней уравнение:
1) $ax^2 + 2ax + x = 1$; 2) $a^2x = a(x + 2) - 2$.

341. При каких значениях a параболы $y = x^2 + ax - a$ и $y = 2x^2 - x + a$ не имеют общих точек?

342. Найдите все значения a, для которых уравнение:
1) $x^2 - 2(a - 1)x + (2a + 1) = 0$ имеет два положительных корня;
2) $x^2 - 2(a - 2)x + a = 0$ имеет один корень;
3) $x^2 + (a - 3)x + a = 0$ имеет единственный положительный корень.

343. При каких значениях параметра уравнение:
1) $(b - 1)x^2 - 2bx + b + 1 = 0$;
2) $x^2 - (2a + 1)x + a^2 + a - 6 = 0$
имеет:
а) два положительных корня;
б) два отрицательных корня;
в) единственный корень;
г) корни разных знаков?

344. Определите, при каких значениях параметра a уравнение:
1) $\log_2(4^x - a) = x + 1$ имеет два корня;
2) $\log_3(9^x + a) = x$ имеет единственный корень.

345. Найдите число корней уравнения:
1) $\dfrac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} = a$; 2) $\dfrac{5x^2 + 7}{x^2 + 2} = a$.

346. Найдите все значения b, при которых уравнение $x^2 + x + b = 0$ имеет:
1) два корня, большие чем b;
2) один из корней больше, а другой меньше, чем b.

347. Найдите все значения параметра d, при которых неравенство $6x - 7 - dx^2 > 0$ имеет решения, причём все они меньше 1.

348. При каких значениях параметра:
1) оба корня квадратного уравнения $x^2 - 2bx - 1 = 0$ не превосходят по модулю 2;
2) уравнение $\sqrt{x - 1}\,(4x^2 - a^2x - 3a) = 0$ имеет два корня?

349. Найдите все значения параметра t, при которых каждое число на отрезке $[1; 2]$ является решением неравенства $x^2 - tx + 1 < 0$.

350. При каких значениях c на отрезке $[-1; 1]$ содержится только один корень уравнения $cx^2 + (2c - 1)x - 1 = 0$?

351. Найдите все значения параметра a, при которых:
1) оба корня уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ принадлежат отрезку $[1; 3]$;
2) все нули функции $f(x) = (a - 2)x^2 + 2ax + a + 3$ лежат внутри интервала $(-2; 1)$.

352. При каких значениях a уравнения $x^2 + \frac{8}{a}x - 2a = 0$, $x^2 + \frac{6}{a}x - a = 0$ имеют по два корня и между двумя корнями одного уравнения находится ровно один корень другого уравнения?

353. При каких значениях параметра a система
$\begin{cases} 2x^2 - 3ax - 9 > 0, \\ x^2 + ax - 2 < 0 \end{cases}$ не имеет решений?

354. Найдите все значения параметра m, при которых квадратный трёхчлен $x^2 + mx + m^2 + 6m$ отрицателен при всех значениях переменной x, удовлетворяющих неравенству $1 < x < 2$.

355. При каких значениях параметра a уравнение:
1) $\dfrac{x + a}{x + 1} + \dfrac{a - 3x}{x - 3} = 2$ имеет единственный корень;
2) $x^2 - 4x - 2|x - a| + 2 + a = 0$ имеет ровно два корня;
3) $|x^2 - 5x + 6| = ax$ имеет ровно три корня?

356. С помощью производной найдите значения a, при которых ровно два корня имеет уравнение:
1) $2x^3 - 3x^2 - 36x + a - 3 = 0$;
2) $2x^3 + 3x^2 - 36x - a + 2 = 0$.

357. Решите уравнение, раскладывая на множители его левую часть:
1) $2x^3 - (a + 2)x^2 - ax + a^2 = 0$;
2) $x^4 + x^3 - 3ax^2 - 2ax + 2a^2 = 0$.

Задания из учебника 11 класса

358. Введите параметр $a = \sqrt{2}$ и решите уравнение:

1) $x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0$;

2) $x^3 - (\sqrt{2} + 1)x^2 + 2 = 0$;

3) $2x^3 + x + \sqrt{2} = 0$.

359. При каких значениях параметра система неравенств:

1) $\begin{cases} ax - 1 \leqslant 0, \\ x - 4a \geqslant 0 \end{cases}$ имеет решение;

2) $\begin{cases} (x + p)^2 \geqslant 16, \\ x(x + 4) \leqslant p \end{cases}$ имеет единственное решение;

3) $\begin{cases} x^2 + bx - 2b^2 > 0, \\ b^2x^2 + 3bx - 4 < 0 \end{cases}$ не имеет решений;

4) $\begin{cases} 2x + ay = a + 2, \\ (a + 1)x + 2ay = 2a + 4 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений;

5) $\begin{cases} (|x| - 6)^2 + (|y| - 6)^2 = 4, \\ y = ax + 1, \\ xy > 0 \end{cases}$ имеет единственное решение?

360. Выясните, при каких значениях параметра a система уравнений:

1) $\begin{cases} 2x + (9a^2 - 2)y = 3a, \\ x + y = 1 \end{cases}$ не имеет решений;

2) $\begin{cases} y = x^2 + ax + a, \\ x = y^2 + ay + a \end{cases}$ имеет единственное решение.

361. Найдите значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{\log_x 2} + \dfrac{1}{\log_y 2} = 1, \\ y = a(x - 3) \end{cases}$ имеет единственное решение.

362. Найдите число решений системы уравнений в зависимости от значений параметра:

1) $\begin{cases} x + y = a - 1, \\ xy = 3a - 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = a, \\ x + y = a. \end{cases}$

363. Решите уравнение относительно x:

1) $3\cos x = 4c + 1$;

2) $(b^2 - 9)\sin x = b + 3$;

3) $\cos 2x - a\cos x + a^2 + 1 = 0$;

4) $\sin^2 x - 2a\sin x + 2a^2 - 2a + 1 = 0$.

364. Найдите все значения параметра a, при которых область значений функции $y = a\sin x - 3|\cos x|$ содержит отрезок $[-6; 5]$.

365. При каких значениях параметра a на интервале $(0; \pi)$ уравнение $2\cos^2 x + (2a + 1)\sin x - a - 2 = 0$ имеет ровно: 1) один; 2) два; 3) три; 4) четыре корня?

366. При каких значениях параметра a имеет единственное решение уравнение:

1) $\sqrt{|x|} = ax + 2$;

2) $\sqrt{2(|x| - x)} = ax + 2$;

3) $z|z + 2a| + 1 - a = 0$;

4) $1 + \{x\} = \cos^2 ax$?

367. При каких значениях параметров имеет единственное решение система уравнений:

1) $\begin{cases} 2xyz + y = a, \\ 2xy^2z + y = b, \\ 4(1 - x^2) = z^2 + y^2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xyz + x = a, \\ x^2yz + x = b, \\ 4(1 - x^2) = z^2 + y^2? \end{cases}$

! Контрольные вопросы и задания

1. Что значит решить уравнение с параметром?
2. Какие условия должны выполняться, чтобы оба корня квадратного трёхчлена $ax^2 - 2a^2x - 2$ были больше 1? Найдите соответствующие значения a.
3. Решите неравенство $\log_a x > 2$.

Задания из Интернета

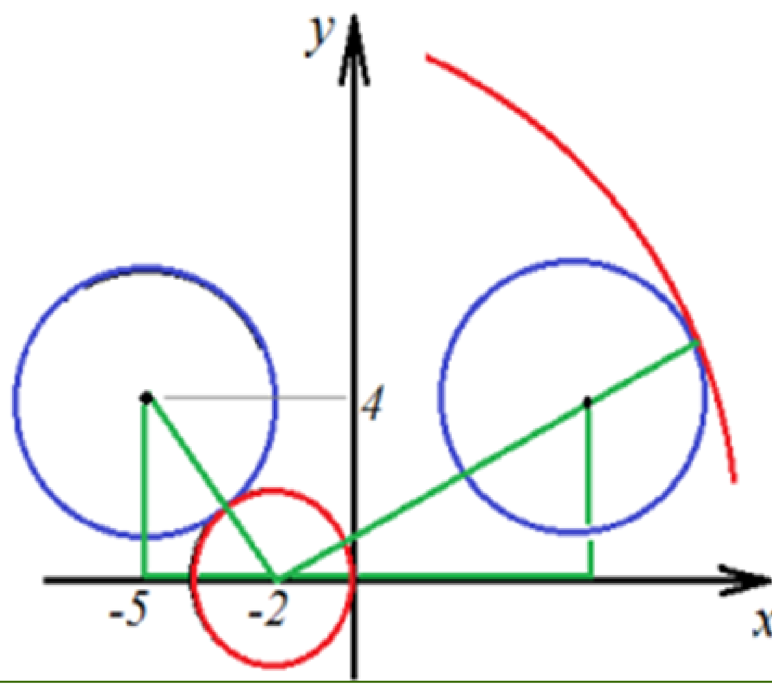
В Интернете можно найти много заданий с параметрами и, что немаловажно, с решениями.

найти положительное значение параметра а, такое, чтобы система имела единственное решение.

$$(|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$$

$$(x + 2)^2 + y^2 = a^2$$

Решение.



При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 5|x| + 12|y-2| = 60, \\ y^2 - a^2 = 4(y-1) - x^2 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения?

Задания из банка заданий ЕГЭ

Решение

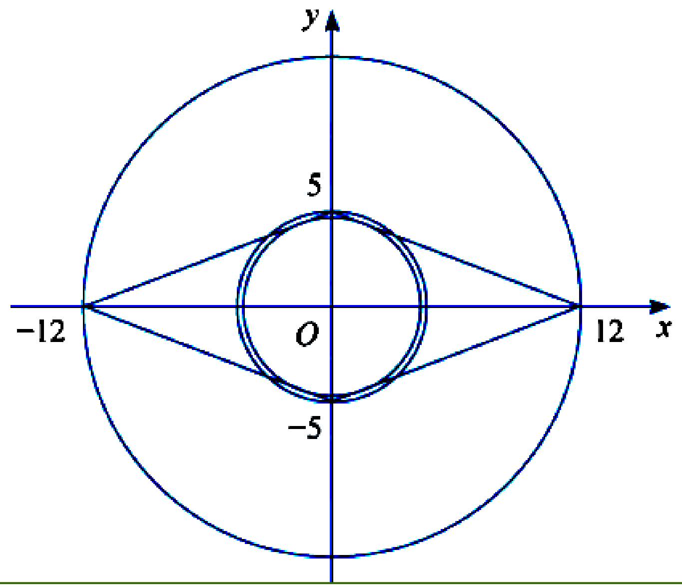
Преобразуем второе уравнение системы, выделив полный квадрат $y^2 - 4y + 4 = (y-2)^2$.

$$\begin{cases} 5|x| + 12|y-2| = 60, \\ y^2 - a^2 = 4(y-1) - x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5|x| + 12|y-2| = 60, \\ x^2 + (y-2)^2 = a^2. \end{cases}$$

Сделав замену переменных $t = y - 2$, получим систему

$$\begin{cases} 5|x| + 12|t| = 60, \quad (1) \\ x^2 + t^2 = a^2. \quad (2) \end{cases}$$

При такой замене число решений новой и старой системы одинаково. Построим графики уравнений (1) и (2) в системе координат Oxt.



Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{-5 - 6x - x^2}, \\ y - ax = 2 - 3a \end{cases}$$ имеет ровно два решения.

Задания из банка заданий ЕГЭ

Решение

Построим график уравнения $y = \sqrt{-5 - 6x - x^2}$.

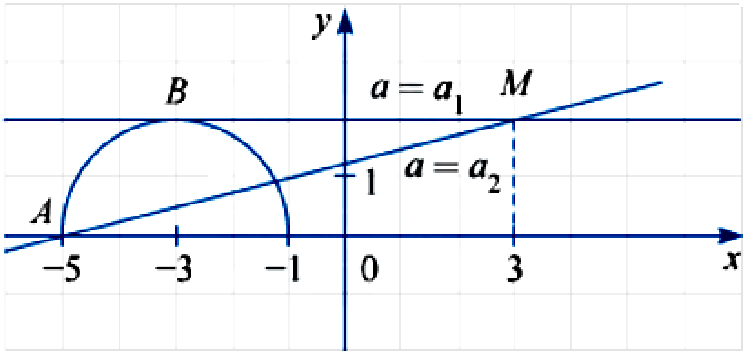
Преобразовав подкоренное выражение, получим

$y = \sqrt{4 - (x^2 + 6x + 9)}$, $y = \sqrt{2^2 - (x+3)^2}$.

Если $y \geq 0$, то $y^2 = 2^2 - (x+3)^2$, $(x+3)^2 + y^2 = 2^2$.

Если $y < 0$, точек, удовлетворяющих уравнению, нет.

Получилась полуокружность с центром в точке $(-3; 0)$ радиусом 2, лежащая в верхней полуплоскости.



Уравнение $y - ax = 2 - 3a$ запишем в виде $y = a(x - 3) + 2$ — семейство прямых с угловым коэффициентом a, проходящих через точку $M\,(3;2)$.

Разговор мы начали с задачи 6 класса, а закончим задачей, которую можно предлагать с 8 по 11 класс.

Задание для 8 класса. Найти все значения a, при которых в интервале (a; $2a$) содержится единственное целое число.

Р е ш е н и е. По правилам записи интервала должно быть $a < 2a$, значит, допустимы все положительные значения a. Конечно, к этому выводу учащиеся должны прийти сами. Затем школьникам предлагается изобразить на координатной прямой интервал, содержащий единственное целое число. Обычно школьники изображают интервал, содержащий число 1.

Описательные ответы школьников на вопрос: «Где должны располагаться левая и правая границы такого интервала?» легко формализовать, сведя их к системе двух двойных неравенств: $\begin{cases} 0 \le a < 1, \\ 1 < 2a \le 2, \end{cases}$ $0{,}5 < a < 1$.

На вопрос: «Можно ли считать, что задача решена?» будет дан отрицательный ответ, так как следует еще найти значения a, при которых внутри интервала будет числа 2, 3, 4 и т. д. Для числа 2 имеем: $\begin{cases} 1 \le a < 2, \\ 2 < 2a \le 3, \end{cases}$ $1 < a \le 1{,}5$. Для числа 3 имеем: $\begin{cases} 2 \le a < 3, \\ 3 < 2a \le 4, \end{cases}$ $2 \le a \le 2,\ \ a = 2$. Чтобы не проверять другие натуральные числа, заметим, что длина интервала равна a и не должна быть больше двух, иначе внутри него наверняка окажутся хотя бы два целых числа.

Ответ: $0{,}5 < a < 1,\ \ 1 < a < 1{,}5,\ \ a = 2$.

ОБЪЕДИНЕННАЯ ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА дрофа вентана граф

Благодарим за внимание!

Контакты для связи:

olgamuravina@gmail.com

muravins.ru

http://drofa-ventana.ru