



корпорация

российский
учебник

Как развивать математические способности у учащихся 5—6 классов?

Г.К.Муравин, кандидат педагогических наук,
почетный работник образования, ветеран труда,
автор УМК по математике для 1–11 классов

О.В.Муравина, кандидат педагогических наук,
доцент, профессор кафедры математического
образования Института развития образовательных
технологий, автор УМК по математике для 1-11 классов

19 декабря 2017

Основные понятия

- **Задатки** – это лишь своеобразные *анатомо-физиологические* предпосылки к развитию способностей. Способности могут сформироваться из задатков только при благоприятных условиях во время деятельности.
- **Способность** – это базовое свойство личности, являющееся условием успешного выполнения определенной деятельности. Способности к нескольким видам деятельности присущи абсолютному большинству людей.
- **Одаренность** – сочетание способностей высокого уровня, позволяющее достигать успеха в той или другой деятельности.
Общая и специальная одаренность – это способность к нескольким видам деятельности или одному.
- **Талант** является способностью, присущей от рождения, которая, как правило, раскрывается постепенно, с приобретением определенных навыков или опыта.
- **Гениальность** – практическое воплощение высокого уровня творческого потенциала личности.

Условно выделяют три категории одаренных детей

- Дети с необыкновенно высоким общим уровнем умственного развития при прочих равных условиях (дошкольный и младший школьный возраст).
- Дети с признаками специальной умственной одаренности – в определенной области науки, искусства, спорта и других видах деятельности (подростковый возраст).
- Учащиеся, не достигающие по каким-либо причинам успехов в учении, но обладающие яркой познавательной активностью, оригинальностью психического склада, незаурядными умственными резервами (чаще встречаются в старшем школьном возрасте).

Качества личности, определяющие математические способности

- Способность к формализованному восприятию математического материала, к схватыванию формальной структуры задачи;
- способность к логическому мышлению в сфере количественной и пространственной информации, числовой и знаковой символики;
- способность к свёртыванию процесса математических рассуждений;
- способность к обобщению (быстрому и широкому) математических объектов и отношений;
- гибкость ума (мыслительных процессов математической деятельности);
- стремление к ясности, простоте и рациональности решения;
- способность к свободной и быстрой перестройке мыслительного процесса с прямого на обратный ход размышления;
- математическая память (обобщенная память на математические отношения, типовые характеристики, схемы рассуждений и доказательств, методы решения задач и принципы подхода к ним).

В структуру математических способностей не входят:

- быстрота мыслительных процессов как временная характеристика;
- вычислительные способности;
- память на числа, формулы, цифры;
- способность к пространственному представлению (есть математики, которые сделали открытия в алгебре, но не сделали того же в геометрии).

Подходы к разработке содержания учебных предметов для одаренных детей

- **Ускорение.** Этот подход позволяет учесть потребности и возможности определенной категории детей, отличающихся ускоренным темпом развития. Ускорение может привести к перегрузке.
- **Углубление.** Данный подход эффективен по отношению к детям, которые обнаруживают особый интерес по отношению к той или иной конкретной области знания или области деятельности. Углубление может привести к перегрузке или одностороннему развитию.
- **Обогащение.** Этот подход ориентирован на качественно иное содержание обучения с выходом за рамки изучения традиционных тем за счет установления связей с другими темами, проблемами или дисциплинами.
- **Проблематизация.** Этот подход предполагает стимулирование личностного развития учащихся за счет использования оригинальных объяснений, пересмотра имеющихся сведений, поиске новых смыслов и альтернативных интерпретаций, что способствует формированию у учащихся личностного подхода к изучению различных областей знаний, а также рефлексивного плана сознания.

Продуктивная деятельность учащихся

- Репродуктивная деятельность предполагает повторение ранее уже отработанного метода достижения заранее известного результата. Репродуктивная деятельность всегда целенаправленна.
- Кроме того, характерным признаком репродуктивной деятельности является реализация типовых, стандартных, проверенных, неоднократно повторенных в прошлом действий.
- Продуктивная деятельность с целью получения продукта обладающего определенными заданными качествами.
- Личность проявляется прежде всего в способности к созданию нового. Поэтому задача личностного подхода - формирование поисковой активности, развитие способности к творчеству. Творчество предполагает, что человек способен к нестандартным, но подходящим к данной ситуации решениям в любой сфере жизни, будь то общение или решение учебной задачи.

Признаки креативности:

- гибкость - способность выдвигать большое количество идей и способность легко переключаться на другие идеи;
- оригинальность - способность производить идеи, отличающиеся от общепризнанных;
- разработанность - способность детализации предложенного задания;
- воображение - умение строить модель различных видов творческой деятельности;
- чувство новизны - количество выделенных учеником личных творческих продуктов;
- интуиция - умение предугадывать результат выполняемого творческого задания;
- придумывание - умение предлагать способ разрешения проблемной ситуации или развитие сюжета творческой работы.

Продуктивное обучение математике по УМК



Влияние структуры учебника на возможность построения индивидуальных траекторий изучения математики одаренными учащимися

661. Найдите с помощью таблицы квадратов натуральных чисел от 10 до 99 (см. второй форзац) квадраты чисел:  208
- 1) 11; 37; 54; 98;
 - 2) 150; 480; 7700; 8300;
 - 3) 0,16; 0,53; 0,0049; 0,00094.
662. Квадратами каких чисел являются числа:
- 1) 225; 441; 4096; 9216;
 - 2) 0,7744; 0,6889; 0,0225; 0,007396?
663. Определите с помощью таблицы квадратов, какие из следующих чисел являются квадратами натуральных чисел: 1025; 7926; 5929; 3575; 8649; 9801; 9999.

Потребность в координатах и умении их определять первыми ощутили путешественники, особенно мореплаватели, ведь в море не у кого спросить дорогу, а плавание только вдоль берегов существенно ограничивало разнообразие возможных маршрутов.

На рисунке 127 изображён глобус — модель земного шара. На нём по изображениям океанов, морей, материков и островов проходит сеть линий, каждая из которых является окружностью. Одни окружности проходят через Северный и Южный полюсы — их называют **меридианами**. Другие окружности пересекают меридианы под прямыми углами, постепенно уменьшаясь при приближении к полюсам — это **параллели**. Самая большая из параллелей, как бы опоясывающая земной шар, называется **экватором**.

Через любую точку глобуса (кроме полюсов) можно провести параллель и меридиан. Чтобы указать координаты точки земного шара, нужно знать, как параллели и меридианы определяются и обозначаются. Отсчёт параллелей ведут от экватора по направлениям к Северному или Южному полюсу Зем-



Рис. 127

6 класс

ли. Меридианы отсчитывают от начального, *нулевого меридиана*, проходящего через маленький английский городок Гринвич, расположенный на берегу реки Темзы в пригороде Лондона. Этот меридиан так и называется — Гринвичский. Небольшая часть нулевого меридиана (рис. 128) проведена по мостовой Гринвича. От него меридианы отсчитываются на восток и на запад. При этом углы с вершиной в центре Земли измеряют в градусах (рис. 129).



Рис. 128

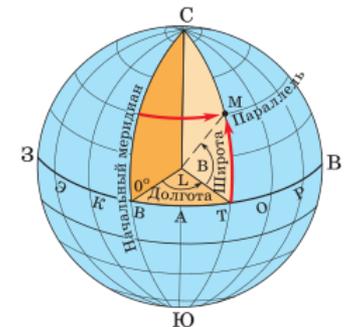


Рис. 129

Получающиеся координаты называют соответственно широтой и долготой. Москва, например, имеет такие координаты: 37° восточной долготы и $56,5^\circ$ северной широты — Москва находится к востоку от Гринвича и к северу от экватора.

В знаменитом романе Жюль Верна «Дети капитана Гранта» герои в поисках капитана Гранта совершают увлекательное и опасное путешествие вдоль всей 37-й параллели южной широты. На карте (рис. 130) 37-я параллель пересекает Южную Америку.

Обратите внимание на то, как Жюль Верн задал масштаб карты. 

Координаты, с которыми вы уже познакомились на уроках математики, — координаты точек на прямой. Выбрав на любой прямой начало отсчёта, единичный отрезок и положительное на-

84. Практическая работа.

Когда нет измерительного прибора, расстояния можно измерять «голыми руками». Для этого полезно знать:

а) расстояние между концами большого и указательного пальцев, когда они широко раздвинуты; б) ширину своей ладони; в) расстояние между концами раздвинутых среднего и указательного пальцев; г) длину своего указательного пальца; д) расстояние между концами большого пальца и мизинца, когда они широко расставлены (рис. 7).

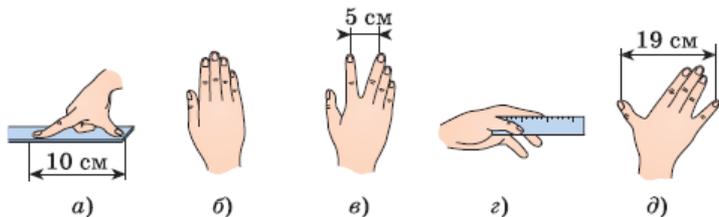


Рис. 7

З а д а н и е.

- 1) Измерьте с помощью линейки размеры своей руки.
- 2) Измерьте рукой ширину парты.
- 3) Проверьте полученный результат с помощью линейки.

134. Игра «Танграм» — китайская головоломка. Название *танграм* возникло в Европе и, вероятнее всего, переводится как «китайские буквы», так как в переводе с греческого *тань* означает «китаец», а *грамма* — «буква». Рассказывают, что Наполеон, находясь в изгнании на острове Св. Елены, часами занимался составлением картинок из элементов танграма.

- 1) На клетчатой бумаге начертите квадрат с длиной стороны 10 см, разрежьте его, как показано на рисунке 31.
- 2) Используя все 7 частей, сложите человечков с рисунка 32:

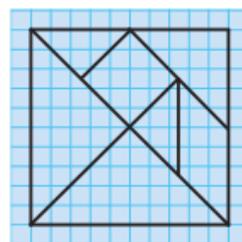


Рис. 31

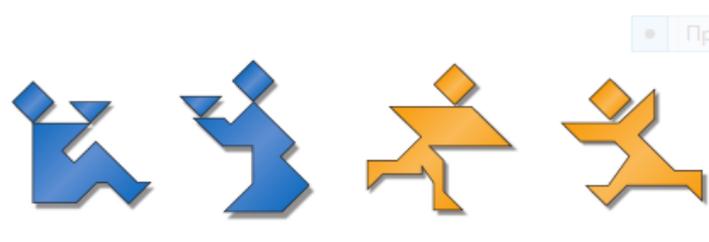
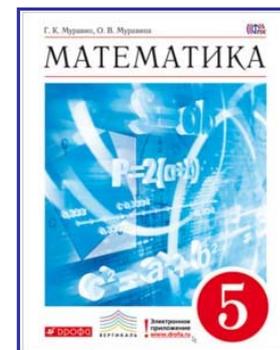


Рис. 32

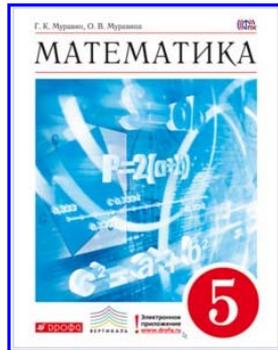
- 3) Сложите из фигур треугольники больших размеров.
- 4) Можно ли составить квадрат из двух или трёх фигур?
- 5) Из каких фигур можно составить прямоугольник?

Темы проектов

1. Системы счисления.
2. Числа вокруг нас.
3. История развития единиц на Руси и в других странах.
4. История появления денег.
5. История появления обыкновенных дробей.
6. Геометрические головоломки («Пифагор», «Колумбово яйцо», «Танграм» и др.).
7. Оптические иллюзии (иллюзии параллельности, равенства и др.).
8. История появления десятичных дробей.
9. Процентные расчёты.



Исследовательские работы



102. 1) Начертите отрезок AB длиной 3 см и с помощью циркуля проведите две окружности, центрами которых являются точки A и B , а радиусы равны 2 см.  32
- 2)* Как расположены точки пересечения построенных окружностей по отношению к концам отрезка?  33
103. 1) Начертите отрезок AB длиной 3 см и с помощью циркуля отметьте все точки, которые удалены от его концов:
- а) на 2 см; б) на 25 мм; в) на 3 см; г) на 35 мм.
- 2)* Выскажите *гипотезу* (предположение), на какой линии расположены точки, равноудалённые от концов отрезка.
- 104*. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называют *хордой*. Докажите, что диаметр — это самая длинная хорда.
105. 1) Постройте окружность с центром O и радиусом OR , равным 3 см. Отметьте точку M внутри образовавшегося круга, а точку N вне круга.  29
- 2)* Сравните длины отрезков: OM и OR , ON и OR . Сделайте вывод.
- 3) Пересечёт ли отрезок MN окружность?
106. Постройте окружность с центром в точке O и радиусом 4 см. Поставьте точку A внутри круга, точку B вне круга.
- 1) Сравните расстояние OA и OB с радиусом.
- 2) Найдите точку пересечения отрезка AB с окружностью.
107. Постройте окружность радиусом 35 мм.  30
- 1) Проведите прямую AB , которая пересекает окружность.
- 2) Проведите прямую CD , не пересекающую окружность.
- 3) Проведите прямую KL , которая *касается* окружности, т. е. имеет с окружностью единственную общую точку.

Задачи на смекалку

5 класс

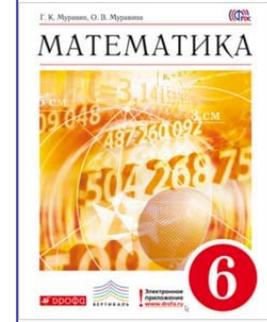
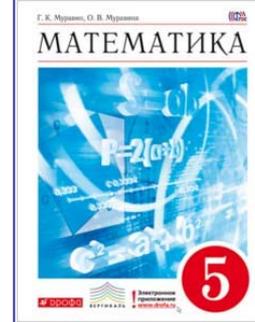
Задачи на смекалку

22. Коля ждет зелёного сигнала светофора и вслух считает проезжающие машины. Сколько машин проехало мимо Коли после того, как он назвал число 17, если при счёте 35 зажётся зелёный свет? Каким действием вы нашли ответ на вопрос задачи?
23. 1) Каким числом может оказаться разность трёхзначного числа и суммы его цифр?
2) Запишите какие-нибудь два трёхзначных числа, у которых такая разность: а) наименьшая; б) наибольшая.
24. Сколько различных чисел можно записать цифрами 1, 3, 8 и 0, если цифры в записи числа не повторяются?
25. Из трёхзначного числа, записанного цифрами 5, 6 и 7, вычитается число 23. Какое наименьшее число можно записать, используя все цифры результата?
26. Записаны подряд натуральные числа от 1 до 999. Сколько раз в записи всех чисел встречается цифра 9?
27. 1) В книге 250 страниц. Сколько нужно написать цифр, чтобы пронумеровать все страницы?
2) Для нумерации страниц книги потребовалось написать 1392 цифры. Сколько страниц в этой книге?
28. **Игра «Число 100».** Играют двое. Игроки поочередно называют произвольные натуральные числа не больше 10. Эти числа складываются. Побеждает тот, кто первым назовёт число, которое в сумме с названными ранее числами даст 100. Как нужно играть, чтобы победить?

6 класс

Задачи на смекалку

255. Запишите наименьшее натуральное число, кратное 25 и имеющее при этом сумму цифр, равную 25. **57**
256. Если m и k натуральные числа и $m + k = 2m + 4$, то какие из следующих утверждений верны:
1) m — чётное; 3) $k - m$ — чётное;
2) k — чётное; 4) если m чётное, то и k чётное?
257. Из некоторого натурального числа вычитают сумму его цифр. С получившимся числом проделывают то же самое и так далее. Докажите, что в конце концов получится ноль.
258. На мониторе компьютера высветилось число 1. Каждую секунду число на мониторе увеличивается на сумму его цифр. Может ли через некоторое время на мониторе появиться число 123 456?
259. Перемножили все натуральные числа от 1 до 100, нашли и выписали сумму цифр полученного произведения, затем нашли сумму цифр этой суммы цифр и т. д. Наконец, получили однозначное число. Какое это число?
260. В результате некоторой перестановки цифр число уменьшилось в три раза. Докажите, что исходное число делилось на 27.



Вычислительный практикум

Натуральные числа

825. Поднимаясь по лесенке (рис. 169), выполните указанные арифметические действия.

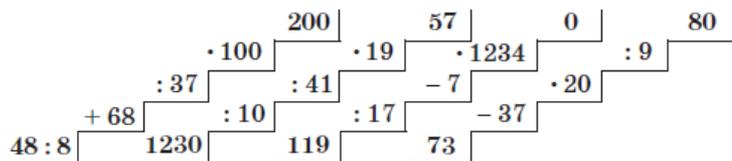


Рис. 169

826. Сравните устно значения выражений:

- 1) $45 - 18$ и $19 + 9$;
- 2) $72 : 4$ и $73 - 45$;
- 3) $23 \cdot 5$ и $58 + 57$;
- 4) $96 : 3$ и $3 \cdot 11$;
- 5) $79 : 79$ и $56 \cdot 0$;
- 6) $39 \cdot 30$ и $38 \cdot 40$.

Практикум по решению текстовых задач

866. Решите устно задачи.

- 1) Чашка стоит 200 р., а чайник — 2000 р. Во сколько раз чайник дороже, чем чашка?
- 2) На школьную новогоднюю ёлку повесили 125 шаров, а игрушек — на 37 меньше, чем шаров. Сколько игрушек повесили на ёлку?
- 3) Для освещения на одной из улиц установили 324 фонаря, а на другой — в 3 раза меньше. Сколько фонарей установили на второй улице?
- 4) В саду 72 яблони, и их в 3 раза больше, чем груш. Сколько в саду яблонь и груш?
- 5) Спортсмен прыгнул в длину на 7 м 20 см. Это в 4 раза больше, чем его рост. Найдите рост спортсмена.
- 6) После того как продали 450 кг крупы, осталось на 125 кг крупы меньше, чем продали. Сколько килограммов крупы было до продажи?
- 7) Штангист в первой попытке поднял штангу массой 106 кг, а во второй — на 27 кг больше. Найдите общую массу, поднятую штангистом за две попытки.

Геометрический практикум

892. Определите на глаз расстояния между точками на рисунке 172, а затем проверьте свои ответы, измерив расстояния с помощью линейки.

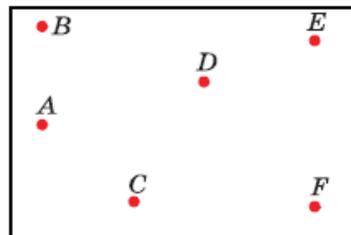


Рис. 172

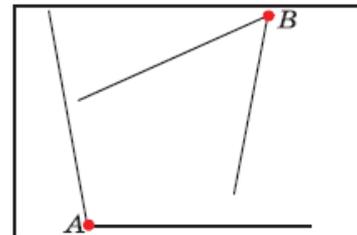


Рис. 173

893. Известно, что $AB = 3$ см и $AC = 5$ см. Какой может быть длина отрезка BC , если точки A , B и C лежат на прямой?

Практикум по развитию пространственного воображения

922. На каркасе пирамиды натянута шнур (рис. 189). Укажите, какие отрезки этого шнура соприкасаются друг с другом не на каркасе пирамиды.

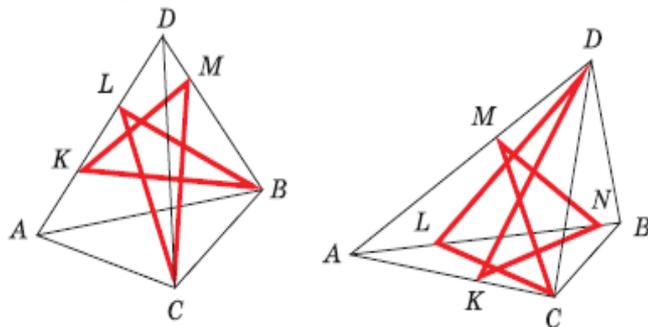


Рис. 189

Уровень трудности заданий

204. Найдите значение выражения:

- | | |
|---|------------------------------------|
| 1) $(1380 + 632) \cdot (1182 - 1155)$; | 4) $999 + 17\,982 : 111 : 6$; |
| 2) $566 + 39 \cdot (1111 - 988)$; | 5) $1032 : (2736 : 19 : 6)$; |
| 3) $3201 - (893 + 3319) : 324$; | 6) $(2578 + 102 \cdot 27) : 124$. |

205°. Каким наибольшим натуральным числом можно заменить букву x , чтобы стало верным неравенство $x < (563 + 337) \cdot (808 - 155\,956 : 307)$?  73

206°. 1) Как, не выполняя вычислений, убедиться в верности двойного неравенства:

- а) $40 + 60 < 48 + 67 < 50 + 70$;
- б) $500 + 300 < 571 + 369 < 600 + 400$;
- в) $90 - 40 < 94 - 38 < 100 - 30$;
- г) $800 - 400 < 863 - 378 < 900 - 300$;
- д) $300 \cdot 30 < 374 \cdot 34 < 400 \cdot 40$;
- е) $4000 \cdot 300 < 4842 \cdot 356 < 5000 \cdot 400$;
- ж) $2400 : 4 < 2432 : 4 < 2800 : 4$;
- з) $3000 : 60 < 3392 : 53 < 3500 : 50$?

2) Не выполняя вычислений, запишите какие-нибудь два выражения так, чтобы значение одного из них было меньше, а другого — больше, чем значение данного выражения:

- | | |
|---------------------|----------------------|
| а) $479 + 377$; | г) $483 \cdot 274$; |
| б) $1703 - 899$; | д) $1744 : 8$; |
| в) $369 \cdot 27$; | е) $9360 : 45$. |

№ 204 – стандартное задание, таких заданий в учебниках около 50%;

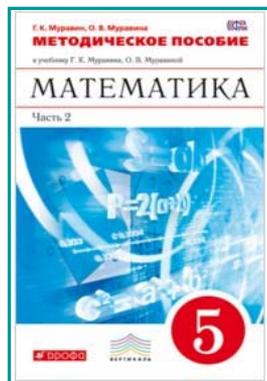
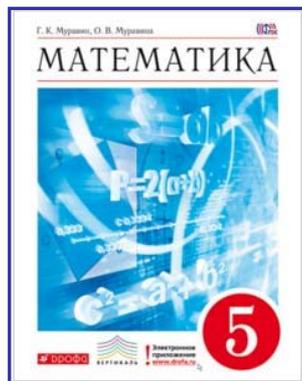
№ 205 – стандартное задание повышенной сложности – 25%;

№ 206 – нестандартное задание, но решение доступно для всех – 20%;

задачи на смекалку –

нестандартные задания – 5%.

Числа



Ответы учеников на вопросы задания № 4 могут быть следующими:

(1). Однозначные числа — это числа от 0 до 9, их десять.

(2). Всего 99 чисел от 1 до 99, но девять чисел среди них однозначные — это числа от 1 до 9. Следовательно, двузначных чисел $99 - 9 = 90$.

(3). Цифра 7 встречается один раз среди чисел первого десятка — это число 7, один раз среди чисел второго десятка — это число 17, один раз среди чисел третьего десятка — число 27. Среди десяти десятков, составляющих первую сотню, цифра 7, обозначающая число единиц, встретится 10 раз. Кроме того, цифра 7, обозначающая число десятков, встречается 10 раз среди чисел 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79. Считаем число семерок в записи чисел от 1 до 100. Их будет $10 + 10 = 20$.

(4). Составлять четырехзначные числа с помощью цифр 8 и 0 будем по некоторому правилу. Сначала запишем число, состоящее из одной цифры 8 и трех нулей, такое число одно — это 8000. Затем составим числа из двух восьмерок и двух нулей: 8008, 8080, 8800; затем из трех восьмерок и нуля 8088, 8808, 8880 и, наконец, одно четырех-

значное число запишем четырьмя восьмерками: 8888. Всего получили 8 чисел.

Можно предложить и другое правило выписывания чисел, например записать их в порядке возрастания: 8000, 8008, 8080, 8088, 8800, 8808, 8880, 8888.

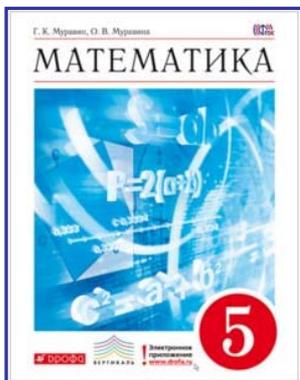
3. Запишите число, которое:

- 1) следует за числом 1999;
- 2) предшествует числу 10 000;
- 3) \circ на 10 меньше, чем наименьшее двузначное число;
- 4) \circ в 3 раза меньше наибольшего двузначного числа;
- 5) \circ на 90 больше наименьшего трёхзначного числа;
- 6) в 2 раза больше числа 500.

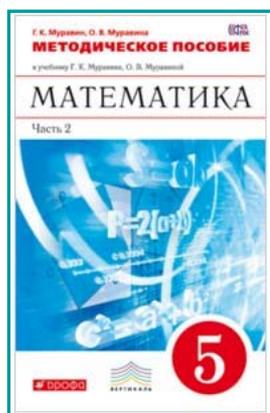
4 \circ . Ответьте на вопросы.

- 1) Сколько существует однозначных чисел?
- 2) Сколько существует двузначных чисел?
- 3) \bullet Сколько раз встречается цифра 7 в записи натуральных чисел от 1 до 100?
- 4) \bullet Сколько различных четырёхзначных чисел можно составить, используя только цифры 8 и 0 или одну из них? Прочитайте полученные числа.

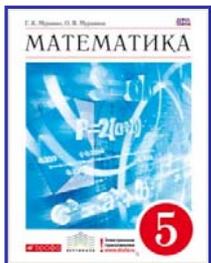
Числа



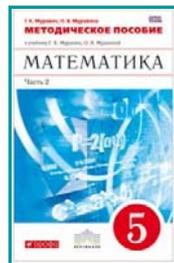
- 13●. 1) По какому правилу записываются числа в последовательности:  5
- а) 111, 222, 333, ...; в) 234, 368, 502, ...;
- б) 1500, 1300, 1100, ...; г) 10, 100, 1000, ...?
- 2) Продолжите последовательность, записав следующие два числа. Прочитайте записанные числа.



№ 13 обсуждается фронтально. В задании а) ученики должны заметить, что каждое следующее число на 111 больше предыдущего, поэтому следующими надо записать числа 444, 555. В последовательности б) числа уменьшаются на 200, значит, следующими должны быть числа 900, 700. В последовательности в) числа увеличиваются на 134, следующие числа — 636, 770. В последовательности г) числа увеличиваются в 10 раз, следующие числа — 10 000, 100 000.



Числа



Задачи на смекалку

22. Коля ждет зелёного сигнала светофора и вслух считает проезжающие машины. Сколько машин проехало мимо Коли после того, как он назвал число 17, если при счёте 35 зажгётся зелёный свет? Каким действием вы нашли ответ на вопрос задачи?
23. 1) Каким числом может оказаться разность трёхзначного числа и суммы его цифр?
2) Запишите какие-нибудь два трёхзначных числа, у которых такая разность: а) наименьшая; б) наибольшая.
24. Сколько различных чисел можно записать цифрами 1, 3, 8 и 0, если цифры в записи числа не повторяются?
25. Из трёхзначного числа, записанного цифрами 5, 6 и 7, вычитается число 23. Какое наименьшее число можно записать, используя все цифры результата?

№ 25. Составим всевозможные трёхзначные числа из заданных цифр — 567, 576, 657, 675, 756, 765. Составим разности:

$$567 - 23 = 544, \quad 576 - 23 = 553, \quad 657 - 23 = 634, \\ 675 - 23 = 652, \quad 756 - 23 = 733, \quad 765 - 23 = 742.$$

Наименьшим числом, составленным из цифр одного из полученных результатов, будет число 247.

Ответ: 247.

Решение задач на смекалку

№ 22. Нужно из 35 вычесть 17, получится 18.
Ответ: 18 машин.

№ 23 (1). Решение задачи в общем виде. Обозначим трёхзначное число $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, сумма его цифр $a + b + c$. Составим разность

$$100a + 10b + c - a - b - c = 99a + 9b = 9(11a + b).$$

Понятно, что $a \neq 0$, наименьшее значение $a = 1$, наименьшее значение $b = 0$, получим наименьшее значение разности, равное 99. Наибольшее значение

разности получим при $a = 9$ и $b = 9$, оно равно 972. Задачу можно решить подбором чисел.

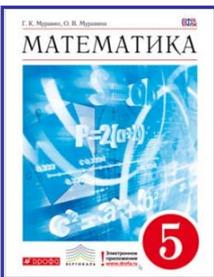
Ответ: любым числом от 99 до 972, например 108, так как $108 = 111 - 3$.

(2а). Наименьшая разность получается при $a = 1$; $b = 0$ в записи числа abc , например 100 и 101.

(2б). Наибольшая разность будет при $a = b = 9$, например 999 и 998.

№ 24. Составим из заданных цифр однозначные числа — 0, 1, 3, 8; двузначные числа — 10, 13, 18, 30, 31, 38, 80, 81, 83; трёхзначные числа — 103, 108, 130, 138, 180, 183, 301, 310, 308, 318, 380, 381, 801, 810, 813, 831, 830, 803; четырёхзначные числа — 1038, 1083, 1308, 1380, 1803, 1830, 3018, 3081, 3108, 3180, 3801, 3810, 8013, 8031, 8103, 8130, 8308, 8380. Всего $4 + 9 + 18 + 18 = 49$.

Ответ: 49.



Числа



26. Записаны подряд натуральные числа от 1 до 999. Сколько раз в записи всех чисел встречается цифра 9?
27. 1) В книге 250 страниц. Сколько нужно написать цифр, чтобы пронумеровать все страницы?
2) Для нумерации страниц книги потребовалось написать 1392 цифры. Сколько страниц в этой книге?
28. Игра «Число 100». Играют двое. Игроки поочередно называют произвольные натуральные числа не больше 10. Эти числа складываются. Побеждает тот, кто первым назовёт число, которое в сумме с названными ранее числами даст 100. Как нужно играть, чтобы победить?

№ 28. Игра «Число 100». Рассуждаем с конца. Нужно стремиться сводить сумму предыдущих чисел к «круглому» числу. Например, первый игрок говорит 3, второй — 7, их сумма равна 10. Первый игрок называет 9, в сумме получаем $10 + 9 = 19$, второй игрок называет число 1, потому что в сумме получится 20. Перед последней парой чисел в сумме будет 90. Первый игрок называет любое число, меньше 10, второй дополняет сумму до 100 и выигрывает. При правильной игре должен выиграть второй игрок.

№ 26. В записи чисел от 1 до 999 цифра 9 встречается 300 раз: среди однозначных чисел — один раз, среди двузначных — девять раз в разряде единиц и десять раз в разряде десятков, т. е. всего 20 раз в первой сотне. А таких сотен десять, следовательно, девяток в разряде единиц и десятков в них будет $20 \cdot 10 = 200$. Кроме того, цифра 9 встретится в разряде сотен 100 раз.

Ответ: 300 раз.

№ 27 (1). В книге 250 страниц. Для нумерации первых девяти страниц потребуется 9 цифр, для нумерации страниц от 10 до 99 потребуется по две цифры на каждую из 90 страниц, т. е. $2 \cdot 90 = 180$ цифр,

а на 151 страницу от 100 до 250 потребуется по 3 цифры на каждую: $3 \cdot 151 = 453$ цифр.

Всего потребуется $9 + 180 + 453 = 642$ цифры.

Ответ: 642 цифры.

(2). Для нумерации страниц книги потребовалось 1392 цифры. 9 цифр требуется для нумерации всех однозначных страниц, для нумерации всех двузначных страниц требуется $90 \cdot 2 = 180$ цифр, дальше идут трехзначные страницы, обозначим число трехзначных страниц через x , так как на каждую страницу требуется три цифры, то требуется $3x$ цифр. Составим уравнение $9 + 180 + 3x = 1392$, $3x = 1203$, $x = 401$. В книге 9 однозначных страниц, 90 двузначных страниц и 401 страница трехзначная, всего $9 + 90 + 401 = 500$ страниц.

Ответ: 500 страниц.

Сравнение чисел

38●. Сравните, если возможно, числа, в которых некоторые цифры обозначены звёздочками:  10

- 1) 1^{***} и 2^{**} ; 3) 1423 и $^{*}789$; 5) $5^{**}1^{*}$ и $5^{**}2^{*}$;
2) 9^{***} и 8^{***} ; 4) $^{***}23$ и $^{**}89$; 6) 2579 и 257^{*} .

39●. 1) Замените звёздочки цифрами так, чтобы получились верные неравенства:  11

- а) $3128 > 3^{*}28$; г) $47583 > 4758^{*}$;
б) $^{*}556 < 3556$; д) $5^{*}1^{*}82 > 581782$;
в) $107^{*}9 > 10769$; е) $5^{***}83 < 500161$.

2)● Сколькими способами можно получить верные неравенства в каждом случае?

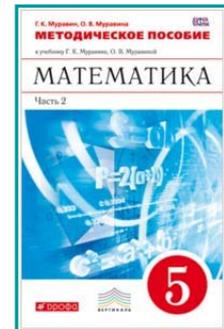
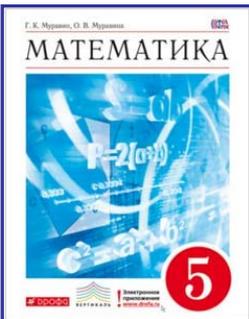
40●. Верно ли, что у большего числа:

- 1) сумма разрядных слагаемых больше, чем у меньшего числа;
2) цифра старшего разряда больше, чем у меньшего числа?
Если ответ утвердительный, то объясните его, если отрицательный, то приведите *контрпример* (пример, который опровергает утверждение).

В № 40 (1) ученики должны сказать, что сумма разрядных слагаемых и есть само число. Задание 2 формирует начальные логические представления школьников. Здесь школьники встречаются с общим утверждением о числах. Это утверждение было бы верным, если бы *всегда*, а не в отдельных случаях у большего числа сумма цифр была бы больше. Однако это не так, и, чтобы доказать, что утверждение неверно, достаточно привести всего один (!) пример, когда сумма цифр у большего числа меньше, чем у меньшего. Такой опровергающий общее утверждение пример называют *контрпримером*. Здесь можно в качестве контрпримера взять неравенство $21 > 14$. Желательно, чтобы ученики сами придумали контрпример.

Ответы, советы, решения

38. Первое число больше в заданиях 1), 2) и 4). Второе число больше в задании 3). Нельзя сделать вывод в задании 5). В задании 6) первое число во всяком случае не меньше, чем второе. **39.** 2) а) 1; б) 2; в) 3; г) 3; д) 12; е) 1. **40.** 1) Да, ведь сумма разрядных слагаемых равна самому числу.





Сравнение чисел



Задачи на смекалку

52. В числе 4 390 158 вычеркните две цифры так, чтобы получилось:
- 1) наибольшее число;
 - 2) наименьшее число.
53. Может ли меньшее из двух чисел иметь большую сумму цифр? Если ответ отрицательный, то объясните его, если утвердительный, приведите пример.
54. Составьте наименьшее и наибольшее числа из цифр 0, 1, 2, 8. На сколько одно число больше другого?
55. В классе 23 ученика. Выше Васи — 17 человек, ниже Пети — 13. Сколько человек выше Васи, но ниже Пети, если все ученики разного роста?
56. Из книги выпали листы со страницами, идущими подряд. Первая из них имеет номер 485, а номер последней страницы состоит из тех же цифр, но записанных в обратном порядке. Сколько листов выпало из книги?
57. Из 25 учеников класса 17 изучают английский язык, 15 — французский. Сколько учеников изучают оба языка, если изучение одного из них обязательно?

№ 57. Способ 1.

- ① $25 - 15 = 10$ (уч.) — не изучают французский.
- ② $25 - 17 = 8$ (уч.) — не изучают английский.
- ③ $10 + 8 = 18$ (уч.) — изучают только один язык.
- ④ $25 - 18 = 7$ (уч.) — изучают оба языка.

Способ 2.

- ① $17 + 15 = 32$ — изучают один или два языка.
- ② $32 - 25 = 7$ — изучают два языка (их считали дважды, поэтому получилось больше, чем всего учеников в классе).

Ответ: 7 учеников.

Решение задач на смекалку

№ 52. В задании 1 полезно провести несколько вариантов вычеркивания цифр в числе 4 390 158 и сравнить полученные числа. Например, если вычеркнем наименьшие цифры 0 и 1, то получим 43 958. Если вычеркнуть 3 и 0, то получим 49 158. Если вычеркнуть 4 и 3, то получим 90 158.

Ответ: 1) 90 158 — наибольшее число;
2) 30 158 — наименьшее число.

№ 53. Сумма цифр меньшего числа может быть больше суммы цифр большего числа, например $111 < 1000$, сумма цифр числа 111 равна 3, а числа 1000 равна 1, а $3 > 1$.

№ 54. Составим из цифр 0, 1, 2, 8 наименьшее число 1028 и наибольшее число 8210. Найдем разность $8210 - 1028 = 7182$.

Ответ: на 7182.

№ 55. Выстроим всех учеников по росту слева направо. Так как выше Васи 17 человек, то он стоит на $17 + 1 = 18$ месте слева. Так как ниже Пети 13 человек, то он стоит на $23 - 13 = 10$ месте слева. Таким образом, с 11-го по 17-е место находится $17 - 10 = 7$ человек.

Ответ: 7 человек.

№ 56. Последняя страница имеет номер 584. Здесь надо иметь в виду, что указываются номера страниц, а найти нужно число выпавших листов (мы их тоже часто называем страницами). На каждом листе два номера страниц. Найдем число выпавших листов: $(584 - 485 + 1) : 2 = 50$.

Ответ: 50 листов.

Рациональные приемы вычислений

8. Вычисли удобным способом.

3 класс

$$\begin{array}{lll} (10 + 7) \cdot 3 & (18 - 17) \cdot 9 & (12 + 8) \cdot 4 \\ (20 + 4) \cdot 2 & (13 - 10) \cdot 7 & (20 - 3) \cdot 4 \end{array}$$

Распределительное свойство умножения относительно сложения

Распределительное свойство умножения относительно вычитания

$$\begin{array}{l} (10 + 5) \cdot 4 = 10 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (10 - 5) \cdot 4 = 10 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \\ (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c \end{array}$$

4 класс

17. Вычисли удобным способом.

$$\begin{array}{l} 7 \cdot 55 + 7 \cdot 45 + 3 \cdot 55 + 3 \cdot 4 \\ 8 \cdot 3 + 9 \cdot 34 + 8 \cdot 7 + 9 \cdot 66 \\ 432 : 2 - 232 : 2 + 184 \cdot 9 + 16 \cdot 9 \end{array}$$

13. Объясни устный приём умножения на двузначное число.

$$\begin{array}{l} 23 \cdot 14 = 23 \cdot (10 + 4) = 23 \cdot 10 + 23 \cdot 4 \\ 31 \cdot 42 = 31 \cdot (40 + 2) = 31 \cdot 40 + 31 \cdot 2 \\ 214 \cdot 26 = 214 \cdot (20 + 6) = 214 \cdot 20 + 214 \cdot 6 \end{array}$$

6 класс

753. Вычислите рационально:

$$\begin{array}{ll} 1) 2\frac{1}{3} \cdot 3 - 1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{3}; & 4) 2 + 3\frac{1}{7} \cdot 1\frac{1}{3} - 2\frac{1}{7} \cdot 1\frac{1}{3}; \\ 2) \frac{1}{3} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}; & 5) 3\frac{3}{4} \cdot 4\frac{1}{2} : 6\frac{3}{4}; \\ 3) \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{3}; & 6) \left(\frac{3}{7} + \frac{3}{14} - \frac{6}{35}\right) : \frac{3}{7}. \end{array}$$

511. Вычислите рациональным способом:

$$\begin{array}{l} 1) 3,2 \cdot 2 + 2,8 \cdot 11 + 3,2 \cdot 5 - 2,8 \cdot 4; \\ 2) (-7,3) \cdot (-0,13) + 7,3 \cdot 0,02 + 2,7 \cdot 0,03 + 2,7 \cdot 0,12; \\ 3) \left(\frac{3}{5} - \frac{7}{15}\right) \cdot 30 - 8 \cdot (-0,5); \\ 4) -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{5}{14}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) \cdot \frac{7}{5}; \\ 5) 2\frac{3}{5} \cdot (-0,2) \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot (-0,5). \end{array}$$

6 класс

202. Вычислите устно, применяя свойства арифметических действий:

$$\begin{array}{l} 1) 1,48 \cdot 32,6 + 1,48 \cdot 67,4; \\ 2) 13,7 \cdot 6,12 + 3,88 \cdot 13,7; \\ 3) 23,4 \cdot 72,7 - 62,7 \cdot 23,4; \\ 4) 169 \cdot 0,58 - 0,57 \cdot 169; \\ 5) \textcircled{0} 1,4 \cdot 47 + 14 \cdot 5,3; \\ 6) \textcircled{0} 0,77 \cdot 39 + 0,61 \cdot 77; \\ 7) \textcircled{0} 12 \cdot 0,37 - 32 \cdot 0,12; \\ 8) \textcircled{0} 246 \cdot 0,37 + 130 \cdot 0,246. \end{array}$$

7 класс

330. 1) Вычислите рациональным способом:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} 34 \cdot 3,4 + 6,6 \cdot 34; & \text{в)} \frac{8}{7} \cdot \frac{11}{13} + \frac{11}{13} \cdot \frac{6}{7}; \\ \text{б)} 123 \cdot 89 - 89 \cdot 23; & \text{г)} \frac{13}{17} \cdot \frac{11}{8} - \frac{3}{8} \cdot \frac{13}{17}. \end{array}$$

2) Какими свойствами арифметических действий вы воспользовались?   173

Прием сложения Гаусса

Задачи на смекалку

5 класс

222. Однажды, когда знаменитому немецкому математику Карлу Гауссу (1777—1855) было 10 лет, его школьный учитель предложил классу найти сумму чисел от 1 до 100. Как только учитель закончил диктовать задание, у Гаусса уже был готов ответ: $101 \cdot 50 = 5050$. Как рассуждал Гаусс?

Попробуйте и вы быстро вычислить:

- 1) $1 + 2 + 3 + \dots + 97 + 98 + 99$;
- 2) $1 + 3 + 5 + \dots + 995 + 997 + 999$;
- 3) $99 - 97 + 95 - 93 + 91 - 89 + \dots + 7 - 5 + 3 - 1$.

6 класс

479●. Найдите значение выражения рациональным способом:

- 1) $(-8) + (-6) + (-4) + (-2) + 0 + 2 + 4 + 6 + 8$;
- 2) $(-50) + (-49) + (-48) + \dots + 48 + 49 + 50$;
- 3) $-1 + 2 - 3 + 4 - \dots - 9 + 10 - 11$;
- 4) $-1 + 2 - 3 + 4 - \dots - 99 + 100$;
- 5) $1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 9 + (-10)$;
- 6) $1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 99 - 100$;
- 7) $2 - 4 + 6 - 8 + \dots + 98 - 100$;
- 8) $-2 + 4 - 6 + 8 - \dots - 98 + 100$.

№ 222. Гаусс, складывая числа от 1 до 100, рассуждал следующим образом. Если сгруппировать слагаемые, одинаково отстоящие от концов суммы, то получится в каждой скобке число 101, а таких скобок будет 50, следовательно, сумма равна 5050.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (49 + 52) + (50 + 51) = 101 \cdot 50.$$

(1). Эта сумма отличается от суммы Гаусса только одним членом 100. Вычтем его из известного результата: $1 + 2 + 3 + \dots + 97 + 98 + 99 = 5050 - 100 = 4950$.

Можно поступать аналогично решению Гаусса: $1 + 2 + 3 + \dots + 97 + 98 + 99 = 100 \cdot 49 + 50 = 4950$.

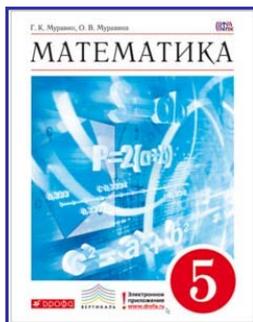
(2). $1 + 3 + 5 + \dots + 995 + 997 + 999 = (1 + 999) + (3 + 997) + (5 + 995) + \dots + (499 + 501) = 1000 \cdot 250 = 250\,000$.

(3). $99 - 97 + 95 - 93 + 91 - 89 + \dots + 7 - 5 + 3 - 1 = (99 - 97) + (95 - 93) + (91 - 89) + \dots + (7 - 5) + (3 - 1) = 2 \cdot 25 = 50$.

В № 479

рациональный способ в заданиях 1) и 2) заметить суммы противоположных слагаемых, в заданиях 3) и 4) при сложении первого числа со вторым, третьего с четвертым и т. д. получаются суммы, равные числу 1. В заданиях 5) и 6) аналогичные суммы равны -1 , в задании 7) они равны -2 , в задании 8) суммы равны 2, но можно заметить, что значение выражения 8) противоположно найденному ранее значению выражения 7).

Величины



Для перехода от одних единиц к другим удобно пользоваться схемой перевода единиц длины.

$$\text{км} \begin{array}{c} \cdot 1000 \\ \longleftrightarrow \\ : 1000 \end{array} \text{ м} \begin{array}{c} \cdot 10 \\ \longleftrightarrow \\ : 10 \end{array} \text{ дм} \begin{array}{c} \cdot 10 \\ \longleftrightarrow \\ : 10 \end{array} \text{ см} \begin{array}{c} \cdot 10 \\ \longleftrightarrow \\ : 10 \end{array} \text{ мм} \quad \text{CD}$$

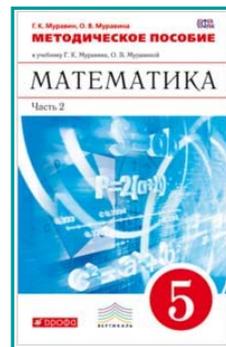
62. 1) • Объясните, как пользоваться данной схемой.  17

2) Замените многоточия числами: 

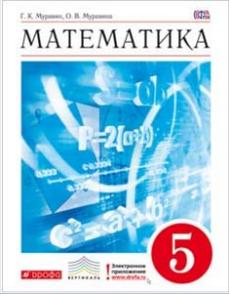
- | | |
|---------------------------|----------------------------------|
| а) 9 км = ... м; | и) 300 мм = ... см; |
| б) 4 км 600 м = ... м; | к) 2 км 341 м = ... см; |
| в) 60 дм = ... м; | л) 23 100 м = ... км ... м; |
| г) 3 км 2 м = ... м; | м) 44 мм = ... см ... мм; |
| д) 450 000 мм = ... м; | н) 547 см = ... м ... дм ... см; |
| е) 6 дм 2 см = ... см; | о) 3 234 000 мм = ... км ... м; |
| ж) 18 см = ... дм ... см; | п) 900 020 см = ... км ... дм. |

3) Выполните действия:

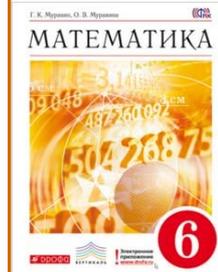
- | | |
|---------------------------|---------------------|
| а) 1 км – 12 см; | в) 3 км 5 дм – 9 дм |
| б) 2 км 20 м – 1 км 76 м; | г) 5 м – 3 дм 8 см. |



№ 62 направлен на отработку перехода от одних единиц длины к другим. Перед номером в учебнике имеется схема перехода. В ней над или под соответствующей стрелочкой указано, какое арифметическое действие нужно произвести. Так, чтобы длину, измеренную в километрах, выразить в метрах, ее нужно умножить на 1000. А чтобы длину, измеренную в миллиметрах, выразить в дециметрах, нужно дважды разделить ее на 10, т. е. разделить на 100. Эта схема обсуждается со школьниками, а затем они в своих тетрадях выполняют первый столбик задания 2 в № 62.



Координаты



75. 1) Отметьте на координатном луче с единичным отрезком, равным 1 см, точки: $O(0)$, $E(1)$, $S(5)$, $R(3)$, $T(7)$. 23
2) На этом же луче отметьте точки, которые удалены от точки T на 2 единицы. Запишите координаты этих точек.

76*. 1) Какую цену деления шкалы координатного луча вы выберете, чтобы отметить точки:
а) $A(25)$, $B(40)$, $C(62)$;
б) $D(150)$, $T(210)$, $F(550)$;
в) $K(1200)$, $L(1400)$, $M(1650)$?
2) Для каждого случая постройте координатные лучи и отметьте указанные точки.

77. Постройте координатный луч и отметьте все натуральные числа, которые: 22
1) меньше или равны 5;
2) больше 7, но меньше 9;
3) больше 11, но меньше 13;
4) больше или равны 1, но меньше или равны 6.

78*. 1) Какое из чисел, 5 или 15, расположено на координатном луче ближе к числу 11?
2) Назовите числа на координатном луче, которые удалены от числа 14 на 5 единиц.
3) Назовите какие-нибудь два числа на координатном луче, равноудалённые от числа 8.

674*. Придумайте фигуры, образованные ломаными, и последовательно запишите координаты вершин этих ломаных.

675*. Не выполняя построения четырёхугольника с координатами вершин: $(0; 0)$, $(0; 3)$, $(4; 3)$ и $(4; 0)$, Петя догадался, что это прямоугольник, и смог вычислить его периметр и площадь. Постарайтесь объяснить, на что обратил внимание Петя, и вычислите периметр и площадь этого четырёхугольника, если единичные отрезки координатных осей равны 1 см.

676*. 1) Четырёхугольники заданы координатами своих вершин. Не выполняя построения, укажите среди данных четырёхугольников прямоугольники. Есть ли среди этих прямоугольников квадраты?
а) $(-2; 1)$, $(2; 1)$, $(2; -1)$, $(-2; -1)$;
б) $(-3; 0)$, $(-3; 2)$, $(0; 3)$, $(0; 0)$;
в) $(3; 2)$, $(4; 2)$, $(3; 4)$, $(2; 4)$;
г) $(-3; -1)$, $(1; -1)$, $(1; -5)$, $(-3; -5)$;
д) $(0; 0)$, $(3; 3)$, $(6; 0)$, $(3; -3)$;
е) $(-5; 0)$, $(-2; 3)$, $(0; 1)$, $(-3; -2)$.
2) Проверьте свой ответ построением четырёхугольников.

677*. Даны координаты трёх вершин прямоугольника:
1) $(1; 0)$, $(1; -3)$, $(-1; -3)$; 3) $(2; -1)$, $(5; -1)$, $(2; 3)$;
2) $(-2; 1)$, $(3; 1)$, $(3; 2)$; 4) $(-4; 2)$, $(-4; 4)$, $(-1; 4)$.
Не выполняя построения, определите координаты четвёртой его вершины.

678*. Найдите координаты точки M — середины отрезка AB , если:
1) $A(2; 4)$, $B(8; 6)$; 3) $A(-2; -4)$, $B(-8; 6)$;
2) $A(-2; 4)$, $B(8; -6)$; 4) $A(a; c)$, $B(b; d)$.

Шкалы и координаты

Задачи на смекалку

85. Циферблат часов (рис. 8) нужно разрезать на 6 частей любой формы так, чтобы суммы чисел на каждой части были равны.
86. На вопрос: «Сколько тебе лет?» Петя ответил: «Позавчера мне было 10 лет, а в будущем году мне будет 13 лет». В каком месяце и какого числа произошёл этот удивительный диалог?

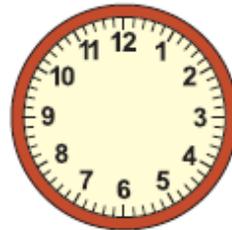
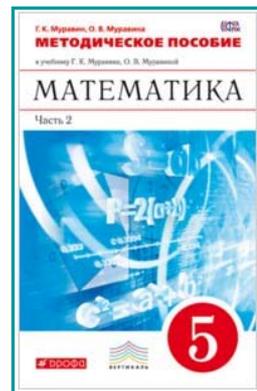
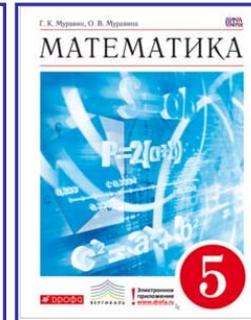


Рис. 8



Решение задач на смекалку

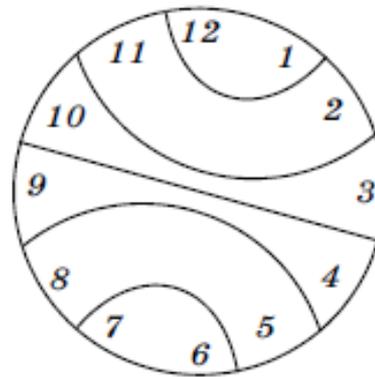
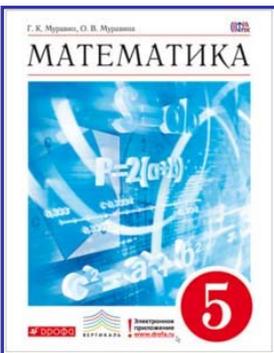


Рис. 5

№ 85. Решение показано на рисунке 5.

№ 86. Петя отмечает свой одиннадцатый день рождения 31 декабря. 30 декабря ему было 10 лет, а 1 января наступает новый год, в котором он отметит свой двенадцатый день рождения, а через год ему уже будет 13 лет. Следовательно, разговор произошел 1 января.

Шкалы и координаты



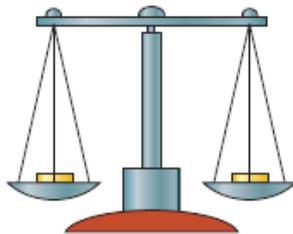
87. Кладём гирьку 1 г на левую чашку весов, затем 2 г — на правую, 3 г — вновь на левую, 4 г — на правую и т. д. до 100 г включительно. На сколько граммов груз на правой чашке весов больше?

88. Банка с мёдом весит 500 г. Такая же банка с керосином весит 350 г. Керосин легче мёда в 2 раза. Сколько весит пустая банка?

89. Старинная задача.
Портной имеет отрез сукна длиной 10 м и каждый день отрезает по одному метру. На который день он отрежет в последний раз?

90. Как, ничего не измеряя, отрезать от ленты длиной 1 м 44 см кусок длиной 27 см?

91. Два из трёх одинаковых по виду колец имеют равные массы, а третье — немного легче. Как определить это кольцо с помощью одного взвешивания на рычажных весах?



92. Два из трёх одинаковых по виду колец имеют равные массы, а третье кольцо имеет другую массу. Как определить это кольцо с помощью двух взвешиваний на рычажных весах?

№ 87. Кладем гири 50 раз парами: 1 г — на левую чашку весов, 2 г — на правую и т. д. Каждая такая пара гирь дает превышение на правой чашке весов на 1 г. Следовательно, полное превышение массы составит 50 г.

Ответ: на 50 г.

№ 88. Обозначим все банки буквой Б, меда — буквой М, керосина — буквой К и по условию задачи составим равенства: $Б + М = 500$, $Б + К = 350$, $М = 2К$. Подставим в первое равенство вместо М его значение $2К$, получим $Б + 2К = 500$, $350 + К = 500$, $К = 500 - 350$, $К = 150$.

Подставим значение К во второе равенство и найдем вес банки: $Б + 150 = 350$, $Б = 200$ (г).

Ответ: 200 г.

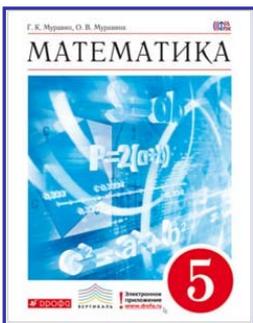
№ 89. Ответ: на девятый день.

№ 90. Сгибая ленту несколько раз пополам, можно отмерить половину, четверть, восьмую, шестнадцатую часть от имеющегося куска.

$144 : 16 = 9$ см, три такие части образуют 27 см.

№ 91. Два кольца положить на разные чаши рычажных весов, а третье оставить лежать на столе. Если весы уравниваются, значит, легкое кольцо лежит на столе. Если весы не уравниваются, то легкое кольцо лежит на поднявшейся чаше, которая оказалась легче.

Наглядная геометрия



102. 1) Начертите отрезок AB длиной 3 см и с помощью циркуля проведите две окружности, центрами которых являются точки A и B , а радиусы равны 2 см. 32

2)• Как расположены точки пересечения построенных окружностей по отношению к концам отрезка? 33

103. 1) Начертите отрезок AB длиной 3 см и с помощью циркуля отметьте все точки, которые удалены от его концов:

а) на 2 см; б) на 25 мм; в) на 3 см; г) на 35 мм.

2)• Выскажите *гипотезу* (предположение): на какой линии расположены точки, равноудалённые от концов отрезка.

104•. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называют *хордой*. Докажите, что диаметр — это самая длинная хорда.

Комментарии к заданиям учебника

В № 102 ученики сначала проводят луч, затем от его начала отмеряют 3 см. Далее по линейке устанавливают раствор циркуля, равный 2 см, и проводят окружности с центрами в точках A и B . Ученики должны сказать, что получившиеся точки пересечения этих окружностей *равноудалены* от концов отрезка AB .

№ 103 выполняется в тетрадях и на доске. Здесь можно не следовать сформулированной ранее рекомендации о целесообразности скрытного выполнения задания на доске. Размеры рисунка на доске берутся в 10 раз больше, чем при выполнении его в тетради. Точки должны оказаться на одной прямой. Эта прямая проходит через середину отрезка AB , и здесь мы пока не говорим о перпендикулярности.

Материалы для устной работы с № 104

Учитель *изображает от руки* окружность, отмечает ее центр, проводит хорду, которая не является диаметром, и говорит, что радиус этой окружности равен, например, 50 см. Чему равен диаметр этой окружности? [$50 \cdot 2 = 100$ (см).]

Значит, нужно доказать, что длина хорды меньше диаметра. Как это доказать? [Измерить.]

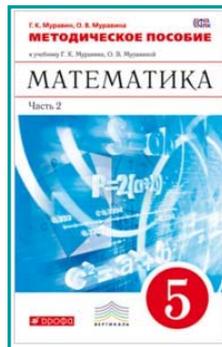
Но измерением мы сможем доказать только, что именно эта хорда меньше диаметра, а нам нужно рассуждение, которое можно отнести к любой хорде. Вспомним, что диаметр — это два радиуса, и изобразим на рисунке два радиуса. В какие точки окружности их провести? [В концы хорды.]

Как называется линия, которую образовали эти два радиуса? [Ломаная.]

Какой вывод можно сделать, сравнивая эту ломаную с хордой? [Ломаная больше хорды.]

Какая самая большая хорда? [Диаметр.]

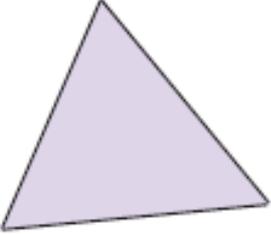
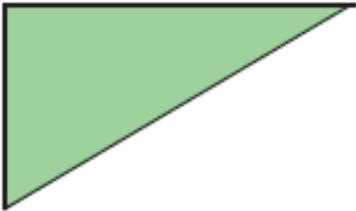
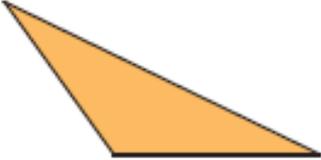
В конце урока учитель предлагает школьникам игру, в которой учитель говорит начало определения, а ученики продолжают его.



Наглядная геометрия

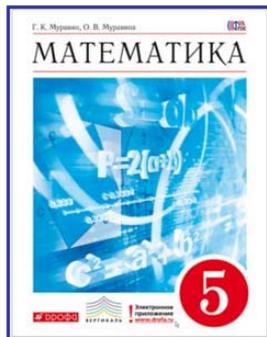
116●. На прямой отложите отрезки $AB = 5$ см и $BC = 7$ см. Найдите длину отрезка AC . От чего будет зависеть ответ?

125●. 1) Как вы думаете, почему данные треугольники так называются?

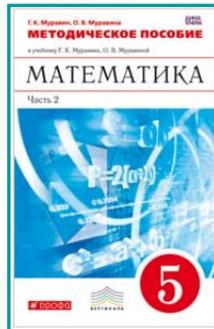
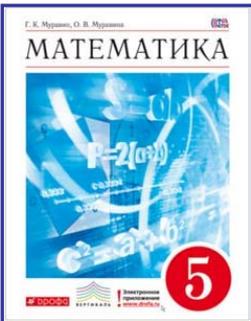
		
Остроугольный	Прямоугольный	Тупоугольный

2) Можно ли определить вид треугольника, зная, что у него есть: а) тупой угол; б) прямой угол; в) острый угол?

Если вид треугольника определить нельзя, укажите, что ещё нужно о нём знать.



Наглядная геометрия



Задачи на смекалку

131. Планировка прямоугольных участков садового кооператива показана на рисунке 29. У хозяина каждого участка можно узнать периметр его участка. Какое наименьшее число хозяев надо опросить, чтобы узнать внешний периметр всего садового кооператива?

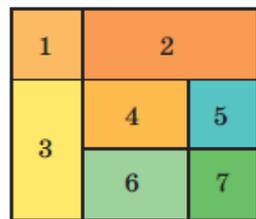


Рис. 29

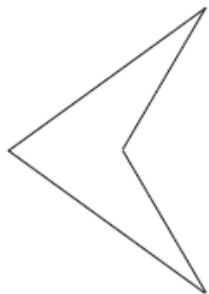


Рис. 30

133. Начертите 3 прямые и отметьте на каждой из них по 2 точки так, чтобы на рисунке в итоге оказались отмечены всего 4 точки. Покажите все случаи.

Решение задач на смекалку

№ 131. Зная периметр какого-либо одного участка, определить внешний периметр садового кооператива невозможно. Сумма периметров второго и третьего участков равна внешнему периметру всего садового кооператива. Следовательно, достаточно опросить двух хозяев, а именно хозяев второго и третьего участков.

№ 132. Решение показано на рисунке 14. Эту задачу можно выполнить в рабочей тетради (№ 40).

№ 133. Сначала рассмотрим всевозможные случаи расположения трех прямых, а затем расставим на них точки. Решения задачи показаны на рисунке 15 (б—г).

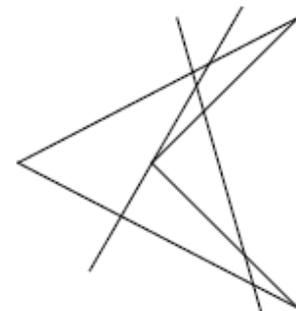


Рис. 14

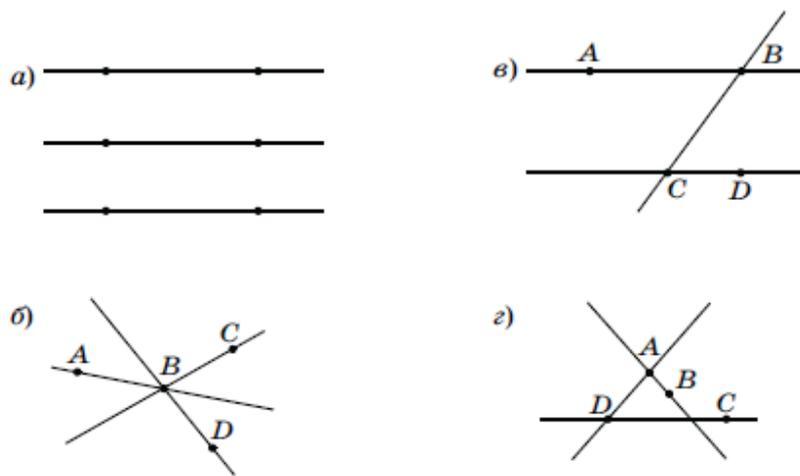


Рис. 15

Наглядная геометрия

Практикум по развитию пространственного воображения

922. На каркасе пирамиды натянут шнур (рис. 189). Укажите, какие отрезки этого шнура соприкасаются друг с другом не на каркасе пирамиды.

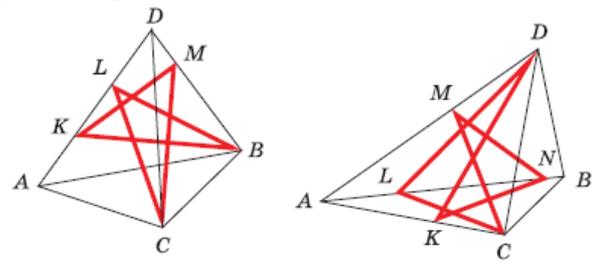


Рис. 189

923. На каркасе прямой призмы натянут шнур (рис. 190). Укажите, какие отрезки этого шнура соприкасаются друг с другом не на каркасе призмы.

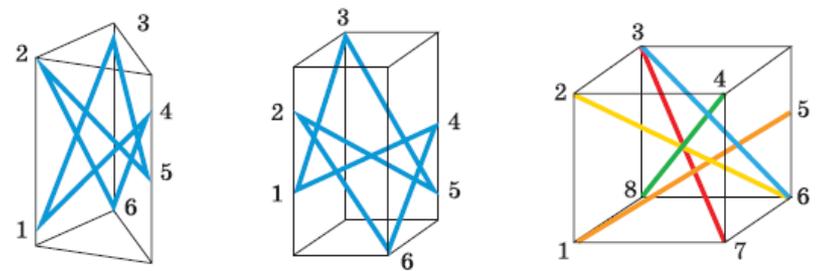


Рис. 190

Рис. 191

924. На каркасе куба натянуты разноцветные шнуры (рис. 191).
1) Какие из шнуров соприкасаются внутри куба?
2) Сравните длины шнуров.

925. На рисунке 192 хотели изобразить 5 одинаковых кубиков, но изображение последнего кубика не закончили. Какие фигуры должны быть на его гранях? **276**



Рис. 192

926. На любых двух противоположных гранях игрового кубика в сумме 7 очков. Это значит, что у кубика на рисунке 193 на задней грани 4 очка, на левой — 5 очков, а на нижней — 6 очков. Кубик перекатывают с грани на грань по пути, который изображён квадратами на рисунке 193. Укажите число очков грани, которая встанет на соответствующий квадрат маршрута кубика. **277**

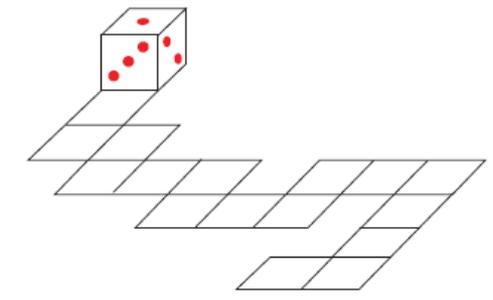


Рис. 193

927. На рисунке 194 изображён кубик (игральная кость) и его развёртка. Заполните пустые квадраты других вариантов его развёртки. **278**

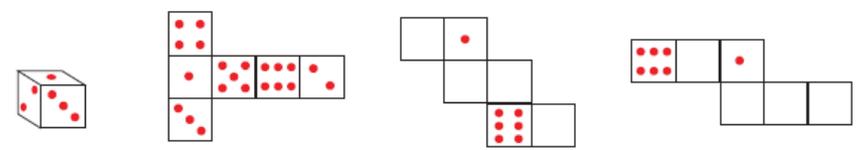
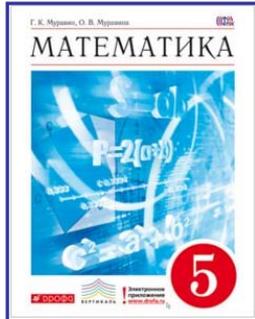


Рис. 194

Буквенные выражения



321●. На координатном луче (рис. 103) отмечены точки 1 и a . Расскажите, как отметить на луче с помощью циркуля точки: 1) $2a$; 2) $a - 1$; 3) $a + 3$; 4) $3a + 2$. 112



Рис. 103

322●. Точка A имеет координату a .

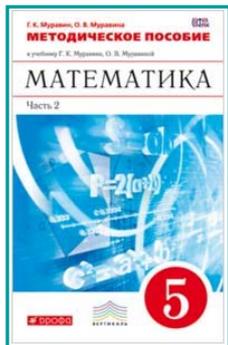
- 1) Какие координаты имеют точки B , C и D (рис. 104)?
- 2) Координата точки B (рис. 105) равна $a + 1$. Какую координату имеет точка F ? 113–115



Комментарии к заданиям учебника

В № 321 луч полезно изобразить на доске и предлагать отвечающему ученику показывать на нем, как построить соответствующую точку.

В № 322 особенно важно задание 2, так как в нем школьники встречаются с фрагментом луча, не содержащим его начала.



Буквенные выражения

3) Мама принесла домой a яблок. Из них b яблок она дала сыну и c яблок дочери. Сколько яблок у неё осталось?

4) В автобусе едут a мужчин и b женщин. На остановке вышло c пассажиров. Сколько пассажиров осталось в автобусе?

5) В графине было a литров воды. Сначала отлили b литров, затем c литров. Сколько литров воды осталось?  116

326°. Нарезной батон стоит a р., а пирожное — b р.

1) Сколько стоят:

а) 5 батонов; б) 7 пирожных; в) 2 батона и 3 пирожных?

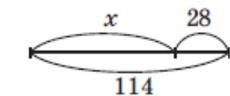
2) На сколько пирожное дороже батона?

3) На сколько дешевле одно пирожное, чем три батона?

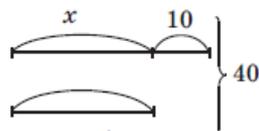
4) Во сколько раз 5 батонов дороже, чем 2 пирожных?

327°. Одно число m , а другое число на 13 меньше. Запишите в виде буквенного выражения: 1) разность; 2) сумму этих чисел. Упростите полученное выражение и найдите его значение при $m = 17$.

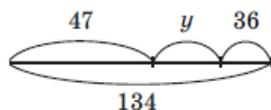
358. По схеме, изображённой на рисунке 110, запишите уравнение и решите его. 



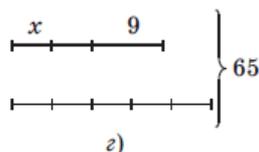
а)



в)



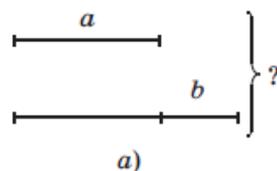
б)



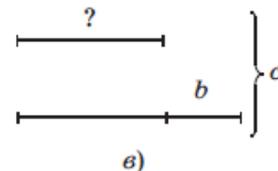
г)

№ 324—326 (а также 327, 328, которые будут предложены на следующем уроке) исключительно важны для дальнейшей работы по обучению решению текстовых задач. Учитель должен добиваться уверенной интерпретации смысла буквенного выражения и составления буквенного выражения по данному условию. У некоторых учеников, которые легко составляли по тексту задач числовые выражения, буквенные данные вызывают серьезные затруднения. Одним из довольно эффективных приемов работы с этими учениками является временная замена в условии задачи букв на числовые данные. Значения букв при этом записываются в виде равенств, а затем в составленном выражении осуществляется обратная замена.

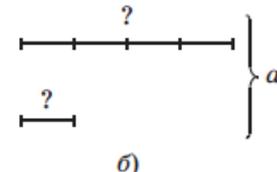
328. На схемах (рис. 106) обозначены длины отрезков. Фигурная скобка показывает сумму их длин. Какое буквенное выражение должно стоять на месте знака вопроса? 



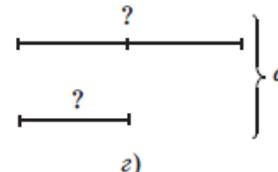
а)



в)



б)

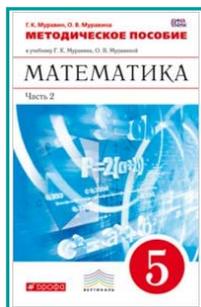
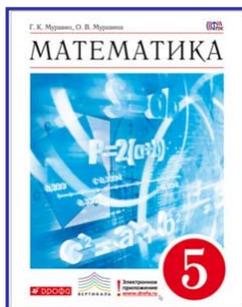


г)

Буквенные выражения

Задачи на смекалку

333. Какие цифры нужно поставить вместо букв A и B , чтобы получилось верное равенство $AB \cdot A \cdot B = BBB$?  111
334. В равенстве $МУХА \cdot А = СЛОН$ нужно буквы заменить цифрами от 1 до 8. Известно, что вместо буквы A нужно поставить цифру 2. Восстановите числовое равенство.
335. На прямой через равные промежутки поставили 10 точек, которые заняли отрезок длины a . На другой прямой через такие же промежутки поставили 100 точек, и они заняли отрезок длины b . Во сколько раз a меньше b ?
336. Кусок проволоки длиной x футов разрезали на 6 равных кусков по 2 фута 4 дюйма. Найдите величину x , зная, что в одном футе двенадцать дюймов.
337. Число x равно сумме первых 20 натуральных чисел, а число y равно сумме первых 10 натуральных чисел. На сколько число x больше, чем число y ?



Решение задач на смекалку

№ 333. В равенстве $AB \cdot A \cdot B = BBB$ правую часть можно записать иначе, $BBB = B \cdot 111$, $111 = 3 \cdot 37$, $AB \cdot A \cdot B = B \cdot 3 \cdot 37$. Очевидно, что $A = 3$, $B = 7$, т. е. получаем, что $37 \cdot 3 \cdot 7 = 777$.

№ 334. Заменяем букву A на цифру 2, получим $МУХ2 \cdot 2 = СЛОН$. Осталось семь букв и столько же цифр. Так как последняя цифра в первом множителе 2 и умножается число на 2, то $H = 4$. Осталось шесть букв и шесть цифр — это 1, 3, 5, 6, 7, 8. Заметим, что умножается четырехзначное число на 2, и в результате получается четырехзначное число. Следовательно, первой цифрой могут быть цифры: 1 или 3 (цифры 2 и 4 уже заняты). Методом проб и ошибок подбираем остальные цифры.

Ответ: $3582 \cdot 2 = 7164$.

№ 335. Когда на прямой поставили 10 точек через равные промежутки, получился отрезок длиной a , состоящий из девяти равных частей. А отрезок длиной b состоит из 99 таких же частей. Число 99 больше числа 9 в 11 раз.

Ответ: в 11 раз.

№ 336. Переведем длину одной части в дюймы: 2 фута 4 дюйма = $12 \cdot 2 + 4 = 28$ дюймов. Найдём длину проволоки:

$28 \cdot 6 = 168$ (дюймов), $168 : 12 = 14$ (футов).

Ответ: 14 футов.

№ 337. Заметим, что $x = y + 11 + 12 + \dots + 19 + 20$. Тогда $x - y = 11 + 12 + \dots + 19 + 20 = (11 + 20) + (12 + 19) + \dots + (15 + 16) = 31 \cdot 5 = 155$.

Ответ: на 155.

Понятие о долях и дробях

390. Длина отрезка CD равна 3 см. Найдите длину отрезка MN , если:

1) $CD = \frac{1}{2} MN$;

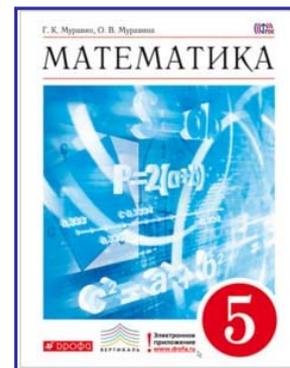
4) $CD = \frac{3}{5} MN$;

2) $CD = \frac{1}{3} MN$;

5) $\bullet CD = \frac{4}{3} MN$;

3) $CD = \frac{3}{2} MN$;

6) $\bullet CD = \frac{5}{3} MN$.



395 \bullet . Длина отрезка LK составляет $\frac{5}{3}$ от длины отрезка MN .

Какой частью длины отрезка LK является длина отрезка MN ?

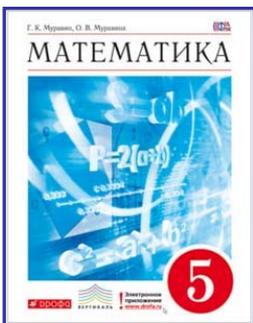
396 \bullet . Лев Толстой как-то заметил, что человек — это дробь, числитель которой — то, что думают о нём другие, а знаменатель — что думает о себе он сам. Как вы считаете, какой дробью, правильной или неправильной, лучше быть? А вы себя какой дробью считаете?

№ 395. Образец рассуждения.

Длина отрезка LK составляет $\frac{5}{3}$ от длины отрезка MN — это значит, что отрезок MN разделен на 3 равные части, а отрезок LK состоит из пяти таких частей. Значит, отрезок MN состоит из трех пятых долей отрезка LK и $MN = \frac{3}{5} LK$.



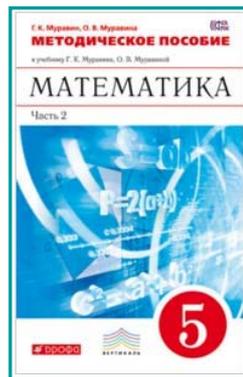
Треугольники



438●. На рисунке 131 изображён четырёхугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны.  157, 158

- 1) Каким треугольником является треугольник ABH ? Чему равна его площадь?
- 2) Каким треугольником является треугольник CBH ? Чему равна его площадь?
- 3) Чему равна площадь треугольника ABC ?
- 4) Чему равна площадь треугольника ADC ?
- 5) Чему равна площадь четырёхугольника $ABCD$?
- 6) Сделайте вывод о том, чему равна площадь четырёхугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны.

439●. Одна диагональ ромба на 15 см больше другой, а их сумма равна 93 см. Найдите площадь этого ромба.



№ 438 можно дополнить вопросами.

1) Чему равна площадь треугольника ABD ?

$$\left[\frac{BD \cdot AH}{2} \right]$$

2) Чему равна площадь треугольника CBD ?

$$\left[\frac{BD \cdot CH}{2} \right]$$

Записи, как результат обсуждения, учитель производит на доске. Ученики в тетрадях их либо вообще не делают, либо запишут после завершения работы с задачей.

Площадь четырехугольника $ABCD$ в задании 5 можно найти так:

$$\frac{BD \cdot AH}{2} + \frac{BD \cdot CH}{2} =$$

$$= \frac{BD \cdot AH + BD \cdot CH}{2} = \frac{BD(AH + CH)}{2} = \frac{BD \cdot AC}{2}.$$

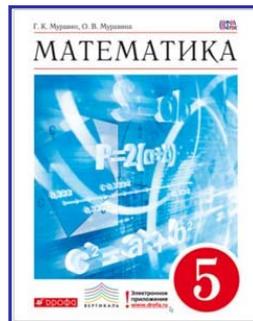
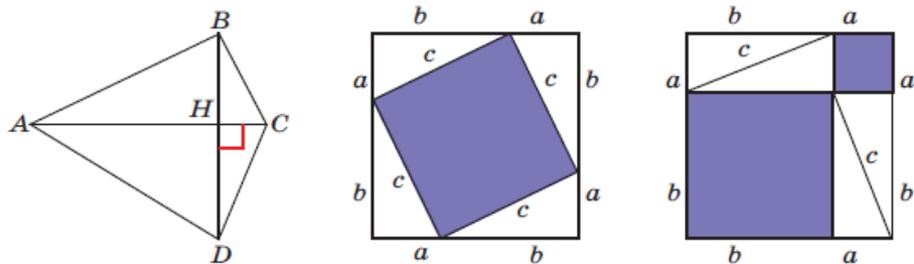
В задании 6 вывод должен быть следующим: *площадь четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны, равна половине их произведения.*

С помощью этого вывода решается задача № 439. Ее можно решать устно способом уравнивания, но можно и письменно, составляя уравнение.

Треугольники

С прямоугольным треугольником связана одна из самых знаменитых теорем геометрии — *теорема Пифагора*. Греческое слово *теорема* означает «доказанное утверждение». Теорема Пифагора задаёт соотношение между катетами a и b и гипотенузой c прямоугольного треугольника. Докажем её.

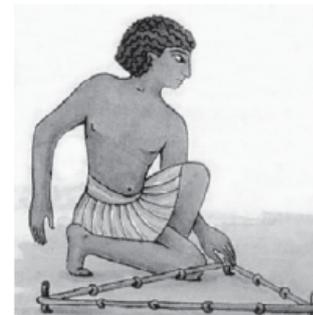
На рисунке 132 квадрат со стороной $a + b$ разрезан на части двумя способами. Если убрать из каждого квадрата по четыре равных белых треугольника, то площади оставшихся частей квадратов будут равны. На первом рисунке останется квадрат со стороной c , а на втором — два квадрата со сторонами a и b . Значит, $c^2 = a^2 + b^2$.



Теорема Пифагора

Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов.

440●. В Древнем Египте ещё за 2000 лет до нашей эры прямой угол строили так. На верёвке на равных расстояниях друг от друга и от концов завязывали 11 узелков. Затем концы верёвки связывали так, чтобы образовавшийся узел оказался на таком же расстоянии от соседних с ним. Верёвку растягивали, держа за узелки так, что между первым и вторым растягивающим было 2 узелка, а между вторым и третьим — три узелка. Построением прямых углов занимались специалисты *гарпедонапты* — натягиватели верёвок, которые не посвящали в тайну построения прямого угла посторонних египтян. 🗎



- 1) Сколько узелков было между первым и третьим растягивающим?
- 2) Если расстояние на натянутой верёвке между двумя соседними узелками равно 1 м, то какова длина верёвки с узелками?
- 3) Каковы длины сторон получившегося треугольника?
- 4) Проверьте, равна ли сумма квадратов двух из сторон этого треугольника квадрату его третьей стороны.

441●. Используя теорему Пифагора, докажите, что гипотенуза длиннее катета. 🗎 📖 159

Только у прямоугольных треугольников сумма квадратов двух сторон равна квадрату третьей стороны.

Треугольники

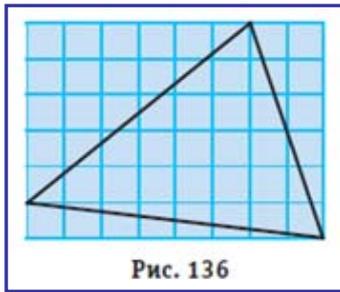


Рис. 136

447. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 136, зная, что площадь клетки равна $\frac{1}{4}$ см².

№ 447. Обозначим вершины прямоугольника и треугольника, как показано на рисунке 48. Так как одна сторона прямоугольника $ABCD$ содержит 8 ед., а другая — 6 ед., то площадь прямоугольника равна $8 \cdot 6 = 48$ (ед.²). Для нахождения площади треугольника EFD необходимо из площади прямоугольника $ABCD$ вычесть площади треугольников AED , EBF , FCD . Площадь каждого из этих треугольников равна половине произведения соответствующих катетов. Получаем

$$48 - (1 \cdot 8 : 2 + 5 \cdot 6 : 2 + 2 \cdot 6 : 2) = 23 \text{ (ед.²)}.$$

Рис. 48

Остается узнать, чему равна площадь одной клетки. С помощью линейки выясняем, что она равна $\frac{1}{4}$ см². Значит, площадь треугольника в см² равна $\frac{1}{4} \cdot 23 = \frac{23}{4}$ (см²).

Ответ: $\frac{23}{4}$ см².

Задачи на смекалку

448. Разрежьте тупоугольный треугольник на остроугольные так, чтобы не осталось лишних частей.

№ 448. Построим тупоугольный треугольник ABC (рис. 49). Из вершины C проведем отрезок CO , не доводя его до пересечения со стороной. Так как если он пересечет сторону, то один из образовавшихся треугольников окажется тупоугольным или прямоугольным (что нас не устраивает, так как задача по сути дела сведется к первоначальной). Чтобы треугольники с общей вершиной O были остроугольными, нужно провести пять отрезков до пересечения со сторонами треугольника, так как сумма углов при этой вершине равна 360° . Точки пересечения отрезков со сторонами треугольника ABC соединим. Все полученные треугольники остроугольные.

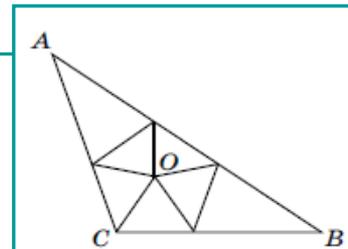
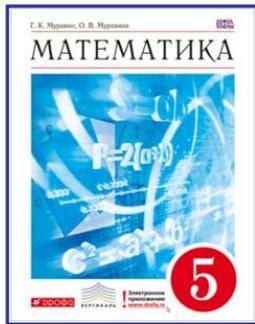


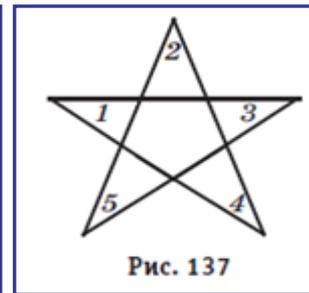
Рис. 49

Треугольники



449. Найдите сумму пронумерованных углов пятиконечной звезды (рис. 137).

450. Начертите квадрат и покажите, как его разрезать по одной прямой линии на две неравные части так, чтобы из них можно было сложить треугольник. Какую часть от площади квадрата составляет площадь большей из полученных частей? 



№ 449. Соединим вершины нижних лучей звезды (рис. 50). Углы 2, 4, 5 вместе с «лишними» углами 6 и 7 в сумме дают 180° . Но сумма углов 6 и 7 равна сумме углов 1 и 3, так как вместе с равными вертикальными углами M в соответствующих тре-

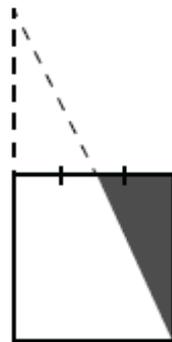
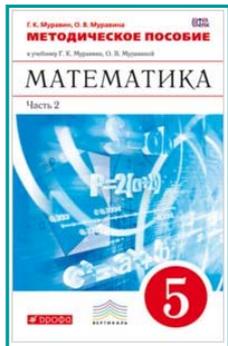


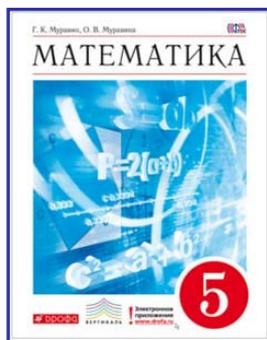
Рис. 51

угольниках они составляют 180° . Значит, сумма всех пяти пронумерованных изначально углов равна 180° .

№ 450. Один из катетов закрашенного прямоугольного треугольника в два раза меньше стороны квадрата, поэтому произведение катетов в 2 раза меньше площади квадрата (рис. 51). Кроме того, площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов. Значит, она равна половине от половины площади квадрата, т. е. $\frac{1}{4}$ его площади, значит, площадь большей

части составит $\frac{3}{4}$ площади квадрата.





Деление на дробь

- 617●.** 1) Первая труба может наполнить бассейн за 45 мин, а две трубы при совместной работе наполняют его за 18 мин. За сколько минут бассейн может наполнить одна вторая труба?
- 2) Две машины выехали навстречу друг другу из пунктов A и B и встретились через 24 мин. Первая машина проехала от A до B за 40 мин. За сколько минут вторая машина проедет от B до A ?

№ 617 (1). Образец оформления решения задачи.

① $1 : 45 = \frac{1}{45}$ (б.) — заполняет первая труба за 1 мин.

② $1 : 18 = \frac{1}{18}$ (б.) — заполняют обе трубы за 1 мин.

③ $\frac{1}{18} - \frac{1}{45} = \frac{5-2}{90} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$ (б.) — заполняет вторая труба за 1 мин.

④ $1 : \frac{1}{30} = 30$ (мин) — заполняет вторая труба весь бассейн.

Ответ: за 30 мин.

В начале урока следует разобрать со школьниками № 617 (2) из домашнего задания. Решение можно записать следующим образом.

① $\frac{1}{24} - \frac{1}{40} = \frac{5-3}{120} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$ (пути) — проехала вторая машина за 1 мин.

② $1 : \frac{1}{60} = 60$ (мин) — затратит вторая машина на путь от B до A .

Ответ: за 60 мин.

Умножение десятичных дробей

707●. Сравните значения выражений:

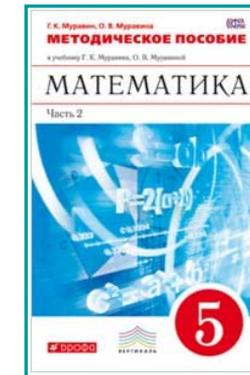
- | | |
|--|--|
| 1) $3,45 \cdot 92,3$ и $34,5 \cdot 9,23$; | 4) $6,5 \cdot 0,01$ и $6,5 \cdot 0,001$; |
| 2) $87,3 \cdot 2,5$ и $8,73 \cdot 2,5$; | 5) $6,02 \cdot 0,23$ и $0,602 \cdot 2,3$; |
| 3) $0,37 \cdot 0,38$ и $3,7 \cdot 3,8$; | 6) $5,9 : 1000$ и $5,9 \cdot 0,01$. |

708●. Вставьте пропущенную запятую так, чтобы получилось верное равенство:  261

- | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $35,47 \cdot 12 = 42564$; | 4) $0,15 \cdot 2,3 = 345$; |
| 2) $4,56 \cdot 382 = 174192$; | 5) $5,46 \cdot 3,08 = 168168$; |
| 3) $123,2 \cdot 200 = 246400$; | 6) $0,456 \cdot 0,382 = 174192$. |

709●. Вычислите рациональным способом:

- 1) $23,4273 \cdot 5 + 76,5727 \cdot 5 + 6,346$;
- 2) $6,4 \cdot 456 : 100 - (37,9 - 33,34) \cdot 6,4$;
- 3) $45,3 \cdot 0,5 \cdot 2 + 0,25 \cdot 5,7 \cdot 4$;
- 4) $4034 : 1000 + 7,84 \cdot 1,25 - 4034 \cdot 0,001$;
- 5) $1,1^2 + 2,34^2 - 11^2 : 100 - 234^2 : 10\ 000$;
- 6) $2,5 \cdot 0,4 \cdot 50 \cdot 0,02 + 0,5^2 \cdot 74,8 \cdot 0,4$;
- 7) $123,45 \cdot 6,789 - 678,9 \cdot 1,2345$;
- 8) $12,34 \cdot 567,89 - 56,789 \cdot 123,4$.



В задании № 709 (5) учащиеся наверняка испытают затруднения, тогда и придется с ними отдельно разобрать преобразования:

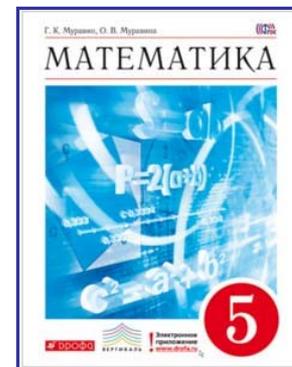
$$11^2 : 100 = 11 \cdot 11 : 10 : 10 = (11 : 10)(11 : 10) = 1,1 \cdot 1,1 = 1,1^2;$$

$$234^2 : 10\ 000 = 234 \cdot 234 : 100 : 100 = (234 : 100)(234 : 100) = 2,34 \cdot 2,34 = 2,34^2.$$

Задачи на проценты

824●. Прочитайте задачу и скажите, какая величина принята за 100%. Известна ли эта величина? Как найти 1%? Как ответить на вопрос задачи?

- 1) В банке по некоторому вкладу начисляют 11% годовых. Это значит, что внесённая сумма через год увеличивается на 11%. На сколько увеличится вклад, составляющий 2500 р., через год?
- 2) В банке по некоторому вкладу начисляют 11% годовых. Через год сумма на вкладе увеличилась на 561 р. Какая сумма была внесена в банк?
- 3) В банк положили 3200 р., а через год на счету оказалось на 256 р. больше. Сколько процентов годовых начислил банк по этому вкладу?



831. 1) Размер единого социального налога составляет 13%. Сколько рублей нужно заплатить с суммы:
- | | |
|----------------|------------------|
| а) 20 000 р.; | в) 500 000 р.; |
| б) 150 000 р.; | г) 1 000 000 р.? |
- 2) Какой будет заработная плата после повышения на 23%, если до повышения она составляла:
- | | | |
|-------------|-------------|---------------|
| а) 2500 р.; | б) 5600 р.; | в) 10 000 р.? |
|-------------|-------------|---------------|
- 3) В магазине идёт распродажа товаров со скидкой 15%. Найдите новые цены товаров, которые имели первоначально цену:
- | | | | |
|-------------|---------------|---------------|-----------|
| а) 2250 р.; | б) 15 300 р.; | в) 10 500 р.; | г) 450 р. |
|-------------|---------------|---------------|-----------|

976. В магазине одежды Максим выбрал рубашку за 700 р. и брюки за 2500 р. Оказалось, что в магазине в это время проводилась акция, согласно которой при покупке двух вещей делается скидка 30%. Сколько сдачи Максим должен получить с 5000 р. при оплате своей покупки?

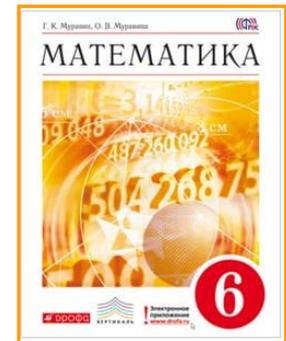
976. *Ответ:* 2700 р. *Решение.* Во время акции цена двух вещей составляет $100\% - 30\% = 70\%$. Значит, Максим должен получить $5000 - (700 + 2500) \cdot 0,7 = 5000 - 2240 = 2760$ р.

Изменение процентной базы

Задача 2. В течение года цена проезда на общественном транспорте повышалась дважды: сначала на 20%, а затем ещё на 25%. На сколько процентов выросла цена проезда за год? 

Решение. Пусть в начале года цена проезда была равна a р. Тогда после первого повышения на 20% она стала равной $1,2a$ р. При втором повышении на 25% увеличивается уже новая цена, т. е. за 100% принимается $1,2a$ р. Окончательная цена равна $(1,2a) \cdot 1,25 = 1,5a$ (р.). За год цена увеличилась в 1,5 раза, т. е. на 50%.

Ответ: на 50%.



579. 1) Цена товара составляла 12 тыс. р. Через месяц товар подорожал на 5%, а ещё через месяц его цену снизили на

10%. Какой стала цена товара через два месяца?  178

2) Цена товара составляла 12 тыс. р. Через месяц цена снизилась на 5%, а через месяц после этого — ещё на 10%. Какой стала цена товара через 2 месяца?

580. В первом магазине цену товара снизили сначала на 10%, а затем ещё на 10%. Во втором магазине цену аналогичного товара сразу снизили на 20%. В каком из этих двух магазинов данный товар стал дешевле?  179

Изменение процентной базы

581. В банк на срочный вклад положили 30 тыс. р. Банк начисляет на сумму вклада 10% в год. Если клиент не снимает деньги со своего счёта, то через год проценты по вкладу *капитализируются*, т. е. прибавляются к сумме вклада. Какая сумма будет на счёте клиента, который не снимал деньги: 1) через год; 2) через два года; 3) через три года?



891. 2) Авансом рабочий получил 5530 р., что составило 35% его заработной платы. Какова зарплата рабочего?

5) Цена товара снизилась с 240 до 150 р. На сколько процентов подешевел товар?

8) Банк ежемесячно начисляет 5% к находящейся на вкладе сумме. На сколько рублей увеличится вклад через 2 месяца, если первоначальный вклад составил 4000 р.?

9) Цена на некоторый товар была снижена дважды — сначала на 15%, а затем ещё на 20%. На сколько процентов снизилась первоначальная цена после обеих уценок?

10)* Цена некоторого товара была повышена сначала на 10%, затем ещё на 120 р. и, наконец, ещё на 5%. Какова была первоначальная цена товара, если в результате повышения составило 31,25%?

581. *Ответы:* 1) 33 тыс. р.; 2) 36 300 р.; 3) 39 930 р.

891. *Ответы:* 2) 15 800 р.; 5) на 37,5%; 8) на 410 р.; 9) на 32%. *Решение.* Пусть первоначальная цена была c р., тогда после первого снижения она стала равна $0,85c$ р., а после второго снижения $0,85c \cdot 0,8 = 0,68c$ р. Значит, первоначальная цена снизилась на $\frac{c - 0,68c}{c} \cdot 100\% = 32\%$. 10) 800 р. *Решение.*

Пусть первоначальная цена товара была c р. Тогда после первого повышения она стала равной $1,1c$ р., после второго — $1,1c + 120$ р. и после третьего — $(1,1c + 120) \cdot 1,05$ р. Эту же цену можно записать как $1,3125c$ р. Составляем и решаем уравнение: $(1,1c + 120) \cdot 1,05 = 1,3125c$; $1,1c + 120 = 1,25c$; $0,15c = 120$; $c = 800$ (р.).



Задачи на сплавы и смеси

581. В банк на срочный вклад положили 30 тыс. р. Банк начисляет на сумму вклада 10% в год. Если клиент не снимает деньги со своего счёта, то через год проценты по вкладу прибавляются к сумме вклада. Какая сумма будет на счёте клиента, который не снимал деньги:

1) через год; 2) через два года; 3) через три года?

582. Ежемесячный доход семьи увеличился в первом квартале на 7%, а во втором — на 10%. На сколько процентов увеличился ежемесячный доход семьи за два квартала?

583. 1) Каким будет процентное содержание сахара в сиропе, который получится после того, как к 150 г 75%-го раствора сахара добавить 100 г воды?

2) Каким будет процентное содержание сахара в сахарном растворе, который получится после того, как к 120 г 50%-го сахарного сиропа добавить 80 г воды?

▼ Рассмотрим задачи на сплавы, смеси и растворы, при решении которых приходится составлять уравнения.

Задача 3. После добавления к 10 кг сплава меди с оловом 2 кг олова процентное содержание меди в сплаве понизилось на 10%. Сколько килограммов меди в сплаве?

Решение. Пусть в сплаве содержится x кг меди. Тогда до добавления олова её процентное содержание в сплаве было равно $\frac{x}{10} \cdot 100\%$.

После добавления олова масса меди в сплаве не изменилась, а масса сплава увеличилась на 2 кг и стала равной 12 кг. Процентное содержание меди в новом сплаве равно $\frac{x}{12} \cdot 100\%$.

По условию задачи новое процентное содержание меди на 10% меньше начального, значит, $\frac{x}{10} \cdot 100 - \frac{x}{12} \cdot 100 = 10$. Решаем полученное уравнение: $x - \frac{5x}{6} = 1$, $6x - 5x = 6$, $x = 6$ (кг).

Ответ: 6 кг. 175, 176

584. К 4 кг сплава золота с серебром добавили 1 кг золота.

1) При этом процентное содержание золота в сплаве увеличилось на 15%. Сколько килограммов золота было в сплаве первоначально? 180

2) При этом процентное содержание серебра в сплаве понизилось на 10%. Сколько килограммов серебра в сплаве?

585. После добавления 2 кг меди к 10 кг сплава меди с оловом процентное содержание меди в сплаве повысилось на 10%. Сколько килограммов меди стало в сплаве?

586. 1) Сколько граммов сахара нужно добавить к 100 граммам 25%-го сахарного раствора, чтобы получился 50%-й сахарный раствор?

2) Сколько граммов воды нужно добавить к 120 граммам 75%-го сахарного сиропа, чтобы понизить концентрацию сахара в сиропе на 25%?

587. Сколько граммов 30%-го сахарного сиропа следует развести водой, чтобы получить 100 г 15%-го сахарного сиропа?

588. Чтобы получить 6%-й столовый уксус, 70%-ю уксусную эссенцию разбавляют водой.

1) Сколько граммов воды нужно добавить к 30 г уксусной эссенции, чтобы получить столовый уксус?

2) Сколько граммов уксусной эссенции нужно взять для получения 200 г столового уксуса?

Задачи на смекалку

589. Вчера число учеников, присутствующих в классе, было в 8 раз больше, чем отсутствующих. Сегодня не пришли ещё 2 ученика, и оказалось, что число отсутствующих составляет 20% от числа присутствующих. Сколько учеников в классе?

590. Каждая девочка в классе дружит с тремя мальчиками, а каждый мальчик дружит с двумя девочками. Сколько процентов от числа всех учащихся в этом классе составляют девочки?

Задачи на сплавы и смеси

584●. К 4 кг сплава золота с серебром добавили 1 кг золота.

1) При этом процентное содержание золота в сплаве увеличилось на 15%. Сколько килограммов золота было в сплаве первоначально?  180

2) При этом процентное содержание серебра в сплаве понизилось на 10%. Сколько килограммов серебра в сплаве?

585. После добавления 2 кг меди к 10 кг сплава меди с оловом процентное содержание меди в сплаве повысилось на 10%. Сколько килограммов меди стало в сплаве?

586●. 1) Сколько граммов сахара нужно добавить к 100 граммам 25%-го сахарного раствора, чтобы получился 50%-й сахарный раствор?

2) Сколько граммов воды нужно добавить к 120 граммам 75%-го сахарного сиропа, чтобы понизить концентрацию сахара в сиропе на 25%?

№ 584. Сразу ясно, что масса сплава стала равной 5 кг и что масса серебра не изменилась, значит, имеет смысл принять ее за x и найти. В задании 1) выразим и уравняем процентные содержания золота до и после добавки его в сплав. Поскольку золота в сплаве было $(4 - x)$ кг, а стало $(5 - x)$ кг, получим $\frac{4 - x}{4} \cdot 100 +$

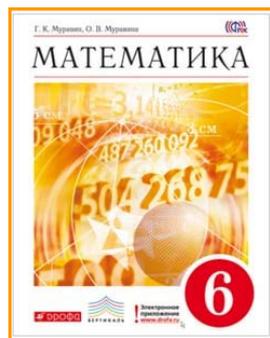
$+ 15 = \frac{5 - x}{5} \cdot 100$, $25(4 - x) + 15 = 20(5 - x)$, $115 - 25x = 100 - 20x$, $5x = 15$, $x = 3$ (кг). Золота в сплаве было $4 - 3 = 1$ (кг). Ответ: 1 кг. В задании 2) $\frac{x}{4} \cdot 100 -$

$-\frac{x}{5} \cdot 100 = 10$, $5x - 4x = 2$, $x = 2$ (кг). Ответ: 2 кг.

Понятно, что в заданиях 1) и 2) речь идет о разных сплавах.

№ 585. Примем за x массу меди в полученном сплаве, тогда в первоначальном сплаве меди было $(x - 2)$ кг, откуда получаем $\frac{x}{12} \cdot 100 - \frac{x - 2}{10} \cdot 100 = 10$, $25x - 30x + 60 = 30$, $x = 6$ (кг). Ответ: 6 кг.

№ 586. Концентрация сахарного сиропа 50% означает, что сахара и воды в сиропе поровну, т. е. удвоенная масса одного из ингредиентов равна массе всего раствора. В задании 1) в растворе было 25 г сахара, после растворения x г сахара должно получиться $2(x + 25) = 100 + x$, $x = 50$ (г). Ответ: 50 г. В задании 2) в растворе $120 \cdot \frac{3}{4} = 90$ (г сахара). Если добавить x г воды, то концентрация должна стать равной 50% и $2 \cdot 90 = 120 + x$, $x = 60$ (г). Ответ: 60 г.



Задачи для летнего досуга

17. Сумма возрастов мужа, жены, дочери и сына составляет 73 года. Муж старше жены на три года, дочь старше сына на два года. Четыре года тому назад членам семьи было в сумме 58 лет. Сколько лет сейчас каждому члену этой семьи?

№ 17. Если бы четыре года назад в семье уже был сын, то сумма возрастов всех членов семьи четыре года назад была бы на 16 лет меньше, чем сейчас, т. е. $73 - 16 = 57$. Но сумма их возрастов была равна 58. Значит, возраст младшего ребенка уменьшился не на 4, а на 3 года, т. е. он родился 3 года назад. Тогда его сестре 5 лет, а сумма возрастов мужа и жены $73 - 3 - 5 = 65$ (лет). Поскольку муж старше жены на 3 года, ему 34 года, а жене 31 год.

Ответ: мужу 34 года, жене 31 года, дочери 5 лет, сыну 3 года.

27. В мешке лежат по 10 яблок каждого из трёх сортов. Какое минимальное число яблок надо взять из мешка не глядя, чтобы среди них наверняка оказались:

- 1) два яблока одного сорта;
- 2) пять яблок одного сорта;
- 3) яблоки всех трёх сортов?

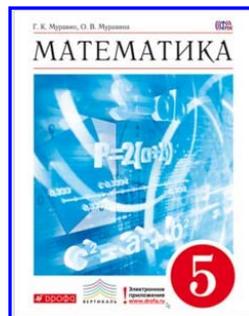
28. В магазин привезли 25 ящиков с яблоками трёх сортов, причём в каждом ящике лежат яблоки какого-то одного сорта. Можно ли найти 9 ящиков с яблоками одного сорта?

№ 27. 1) Понятно, что *в худшем случае* три яблока могут быть разных сортов, но уже сорт четвертого обязательно совпадет с сортом ранее вытасченного яблока.

2) *В худшем случае* вытащили по 4 яблока каждого сорта, т. е. 12 яблок. Но уже 13-е яблоко будет совпадать по сорту с одной из четверок.

3) *В худшем случае* придется вытащить из мешка все яблоки двух сортов (которых в мешке больше), и только следующее после этого яблоко позволит сказать, что вытасчены яблоки всех трех сортов.

№ 28. *В худшем случае* может оказаться по 8 ящиков каждого сорта, но тогда 25-й ящик будет девятым для какого-то сорта.



Оказание информационной и методической помощи. Авторский сайт: muravins.ru

Новости

*Легко учить,
интересно учиться!*

Сайт учебно-методических комплексов по
математике для 1-11 классов
Г.К.Муравина и О.В.Муравиной



Об авторах

Новости

Начальная
школа

УМК по
математике

Информация
об учебниках

Документы

Публикации

Фотоальбом

Приветствуем Вас на нашем сайте!

Главной целью сайта является оказание методической помощи учителям математики, работающим по нашим УМК.

На сайте вы можете:
-- познакомиться с нами, нашими учебниками и другими пособиями УМК, а также с интересными и актуальными публикациями об образовании;
-- изучить нормативные документы, регламентирующие деятельность учителя;
-- задать любой вопрос, обсудить интересующую проблему преподавания математики.

Вебинары

Рабочие программы

Конспекты уроков

Контрольные работы

Цифровые
образовательные
ресурсы

Отзывы

Вебинар для учителей математики

Дата проведения: **31 января (среда)**. Время проведения: **14.00—15.00**.

Тема: **Типичные ошибки учителей при проведении уроков математики в основной школе.**

На вебинаре будут показаны фрагменты уроков с анализом типичных ошибок учителей и даны рекомендации по их устранению.

Проводят: Г.К.Муравин (канд. пед. наук, почетный работник образования, ветеран труда, автор учебников по математике для 1—11 классов), О.В.Муравина (канд. пед. наук, доцент, профессор кафедры математического образования ИПОТ, автор учебников по математике для 1—11 классов).

[Заранее зарегистрируйтесь на сайте и получите сертификат участника вебинара.](#)

8.08.2016. Выкладываем **интервью**, которое мы дали для канала youtube о наших учебниках **"Современные дети изучают математику на эмоциональном уровне"**.



Нормативные документы

"О внесении изменений в федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 17.05.12 № 413."

Приказ Министерства образования и науки РФ № 613 от 29.06.2017.

Зарегистрировано Минюстом РФ № 47532 от 26.07.17.



корпорация

российский
учебник

123308, Москва, ул. Зорге, д. 1
(495) 795-0535, 795-0545, info@rosuchebnik.ru
rosuchebnik.ru | росучебник.рф

Нужна методическая поддержка?

Методический центр 8-800-2000-550 (звонок бесплатный), metod@rosuchebnik.ru

Хотите купить?



Официальный интернет-магазин
учебной литературы
book24.ru

Отдел продаж
sales@rosuchebnik.ru



Магазин
электронных учебников
lecta.ru

Хотите продолжить общение?

 youtube.com/user/drofapublishing  vk.com/ros.uchebnik
 www.fb.com/rosuchebnik  www.ok.ru/rosuchebnik

Остались вопросы?

Служба поддержки 8-800-700-64-83 (звонок бесплатный), help@rosuchebnik.ru



корпорация

российский
учебник

Спасибо за внимание!

**Муравин Георгий Константинович,
Муравина Ольга Викторовна,
E-mail: olgamuravina@gmail.com
Авторский сайт: muravins.ru**