корпорация российский учебник

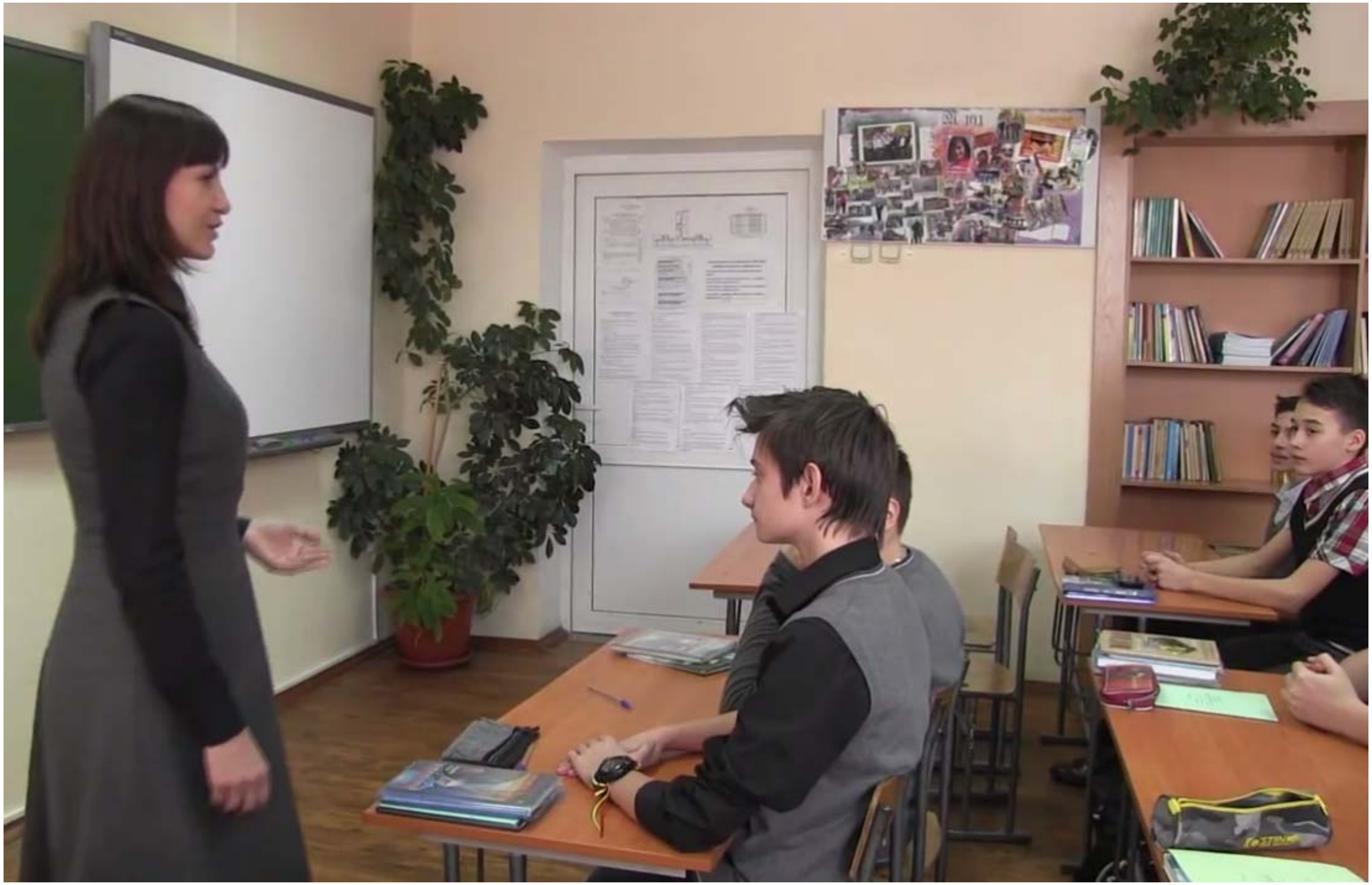
Типичные ошибки учителей при проведении уроков математики в основной школе

Г.К.Муравин, кандидат педагогических наук,
почетный работник образования, ветеран труда,
автор УМК по математике для 1–11 классов

О.В.Муравина, кандидат педагогических наук,
доцент, профессор кафедры математического
образования Института развития образовательных
технологий, автор УМК по математике для 1-11 классов

31 января 2018, Москва

Видеофрагмент урока в 8 классе по теме «Формула корней квадратного уравнения»



О.А.Якуткина, МБОУ «Лицей № 130 «РАЭПШ» г.Барнаула.

Технологическая карта урока в 8 классе «Формула корней квадратного уравнения» (первый урок)

Класс: 8
Учитель: Якуткина Ольга Александровна, учитель математики МБОУ «Лицей № 130 «РАЭПШ» г.Барнаула.
Тема урока: Решение квадратного уравнения в общем виде.
Тип урока: урок открытия нового знания.
Методы обучения: беседа и самостоятельная работа.
Формы организации: коллективная работа и работа в парах.
Цель урока: вывести формулу корней квадратного уравнения.

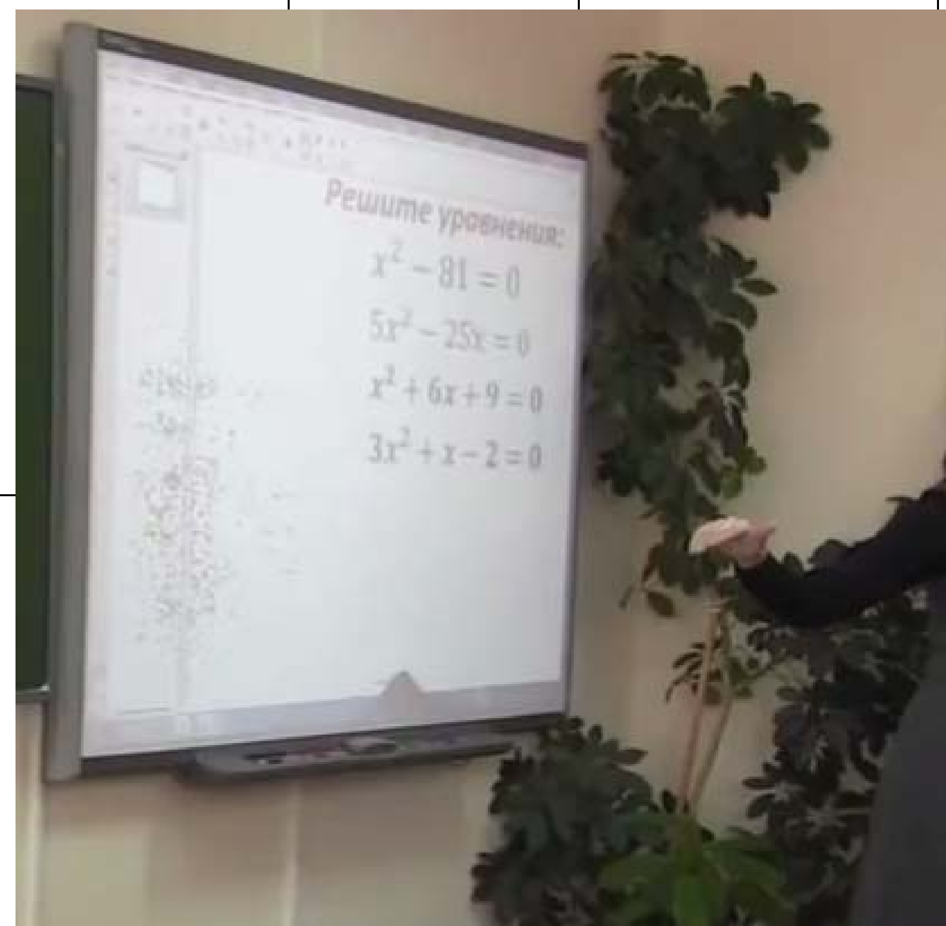
Задачи урока

Предметные результаты: решать квадратные уравнения разложением на множители, выделением полного квадрата и по формуле корней.
Метапредметных результаты
Регулятивные: ставить цели деятельности в начале на каждом этапе урока, составлять план деятельности, выполнять план, осуществлять самооценку.
Познавательные: классифицировать квадратные уравнения (частные случаи и общего вида) и методы их решения, решать уравнения по аналогии.
Коммуникативные: сотрудничать с учениками класса и в парах? отвечать на вопросы учителя и обосновывать свои ответы.
Личностные результаты: проявлять активность, самостоятельность, положительное отношение к процессу познания, желание узнать новое.

Ход урока

Этапы урока	Содержание учебного процесса	Деятельность учителя	Деятельность ученика	Формирование УУД
1.Самоопре-деление к деятельности Цель: мотивировать учащихся к учебной деятельности **(5 мин)**	**Учитель:** Вспомните, чем вы занимались на последних уроках математики, чему учились? **Ученики:** Изучали определение квадратного уравнения. Учились решать квадратные уравнения. **Учитель:** Действительно, вы учились решать квадратные уравнения. Давайте проверим, на сколько успешно вы научились решать квадратные уравнения. Откройте тетради, запишите число и классную работу.	**Приветствует** учащихся, включает в урок.	Взаимное приветствие, учащиеся вспоминают, чем занимались на последних уроках.	**Личностные результаты:** выражать положительное отношение к процессу познания, желание узнать что-то новое, проявлять активность. **Коммуникативные результаты:** объяснять, чем занимались на предыдущих уроках.
2.Актуализа-ция опорных знаний Цель: актуализиро-вать учебные знания и умения учащихся для восприятия нового материала **(10 мин)**	Я предлагаю квадратное уравнение, вы самостоятельно его решите, затем проверьте в парах. 1) Решите уравнение $x^2 - 81 = 0$. Обсудите решение уравнения в паре. Ученики, которые сидят на первом варианте показывают свое решение ученикам, которые сидят на втором варианте. Теперь ученики второго варианта показывают свое решение ученикам первого варианта. Теперь проверяем решение. **Учитель:** Какой способ решения квадратного уравнения вы использовали? Какие корни получили? **Ученики:** Разложение на множители, $x^2 - 81 = 0$, $(x - 9)(x + 9) = 0$, $x_1 = 9$, $x_1 = -9$. **Учитель:** Есть ли другой способ решения этого уравнения? **Ученики:** Мы перенесли число 81 в правую часть уравнения и вычислили квадратный корень. $x^2 - 81 = 0$, $x^2 = 81$, $x_{1,2} = \sqrt{81}$, $x_{1,2} = \pm 9$.	Организует самостоятельную работу учащихся по решению уравнений, уравнений тех видов, которые были изучены ранее. Организует работу в парах по обсуждению решений квадратных уравнений тех видов, которые были изучены ранее.	Решают самостоятельно квадратные уравнения, затем обсуждают в парах и рассказывают о методе решения учителю.	**Предметные результаты:** Решать квадратные уравнения разложением на множители, выделением полного квадрата. **Регулятивные результаты:** точно выполнять поставленные задачи. **Коммуникативные результаты:** точно отвечать на поставленные вопросы учителя, рассказывать о методах решения частных видов квадратных уравнений. **Познавательные результаты:** формулировать определение

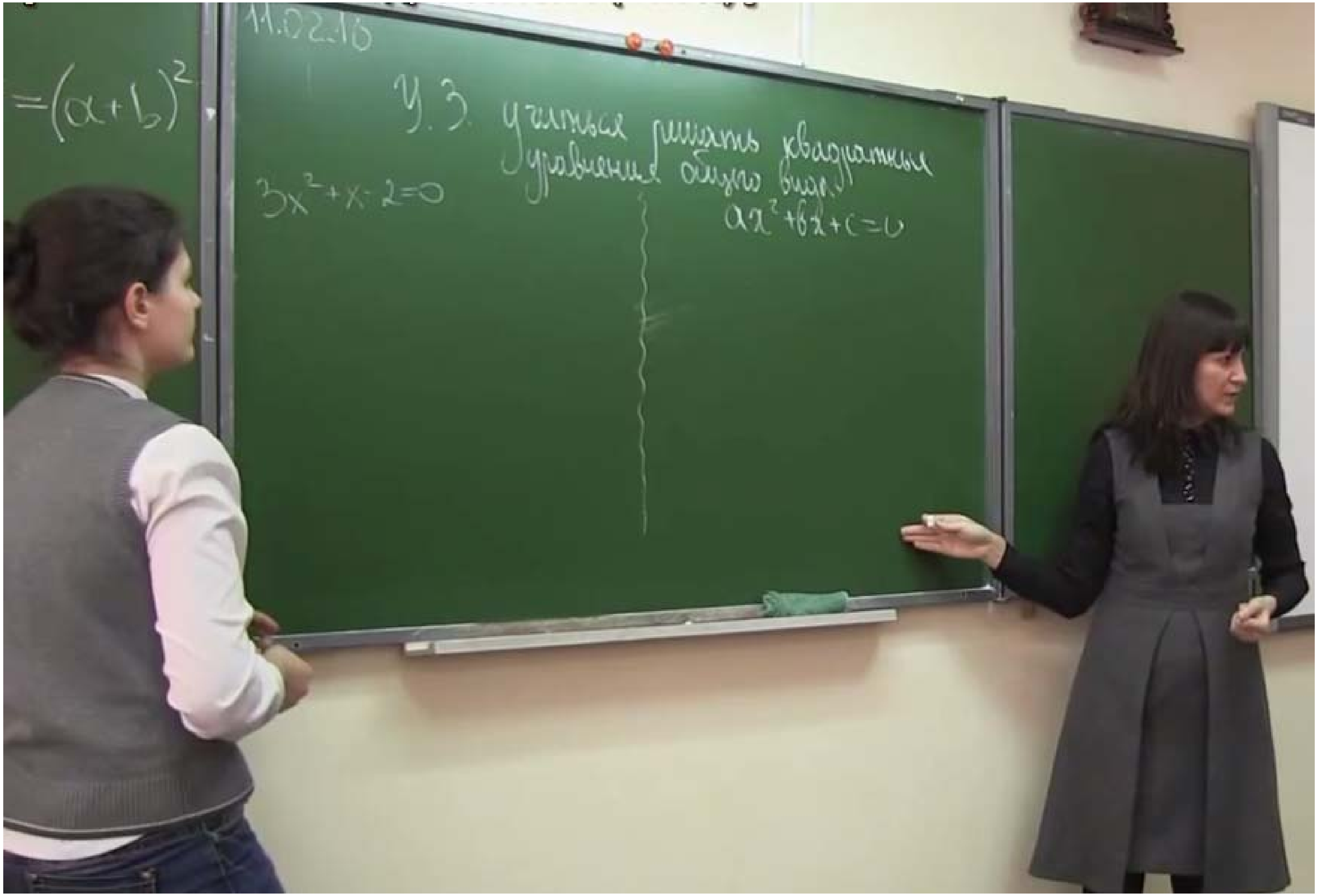
2.Актуализа-ция опорных знаний.	**Учитель:** Я вас поздравляю, вы успешно справились с решением первого уравнения. 2) Решите уравнение $x^2 - 25x = 0$. **Учитель:** Обсудите решение уравнения в паре. Ученики, которые сидят на первом варианте показывают свое решение ученикам, которые сидят на втором варианте. Теперь ученики второго варианта показывают свое решение ученикам первого варианта. Теперь проверяем решение. **Учитель:** Какой способ решения квадратного уравнения вы использовали? Какие корни получили? **Ученики:** Мы использовали разложение на множители и получили корни 0 и 25. $x^2 - 25x = 0$, $x(x - 25) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 25$. 3) Решите уравнение $x^2 + 6x + 9 = 0$. **Учитель:** Обсудите решение уравнения в паре. Ученики, которые сидят на первом варианте показывают свое решение ученикам, которые сидят на втором варианте. Теперь ученики второго варианта показывают свое решение ученикам первого варианта. Теперь проверяем решение. **Учитель:** Каким способом решили это квадратное уравнение? Какие корни получили? **Ученики:** разложили на множители, выделив полный квадрат, получили один корень 3. $x^2 + 6x + 9 = 0$, $(x + 3)^2 = 0$, $x = -3$.	Организует самостоятельную работу учащихся по решению уравнений, уравнений тех видов, которые были изучены ранее. Организует работу в парах по обсуждению решений квадратных уравнений тех видов, которые были изучены ранее.	Решают самостоятельно квадратные уравнения, затем обсуждают в парах и рассказывают о методе решения учителю.	квадратного уравнения, классифицировать квадратные уравнения (частного вида и общего), методы их решения (разложение на множители, выделение полного квадрата).



3.Постановка учебной задачи. Цель: сформулировать тему урока и учебную задачу. **(5 мин)**	4) Решите уравнение $3x^2 + x - 2 = 0$. **Учитель:** Как решить это уравнение? **Ученики:** Хотелось бы разложить на множители, но не знаю как. **Учитель:** Корни нашли? Нет. **Ученики:** Да, подбором получил корень $\frac{1}{3}$. **Учитель:** Как узнать, является ли число $\frac{1}{3}$ корнем уравнения? **Ученики:** Надо число подставить в уравнение: $3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} - 2 \neq 0$, т.е. не является корнем. **Ученики:** Можно графически решить уравнение. Каждый самостоятельно решает уравнение графически. Кто нашел ответы графическим способом? Что значит решить графически? Построить графики функций: $y = 3x^2$ и $y = 2 - x$. **Учитель:** Не удалось решить графически, не удалось разложить на множители. Каким способом решить это уравнение? Как решать квадратное уравнение общего вида? Чему будем учиться? Какая учебная задача этого урока? **Ученики:** Учебная задача: Учиться решать квадратные уравнения общего вида: $ax^2 + bx + c = 0$. **Учитель:** Что нам помогло поставить эту задачу? **Ученики:** Мы не смогли решить конкретное уравнение, т.е. никто в классе не смог решить квадратное уравнение $3x^2 + x - 2 = 0$.	Подводит к формулировке проблемы, темы урока и учебной задачи.	Формулируют тему урока и учебную задачу, предлагают методы решения учебной проблемы.	**Регулятивные результаты:** ставить перед собой учебную задачу на основе соотнесения того, что уже известно и усвоено и того, что еще неизвестно. **Коммуникативные результаты:** формулировать тему урока и учебную задачу. **Предметный результат:** формулировать определение корня уравнения.

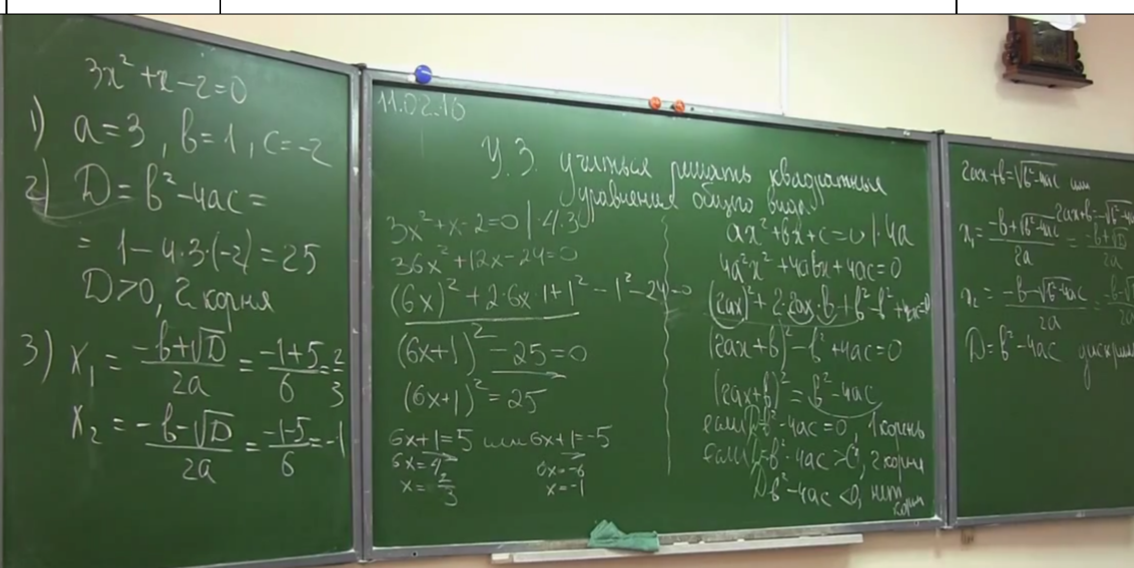
4. Этап изучения нового материала. <u>Цель:</u> организовать самостоятельное изучение материала. **(15 мин)**	**Учитель:** Уравнение $x^2 + 6x + 9 = 0$ было общего вида? **Ученики:** Да. **Учитель:** А как же вы справились с решением? **Ученики:** $ax^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ **Учитель:** Трудность вызывает выделение полного квадрата в уравнении $3x^2 + x - 2 = 0$. Так как нам надо решить уравнение $3x^2 + x - 2 = 0$ и уравнение общего вида $ax^2 + bx + c = 0$. Я буду решать уравнение общего вида, а вы уравнение $3x^2 + x - 2 = 0$. Для того, чтобы получить квадрат первого члена мне нужно умножить на число $4a$, от этого корни уравнения не изменятся, а второй коэффициент станет четным $ax^2 + bx + c = 0$, $4ax^2 + 4axb + 4ac = 0$, Что мне писать дальше? $(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 + 4ac - b^2 = 0$, $(2ax + b)^2 + 4ac - b^2 = 0$, $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$, $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$, $b^2 - 4ac \geq 0$, $2axb + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ **Учитель:** Сколько корней может быть у квадратного уравнения? **Ученики:** два, один, ни одного. Если $b^2 - 4ac = 0$, то 1 корень Если $b^2 - 4ac > 0$, то 2 корня Если $b^2 - 4ac < 0$, то нет корней. Дискриминант квадратного уравнения переводится, как «разделяющий». $D = b^2 - 4ac$ Что показывает дискриминант? Количество корней.	Решает квадратное уравнение общего вида, следит за решением конкретного уравнения, ведет диалог с учениками.	Ученик решает конкретное квадратное уравнение по аналогии: $3x^2 + x - 2 = 0$. Умножим уравнение на 12. Ученик по аналогии решает: $36x^2 + 12x - 24 = 0$, $(6x)^2 + 2 \cdot 6x \cdot 1 + 1 -$ $- 24 - 1 = 0$, $(6x + 1)^2 - 25 = 0$, $(6x + 1)^2 = 25$, $6x + 1 = 5$, $6x + 1 = -5$, $6x = 4$ или $6x = -6$, $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -1$.	**Предметные результаты:** составление алгоритма решения квадратного уравнения по формуле корней. **Регулятивные результаты:** составление и реализация плана решения квадратного уравнения выделением полного квадрата. **Коммуникативные результаты:** рассказ об алгоритме решения квадратного уравнения. **Личностные результаты:** не отступать перед трудностями и не бояться сделать ошибку.
	$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$			

Вид доски перед открытием нового знания

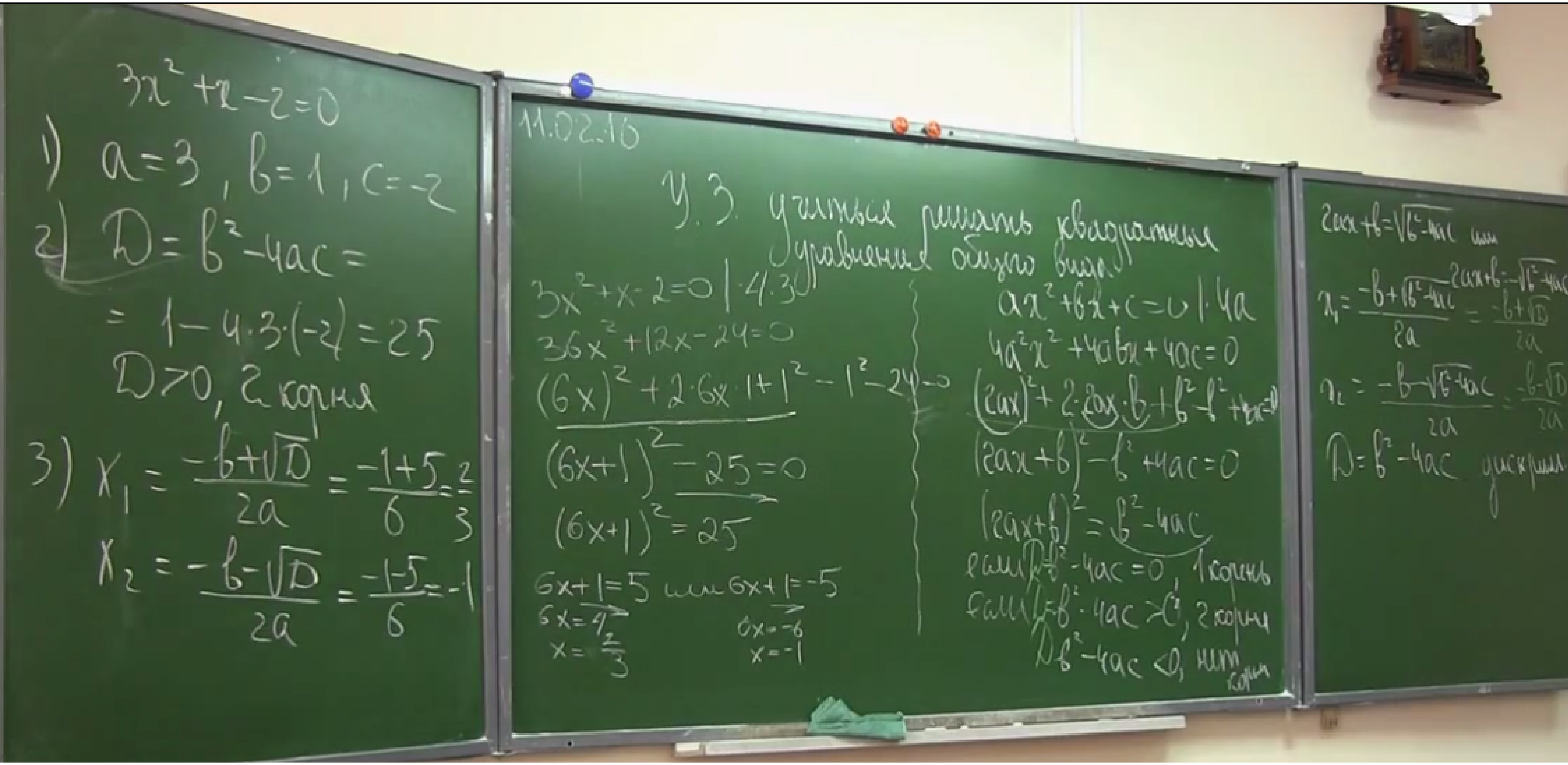


Вид доски после завершения открытия нового знания

5. Этап первичного закрепления. <u>Цель:</u> закрепить алгоритм решения квадратного уравнения по формуле корней. **(5 мин)**	Решим уравнение $3x^2 + x - 2 = 0$ по формуле корней. 1) $a = 3$, $b = 1$, $c = -2$. 2) $D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25$, два корня. 3) $x_2 = \frac{-1-5}{6} = \frac{-6}{6} = -1$ $x_1 = \frac{-1+5}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ Ответ: -1 и $\frac{2}{3}$.	Предлагает алгоритм решения квадратного уравнения по формуле корней совместно с учениками.	Ученики отвечают на вопросы учителя по решению уравнения.	**Предметный результат:** реализация алгоритма решения квадратного уравнения по формуле корней.
6. Рефлексия учебной деятельности. Итог урока. <u>Цель:</u> подведение итогов урока. **(5 мин)**	**Учитель:** Какая была учебная задача? **Ученики:** Выводили формулы корней квадратного уравнения, анализировали, обсуждали. **Учитель:** Спасибо за урок. Будем решать квадратные уравнения по формулам корней на следующих уроках. Спасибо за активную работу на уроке.	Акцентирует внимание на конечных результатах, организует рефлексию, даёт комментарии к домашнему заданию, к выставленным оценкам за урок.	Отвечают на вопросы, рассказывают что узнали, чему научились, какие трудности испытали, какими успехами гордятся, записывают домашнее задание.	**Личностные результаты:** оценивать свои достижения, степень самостоятельности, причины неудачи. **Регулятивные результаты:** сравнивать цели урока и полученные результаты, осознание качества и уровня усвоения знаний. **Коммуникативные результаты:** формулировать и обосновывать свои успехи или неудачи.

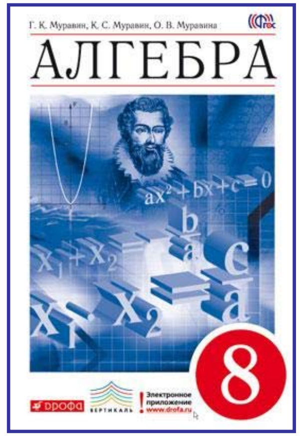


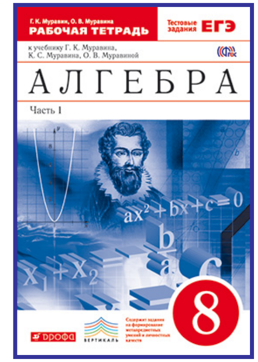
Вид доски в конце урока



Комплект для 8 класса

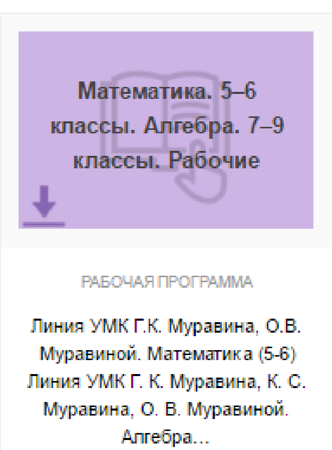
Электронное приложение



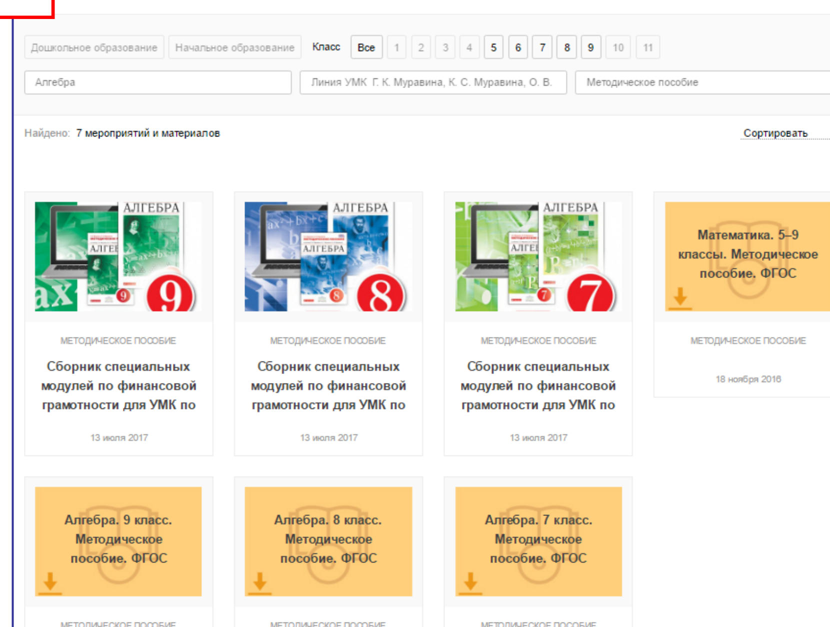


drofa-ventana.ru

Рабочая программа

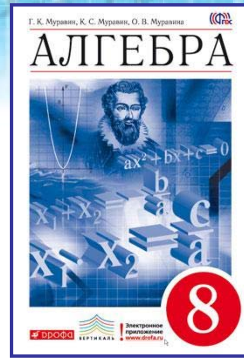


Методические пособия для учителей по алгебре



Глава 4

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ



§ 7. Формулы корней квадратного уравнения

21. Выделение полного квадрата

Многие математические задачи сводятся к нахождению значений переменной, обращающих в нуль многочлен, т. е. к решению уравнений вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен от переменной x. Являясь целым выражением, многочлен $P(x)$ даёт название и уравнению $P(x) = 0$ — такое уравнение называют *целым* и считают его *степень* равной степени многочлена $P(x)$. *Степенью* же *многочлена* стандартного вида называют наибольшую из степеней составляющих его одночленов, а сам этот одночлен и его числовой коэффициент называют *старшими*. Так, например, многочлен $2x^3 + x^2 - 6x - 3$ имеет третью степень, а многочлен $2x^6 - 16x^5 + 24x^4 - x^2 + 8x - 12$ — шестую. Член многочлена, который не содержит переменной, называют *свободным*.

Уравнение $ax + b = 0$, где $a \neq 0$, имеет первую степень, $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, — уравнение второй степени, или *квадратное уравнение*, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где $a \neq 0$, — уравнение третьей степени, или кубическое, и т. д.

Коэффициенты и свободный член многочлена $P(x)$ могут быть любыми действительными числами, и только старший коэффициент должен отличаться от нуля.

Один из основных способов решения целых уравнений с одной переменной — разложение левой части на множители с последующим приравниванием к нулю каждого множителя по отдельности.

Пример 1. Решить кубическое уравнение

$$2x^3 + x^2 - 6x - 3 = 0.$$

Решение. Постараемся разложить левую часть уравнения на множители:

$$2x^3 + x^2 - 6x - 3 = (2x^3 + x^2) - (6x + 3) =$$
$$= x^2(2x + 1) - 3(2x + 1) = (2x + 1)(x^2 - 3).$$

Произведение многочленов равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю, т. е.

$$2x + 1 = 0 \text{ или } x^2 - 3 = 0.$$

Линейное уравнение $2x + 1 = 0$ имеет единственный корень $-\frac{1}{2}$, а у квадратного уравнения $x^2 - 3 = 0$ есть два корня: $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}; \pm\sqrt{3}$.

Замечание. Для нахождения корней уравнения $x^2 - 3 = 0$ мы могли разложить выражение $x^2 - 3$ по формуле разности квадратов: $x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$, лучше, однако, переписав уравнение $x^2 - 3 = 0$ в виде $x^2 = 3$, воспользоваться определением квадратного корня.

Пример 2. Решить уравнение $x^2 + 2x - 5 = 0$.

Решение. Первым двум членам левой части равенства не хватает слагаемого 1, чтобы «свернуться» в квадрат суммы $(x + 1)^2$. Однако нехватку легко восполнить:

$$x^2 + 2x - 5 = x^2 + 2x + \underline{1 - 1 - 5} = (x + 1)^2 - 6.$$

Мы представили квадратный трёхчлен $x^2 + 2x - 5$ в виде суммы квадрата двучлена и числа. Такое преобразование называют *выделением квадрата двучлена* или *выделением полного квадрата*.

Завершаем решение уравнения:

$$(x + 1)^2 - 6 = 0,\ (x + 1)^2 = 6,\ x + 1 = \pm\sqrt{6},\ x_{1;\,2} = -1 \pm \sqrt{6}.$$

Ответ: $-1 \pm \sqrt{6}$.

Пример 3. Решить уравнение $3x^2 - 4x + 5 = 0$.

Решение. Старший член $3x^2$ можно представить в виде квадрата $(\sqrt{3}\,x)^2$, однако в этом случае нам и дальше придётся иметь дело с радикалами. Поэтому лучше сначала умножить всё уравнение на 3: $9x^2 - 12x + 15 = 0$, и только после этого выделять полный квадрат:

$$9x^2 - 12x + 15 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + 15 = \\ = (3x - 2)^2 + 11.$$

Свое наименьшее значение выражение $(3x - 2)^2 + 11$ принимает, когда $(3x - 2)^2 = 0$, т. е. при $x = \frac{2}{3}$. При этом x значение выражения равно 11. Все другие значения выражения больше 11. Таким образом, выражение $(3x - 2)^2 + 11$ при любом значении x является положительным числом. Следовательно, уравнение $(3x - 2)^2 + 11 = 0$, а вместе с ним и исходное уравнение корней не имеют.

Ответ: корней нет.

Пример 4. Решить уравнение $3x^2 + x - 5 = 0$.

Решение. Умножим, как и в предыдущем примере, уравнение на 3: $9x^2 + 3x - 15 = 0$. Теперь, однако, представление второго члена в виде удвоенного произведения: $3x = 2 \cdot 3x \cdot \frac{1}{2}$ — приводит к дробям. Если же умножить уравнение $9x^2 + 3x - 15 = 0$ на 2: $18x^2 + 6x - 30 = 0$, то «испортится» первый член. Чтобы этого не случилось, умножим уравнение $9x^2 + 3x - 15 = 0$ на 4: $36x^2 + 12x - 60 = 0$. Теперь полный квадрат легко выделяется:

$$36x^2 + 12x - 60 = (6x)^2 + 2 \cdot 6x \cdot 1 + 1 - 1 - 60 = \\ = (6x + 1)^2 - 61.$$

Конечно, вместо двух последовательных умножений на 3 и на 4 лучше было бы сразу умножить исходное уравнение на 12, т. е. на учетверённый старший коэффициент.

Завершаем решение:

$$(6x + 1)^2 - 61 = 0,\ (6x + 1)^2 = 61,\ 6x + 1 = \pm\sqrt{61},$$

$$x_{1;\,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{6}.$$

Ответ: $\frac{-1 \pm \sqrt{61}}{6}$.

Упражнения

298. Какие из уравнений являются целыми: 180

1) $\frac{2x + 3}{x - 1} = 0$;
2) $3x + 5 = 2x - 10$;
3) $4x^2 + 4x + 1 = 0$;
4) $x^2 + 2x - 3 = x^3$;
5) $\sqrt{2x} + 7 = 0$;
6) $\frac{y^5 + 2y}{\sqrt{3} + 2} - \frac{3y^4 - 5}{3 - \sqrt{7}} = 3$?

299. Представьте уравнение в виде $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен, и определите степень полученного уравнения:

1) $(x - 1)(x + 2) = (x - 3)(x + 3)$;
2) $2 - (y - 2)^2 = y(y + 2)^2$;
3) $(z - 2)^3 + (z + 2)^3 = (z + 3)^2$;
4) $(2p + 3)^4 = p^2(2p - 5)(2p + 5)$. 181—183

300. Решите уравнение, раскладывая на множители многочлен[1]:

1) $3x^3 + 2x^2 - 21x - 14 = 0$;
2) $10x^3 - 6x^2 = 5x - 3$;
3) $x^2(6x - 5) - 99 = (x - 18)4x + 9$;
4) $3x^3 - \frac{9}{2}x^2 - \frac{8}{3}x + 4 = 0$. 184

301. Назовите старший коэффициент и свободный член в уравнении: 185

1) $7x^2 + 6x + 11 = 0$;
2) $-5y^2 + 4y + 1 = 0$;
3) $-7z + \sqrt{2} + 2z^2 = 0$;
4) $0{,}3u^2 - 11 + 0{,}25u = 0$;
5) $6p^2 + 7p = 0$;
6) $13t - 9t^2 = 0$;
7) $s^2 + 5 = 0$;
8) $x^2 = 0$.

302. Выделите полный квадрат и решите уравнение: 186

1) $x^2 - 18x + 80 = 0$;
2) $x^2 + 16x + 73 = 0$;
3) $x^2 - 5x - 24 = 0$;
4) $x^2 + 17x - 42 = 0$;

[1] Математики научились решать любые целые уравнения с одной переменной до четвёртой степени включительно, а вот из уравнений высших степеней решить можно лишь некоторые. Причём, когда левую часть целого уравнения не удаётся разложить на множители, а поиск целых корней оказывается безрезультатным, шансов решить уравнение довольно мало.

5) $4x^2 + 12x - 55 = 0$;
6) $9x^2 - 12x + 21 = 0$;
7) $15x^2 + 7x - 2 = 0$;
8) $3x^2 + 16x + 21 = 0$.

303. Решите уравнение:
1) $3x^2 + 7x - 5 = 0$;
2) $7x^2 - x + 3 = 0$;
3) $2x^2 + 5x - 11 = 0$;
4) $6x^2 - 11x + 8 = 0$.

304. Найдите наименьшее значение, которое может принять выражение:
1) $2 + 3x^2$;
2) $(7x + 12)^2 + 27$;
3) $9x^2 + 18x + 121$;
4) $5x^2 + 7x - 21$.

305. Найдите наибольшее значение, которое может принять выражение:
1) $2 - 3x^2$;
2) $23 - (9x - 12)^2$;
3) $123 - 4x^2 + 5x$;
4) $32 + 11x - 5x^2$.

306. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, периметр которого равен: 1) 40 см; 2) 50 см?

307. Решите задачи.
1) Одно из положительных чисел на 3 больше другого, а произведение этих чисел на 97 меньше суммы их квадратов. Найдите эти числа.
2) Сумма двух положительных чисел равна 29. Квадрат одного из них меньше квадрата другого на 87. Найдите эти числа.
3) Сумма квадратов двух отрицательных чисел равна 137. Найдите большее из этих чисел, зная, что они отличаются друг от друга на 7.

308. Решите задачи, составив по их условиям квадратные уравнения.
1) Гипотенуза прямоугольного треугольника больше одного из его катетов на 9 см и больше другого катета на 32 см. Найдите стороны треугольника.
2) Один из катетов прямоугольного треугольника больше другого на 89 см и меньше гипотенузы на 9 см. Найдите стороны треугольника.

309. При каком k уравнение:
1) $(k - 2)x + 3k + 2 = 0$ не является уравнением первой степени;
2) $(k + 3)x^2 - 5kx - 4 = 0$ не является квадратным?

! Контрольные вопросы и задания

1. Во всяком ли квадратном трёхчлене можно выделить полный квадрат?

2. Приведите к виду $ax^2 + bx + c = 0$ уравнение

$$\frac{x}{3} \cdot (2 - x) = \frac{2}{5}\left(3 + \frac{5x^2}{6}\right).$$

3. Выделите полный квадрат и решите уравнение

$$5x^2 - x + 1 = 0.$$

22. Решение квадратного уравнения в общем виде

Каждое квадратное уравнение, как вы убедились в предыдущем пункте, можно решить с помощью выделения полного квадрата. Однако решать квадратные уравнения вам предстоит ещё много раз, поэтому имеет смысл решить квадратное уравнение в общем виде, а затем спокойно пользоваться результатами этого решения.

Любое квадратное уравнение можно записать в виде $ax^2 + bx + c = 0$, где b и c могут оказаться любыми действительными числами, а старший коэффициент a — любое действительное число, кроме нуля.

Выделим в левой части уравнения полный квадрат. Для этого предварительно умножим, как и в примере 4 предыдущего пункта, обе части уравнения на число, которое одновременно сделает старший член «удобным» квадратом, а коэффициент при x — чётным. Таким множителем является, например, число $4a$: т. е. $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$.

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = (2ax)^2 + 2 \cdot (2ax) \cdot b + b^2 - b^2 + 4ac = \\ = (2ax + b)^2 - b^2 + 4ac.$$

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0,\ (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Теперь из числа $b^2 - 4ac$ будем извлекать квадратный корень.

Являясь квадратом, левая часть полученного уравнения не может принимать отрицательных значений. Поэтому если $b^2 - 4ac < 0$, то наше уравнение корней не имеет.

Если $b^2 - 4ac = 0$, то $(2ax + b)^2 = 0$, $2ax + b = 0$ и уравнение имеет единственный корень, равный $-\frac{b}{2a}$.

Когда $b^2 - 4ac > 0$, существуют два квадратных корня из числа $b^2 - 4ac$. В этом случае имеем:

$$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac} \text{ или } 2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Из этих равенств находим корни уравнения:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Таким образом, число корней квадратного уравнения зависит от знака числа $b^2 - 4ac$. Это число называют *дискриминантом* и обозначают буквой D[1].

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$:
- при $D < 0$ корней не имеет;
- при $D = 0$ имеет единственный корень $x = -\frac{b}{2a}$;
- при $D > 0$ имеет два корня $x_{1;\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Блок-схема алгоритма решения квадратного уравнения приведена на рисунке 21.

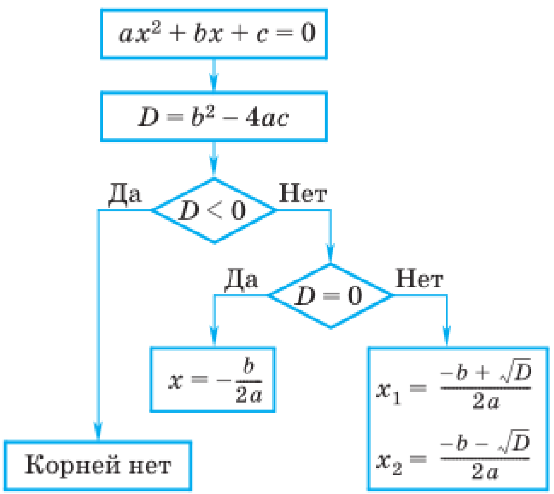


Рис. 21

[1] D — первая буква латинского глагола *discriminare* — «разделять, различать».

Пример 1. Решить уравнение $x\sqrt{3} + 5x^2 - 2 = 0$.

Решение. Выпишем сначала старший коэффициент (a), коэффициент при x (b) и свободный член (c): $a = 5$, $b = \sqrt{3}$, $c = -2$.

Найдём дискриминант данного квадратного уравнения:

$$D = b^2 - 4ac = (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 3 + 40 = 43.$$

Дискриминант положителен, значит, уравнение имеет два корня. Найдём их по формуле корней:

$$x_{1;\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{43}}{2a}.$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{3} + \sqrt{43}}{10}$; $\frac{\sqrt{43} - \sqrt{3}}{10}$.

Примечание. Вместо того чтобы выписывать значения коэффициентов, можно записать уравнение в виде $ax^2 + bx + c = 0$, т. е. по убыванию степеней x: $5x^2 + x\sqrt{3} - 2 = 0$. В этом случае практически нет опасности перепутать коэффициенты.

Пример 2. Найдите все значения a, при которых уравнение $2x^2 - ax + 1 = 0$ имеет единственный корень.

Решение. Единственный корень это квадратное уравнение имеет тогда, когда его дискриминант равен нулю. Найдём дискриминант и приравняем его нулю:

$$D = (-a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = a^2 - 8.$$

$$a^2 - 8 = 0,\ a^2 = 8,\ a_{1;\,2} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $2\sqrt{2}$ и $-2\sqrt{2}$.

Упражнения

310. Выделяя полный квадрат, решите уравнение:

1) $3x^2 + 5x + 1 = 0$; 2) $ax^2 + 3x + 1 = 0$.

311. Приведите пример квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, у которого: 187, 188

1) $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$;
2) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$;
3) $a > 0$, $b < 0$, $c = 0$;
4) $a > 0$, $b > 0$, $c = 0$;
5) $a < 0$, $b = 0$, $c > 0$;
6) $a > 0$, $b = 0$, $c = 0$.

312. Приведите уравнение к виду $ax^2 + bx + c = 0$ и определите a, b и c:

1) $3x - 5 + 4x^2 - 13x + 2 = 7x^2 - x - 9$;
2) $-6 + 4x - 5x^2 = -9x^2 - 11x + 13$;
3) $2x + 3x^2 - 5 = 7 + 5x^2 - 12x - 5$;
4) $9 - 7x - 13x^2 = -7x - 10x^2 - 4$;
5) $4x(5 - 3x) = (x - 1)(2 - 5x)$;
6) $2x(3 - 4x) = (5x - 5)(3x + 2)$. 189

313. Приведите уравнение к виду $ax^2 + bx + c = 0$, где a — натуральное, а b и c — целые числа:

1) $\frac{x}{2} - 3 - \frac{2x^2}{7} = 0$;
2) $\frac{3}{5}x - \frac{5x^2}{3} + \frac{7}{15} = 0$;
3) $\frac{x-2}{3} \cdot x - \frac{5x}{2} + \frac{1}{9} = 0$;
4) $\frac{7-2x}{12} \cdot x - \frac{x}{6} - \frac{5}{9} = 0$.

314. 1) Запишите в виде $ax^2 + bx + c = 0$ и назовите старший коэффициент (a), коэффициент при x (b) и свободный член (c) в квадратном уравнении: 190—193

а) $7x^2 - 13x - 2 = 0$;
б) $6 - 5x^2 + x\sqrt{3} = 0$;
в) $10 - x\sqrt{7} + 2x^2 = 0$;
г) $3x^2 + 4 - 8x = 0$;
д) $12x + 9x^2 + 4 = 0$;
е) $13x - 9x^2 = 0$;
ж) $x^2 + 11 = 0$;
з) $5x^2 - 9x = 0$.

2) Найдите дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$ и укажите число корней уравнения.
3) Найдите корни тех уравнений, у которых они есть.

315. Является ли число k корнем уравнения:

1) ○ $x^2 - 6x + 2 = 0$, $k = 3 + \sqrt{7}$;
2) ○ $3x^2 + 5x + 1 = 0$, $k = \frac{\sqrt{13} - 5}{6}$;
3) ● $4x^2 - 11x + 2 = 0$, $k = \sqrt{7}$;
4) $12x^2 - 61x + 26 = 0$, $k = 3 - 2\sqrt{7}$;
5) ● $5x^2 - 16x + 1324 = 0$, $k = 5$;
6) $2x^2 - x + 5 = 0$, $k = 3 + 2\sqrt{13}$?

316. ■ Найдите корни уравнения с точностью до сотых:

1) $5x^2 - 11x - 1 = 0$;
2) $3x^2 + 13x + 5 = 0$;
3) $2{,}3x^2 + 14{,}8x - 6{,}4 = 0$;
4) $4{,}7x^2 - 23{,}9x + 8{,}7 = 0$.

317. Сколько корней может иметь уравнение

$$(ax^2 + bx + c)(px^2 + qx + r) = 0$$

при условии, что $a \neq 0$ и $p \neq 0$?

318. ○ Докажите, что если в квадратном уравнении старший коэффициент и свободный член имеют разные знаки, то уравнение имеет два корня.

319. Имеет ли корни уравнение $2009x^2 + 2010x - 2011 = 0$?

320. ● Найдите все значения k, при которых имеет единственный корень уравнение:

1) $kx^2 - 3x + k = 0$;
2) $(k - 2)x^2 + 2kx + k + 2 = 0$.

321. * При каких k имеют единственную общую точку графики функций:

1) $y = x^2$ и $y = kx + 1$;
2) $y = x^2$ и $y = kx - 1$;
3) $y = \frac{1}{x}$ и $y = kx - 1$;
4) $y = \frac{1}{x}$ и $y = kx + 1$?

322. ● Двое игроков по очереди ставят в квадратное уравнение $\ldots x^2 + \ldots x + \ldots = 0$ вместо многоточий действительные числа (не обязательно сначала заполнять первое многоточие). Условия игры.

1) Первый игрок выигрывает, если на последнем ходу получится квадратное уравнение, не имеющее корней, а второй — когда получится квадратное уравнение, имеющее хотя бы один корень.

2) Первый игрок выигрывает, если на последнем ходу получится уравнение, имеющее хотя бы один корень, а второй — когда получится квадратное уравнение, не имеющее корней.

3) Первый игрок выигрывает, если на последнем ходу получится уравнение, имеющее единственный корень.

4) Первый игрок выигрывает, если на последнем ходу получится уравнение, у которого число 2 является корнем.

а) Может ли один из игроков выиграть при любой игре другого?

б) Может ли один из игроков выиграть при любой игре другого, если разрешается подставлять только целые числа (только натуральные числа)?

323. Составьте блок-схему решения линейного уравнения $ax + b = 0$, где a и b — любые числа.

324. Решите уравнения из «Книги абака» итальянского математика Л. Фибоначчи (1180—1240), который, путешествуя по Востоку, познакомился с достижениями арабской математики и способствовал распространению их в Европе:

1) $\frac{36}{10-x} - 3 = \frac{36}{x}$; 2) $\frac{60}{x} - \frac{60}{x+2} = 1\frac{1}{2}$.

325. Обозначив число рядов буквой x, решите задачи.
1) В зрительном зале сельского клуба было 120 мест. При расширении зала число мест в каждом ряду увеличилось на одно, а число рядов было увеличено на 4. В результате число мест в зале увеличилось на 56. Сколько рядов было в зале до реконструкции?
2) В зрительном зале Дворца культуры 550 мест. При расширении зала число мест в каждом ряду было увеличено на 2, а число рядов на 3. В результате в зале прибавилось 122 места. Сколько рядов стало в зрительном зале?

Контрольные вопросы и задания

1. Как установить, сколько корней имеет квадратное уравнение?
2. При каком значении c уравнение $3x^2 + 6x + c = 0$ имеет единственный корень?
3. Решите квадратное уравнение $3x^2 + 6x - 5 = 0$.

23. Теорема Виета

В предыдущем пункте вы познакомились с общей формулой корней квадратных уравнений. Корни $\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ и $\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ отличаются только знаками перед радикалами, а значит, ни произведение корней, ни их сумма радикалов не содержат:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - D}{4a^2} =$$
$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a},$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Мы доказали *теорему Виета*[1].

Теорема Виета
Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни, то их сумма равна $-\frac{b}{a}$, а произведение равно $\frac{c}{a}$.

Теорему Виета иногда удобно использовать для решения квадратных уравнений.

Пример 1. Решить квадратное уравнение
$$7x^2 - 23x + 16 = 0.$$

Решение. Сумма коэффициентов и свободного члена этого уравнения равна нулю:
$$7 - 23 + 16 = 0.$$

Поскольку сумма коэффициентов и свободного члена многочлена $P(x)$ — это значение многочлена при $x = 1$, равенство этой суммы нулю означает, что уравнение имеет корень $x_1 = 1$. Второй корень находим из равенства $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

[1] Франсуа́ Вие́т (1540—1603), юрист по образованию, жил во Франции во времена, описанные в романе А. Дюма «Королева Марго». Враги Генриха Наваррского, ставшего королём Франции Генрихом IV, несколько раз пытались убить вредного юриста после того, как он расшифровал их секретную переписку. К счастью для последнего и для математики, им это не удалось. Ф. Виет внёс большой вклад в развитие математики. Так, в частности, он предложил использовать буквы для обозначения коэффициентов. Самым важным своим открытием Виет считал установление связи между корнями и коэффициентами уравнений.

Алгебра. 7 класс

397. Докажите устно, что при любом значении переменной значение выражения — положительное число:

1) $a^2 + 5$;
2) $7 + d^2$;
3) $(7 - x)^2 + 1$;
4) $(b - 4)^2 + 3$;
5) $x^2 + 18x + 90$;
6) $c^2 - 22c + 122$;
7) $p^2 + 42p + 442$;
8) $y^2 - 30y + 250$.

Решите уравнение, раскладывая его левую часть на множители и используя условие равенства произведения нулю:

1) $x^2 - 100x = 0$;
2) $\frac{9}{25}x^3 - x = 0$;
3) $25y^2 + 20y + 4 = 0$;
4) $36x^2 + 25 = 60x$;
5) $x^4 - x^2 = 0$;
6) $x^5 - 49x^3 = 0$;
7) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$;
8) $y^3 - 3y^2 - 4y + 12 = 0$.

Устная работа

$4x^2 - 9 = 0$, $x = 1{,}5$ или $x = -1{,}5$, сразу показать запись $x = \pm 1{,}5$.

$(2x + 1)^2 - 9 = 0$ $2x + 1 = \pm 3$, $2x = -1 \pm 3$, $x = -2$ или $x = 1$.

$x^2 + 6x + 9 = 0$

$x^2 + 6x + 8 = 0$

$9x^2 + 6x - 15 = 0$

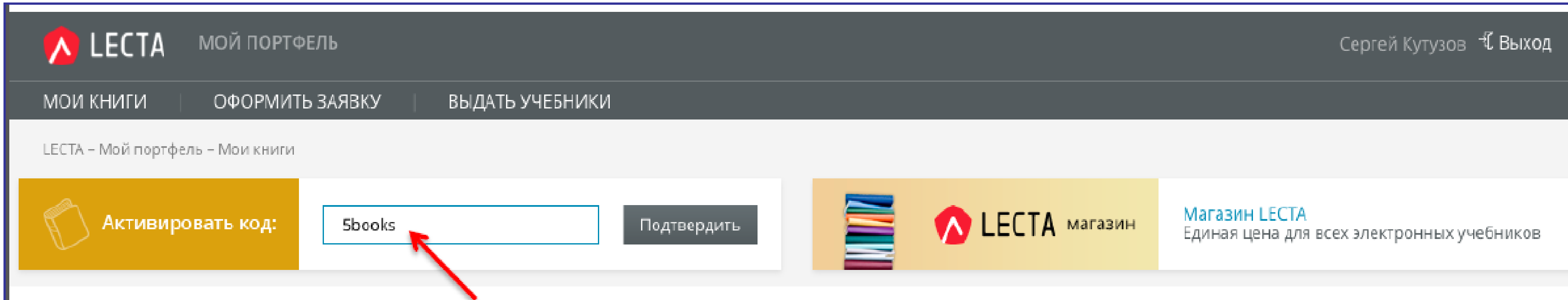
$3x^2 + 4x - 3 = 0$

$3x^2 + x - 2 = 0$

Кстати, $3x^2 + x - 2 = 2x^2 - 2 + x^2 + x = 2(x^2 - 1) + x(x + 1) =$

$$= (x + 1)(2x - 2 + x) = (x + 1)(3x - 2)$$

Бесплатный доступ к 5 любым ЭФУ на платформе LECTA



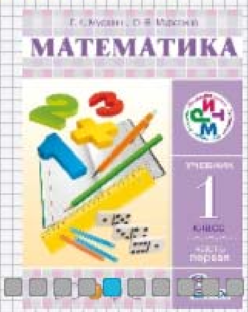
1. Зарегистрироваться на сайте https://lecta.ru
2. Подтвердить регистрацию и выполнить вход, используя свой логин и пароль
3. Активировать код **5books**
4. Выбрать учебники, нажав кнопку «выбрать» и «подтвердить»
5. Выбранные учебники доступны в Вашем портфеле. Для начала работы с учебником нажмите на обложку ЭФУ

Теперь Вы можете скачать приложение, войти под своим логином и паролем, скачать выбранные учебники и работать с ними без подключения к интернету

Авторский сайт: muravins.ru

Легко учить, интересно учиться!

Сайт авторов УМК по математике для 1-11 классов
Г.К.Муравина и О.В.Муравиной



Об авторах | Отзывы | Фотоальбом

Новости

Вебинары

Начальная школа

УМК по математике

Информация об учебниках

Документы

Публикации

Рабочие программы

Конспекты уроков

Контрольные работы

Цифровые образовательные ресурсы

Главной целью сайта является оказание методической помощи учителям математики, работающим по нашим УМК.

На сайте вы можете:

-- познакомиться с нами, нашими учебниками и другими пособиями УМК, а также с интересными и актуальными публикациями об образовании;

-- изучить нормативные документы, регламентирующие деятельность учителя;

-- задать любой вопрос, обсудить интересующую проблему преподавания математики.

Вебинары

Смотрите вебинары по нашему УМК
для учителей начальных классов и для учителей математики
на сайте Корпорации "Российский учебник" ("ДРОФА"-"ВЕНТАНА")

27.02.2018. Организация профильного обучения средствами УМК по математике.
Докладчики: Муравин Г.К., Муравина О.В.

12.02.2018. Типичные ошибки учителей при постановке учебных проблем на уроках математики в начальной школе.
Докладчики: Муравин Г.К., Муравина О.В.

Конспекты уроков

Эта страничка сайта создана в помощь учителям начальных классов и учителям математики, работающих по нашему УМК.

На этой странице размещены конспекты открытых уроков учителей, работающих по нашему УМК.

Вы тоже можете прислать свои лучшие конспекты и поделиться своими наработками с коллегами.

Конспекты уроков можно скачать вместе с презентациями на сайте Корпорации "Российский учебник" (ДРОФА-ВЕНТАНА). Посмотреть!

1 класс

Тема "Двузначные числа до 20" (п. 45)

Презентация к уроку

Л. А. Петрова, учитель начальных классов МБОУ «Коротоякская СОШ», с.Коротояк корпорация российский учебник

Спасибо за внимание!

Муравин Георгий Константинович,
Муравина Ольга Викторовна,
E-mail: olgamuravina@gmail.com
Авторский сайт: muravins.ru