Решение задач с параметром по учебнику алгебры 10 класса
УМК А.Г. Мерзляка

Ким Н.А.

№6.11.

1 Сколько корней имеет уравнение в зависимости от параметра a?

$||x|-1|=a$

Решение (алгебраическое)

$||x|-1|=a$

Пусть $a=0$; $a>0$; $a<0$

1 $a=0 \Rightarrow ||x|-1|=0 \Rightarrow |x|=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=1,\ x_2=-1$ (2 корня)

2 $a<0 \Rightarrow \varnothing$ (нет корней)

3 $a>0 \Rightarrow ||x|-1|=a \Rightarrow |x|-1=\pm a$

$\Rightarrow |x|=1\pm a \Rightarrow$ 1) $|x|=1+a$

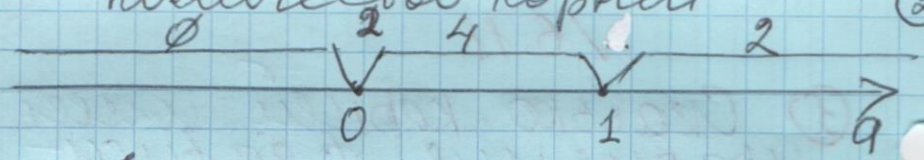
$\Rightarrow x_1=+(a+1)$, $x_2=-(a+1)$ (2 корня)

2) $|x|=1-a$, $a\in(0;1] \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=+(1-a)$, $x_2=-(1-a)$ 2 корня

при $a=1$ $x=0$

Количество корней



Ответ:

при $a<0$ нет корней

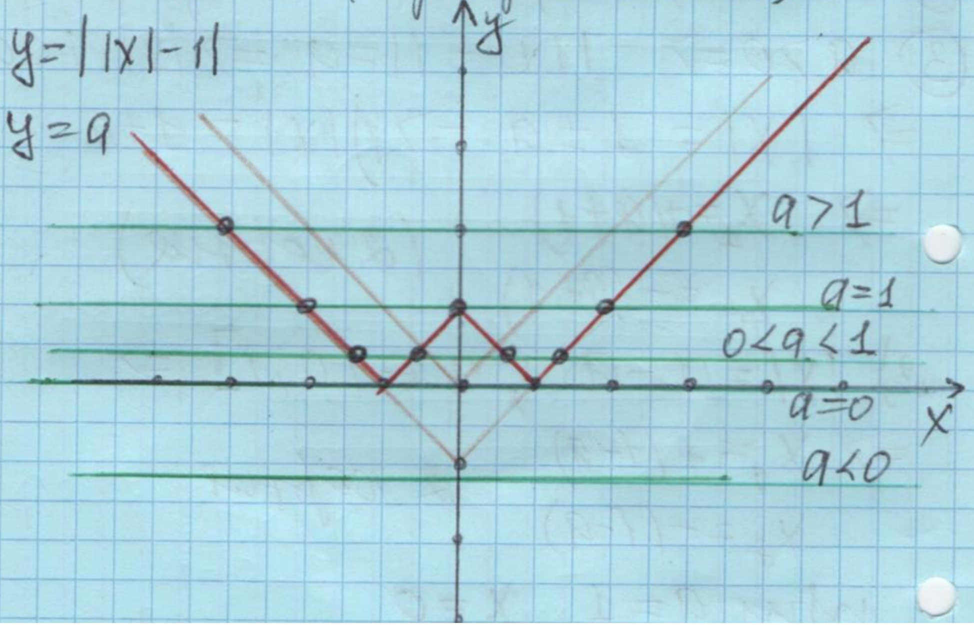
при $a=0$ 2 корня $x_1=1$ $x_2=-1$

при $0<a<1$ 4 корня $x_1=a+1$, $x_2=-(a+1)$, $x_3=1-a$, $x_4=-(1-a)$

при $a=1$ 3 корня $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=0$

при $a>1$ 2 корня $x_1=a+1$, $x_2=-a-1$

Решение (графическое)



№ 6.11

2. Сколько корней имеет уравнение в зависимости от параметра a?

$$|(|x|-1)^2-1| = a$$

Решение (алгебраическое)

Пусть $a=0$; $a<0$; $a>0$

1. $a=0 \Rightarrow |(|x|-1)^2-1| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (|x|-1)^2 = 1 \Rightarrow |x|-1 = \pm 1$

1) $|x|-1=1$, $|x|=2$, $x=\pm 2$ 2) $|x|-1=-1$, $|x|=0$, $x=0$

при $a=0 \Rightarrow 3$ корня

2. $a<0 \Rightarrow \varnothing$

3. $a>0 \Rightarrow (|x|-1)^2-1 = \pm a$

1) $(|x|-1)^2 = 1+a$ 2) $(|x|-1)^2 = 1-a$

$|x|-1 = \pm\sqrt{1+a}$ $0<a<1$

$|x| = 1 \pm \sqrt{1+a}$ $|x|-1 = \pm\sqrt{1-a}$

$x_1 = 1+\sqrt{1+a}$ $x_1 = 1+\sqrt{1-a}$

$x_2 = 1-\sqrt{1+a}$ $\varnothing$ $x_2 = 1-\sqrt{1-a}$

$x_3 = -(1+\sqrt{1+a})$ $x_3 = -(1+\sqrt{1-a})$

$x_4 = -(1-\sqrt{1+a})$ $\varnothing$ $x_4 = -(1-\sqrt{1-a})$

при $0<a<1 \Rightarrow 6$ корней

4. $a=1 \Rightarrow$ 1) $(|x|-1)^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x_1 = 1$ $x_2 = -1$

2) $(|x|-1)^2 = 2 \Rightarrow |x|-1 = \pm\sqrt{2}$

$|x| = 1-\sqrt{2} < 0$ $|x| = 1+\sqrt{2}$

$\varnothing$

$x_1 = 1+\sqrt{2}$

$x_2 = -(1+\sqrt{2})$

при $a=1 \Rightarrow 4$ корня

5. $a>1$ $(|x|-1)^2-1 = a \Rightarrow$

$\Rightarrow (|x|-1)^2 = a+1 \Rightarrow |x|-1 = \pm\sqrt{a+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{a+1}$

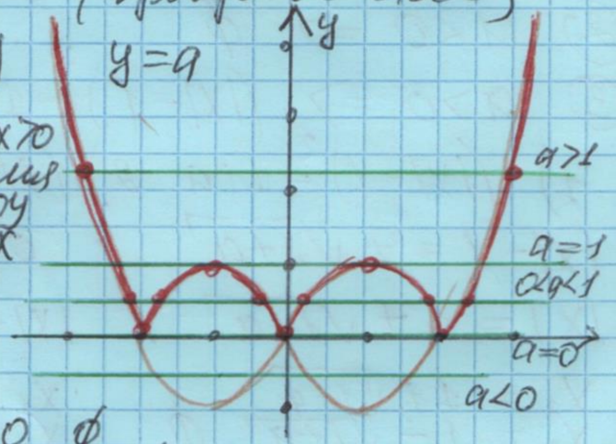
$a>1 \Rightarrow 2$ корня

Решение (графическое)

$y=|(|x|-1)^2-1|$ $y=a$

$y=(x-1)^2-1, x>0$

симметрия
1) около Oy
2) около Ox на $[-2;2]$



Ответ: $a<0$ $\varnothing$
$a=1$ 4 корня
$a=0$ 3 корня
$0<a<1$ 6 корней
$a>1$ 2 корня

№ 6.11 ⑤

③ Сколько корней имеет уравнение в зависимости от параметра a?

$$|\sqrt{x}-2| = a$$

Решение (алгебраическое)

Пусть $a=0$; $a<0$; $a>0$

① $a=0 \Rightarrow \sqrt{x}-2=0 \Rightarrow \sqrt{x}=2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=4$ 1 корень

② $a<0 \Rightarrow \varnothing$

③ $a>0$ $\sqrt{x}-2 = \pm a$

1) $\sqrt{x}=2+a$
$x=(2+a)^2$

2) $\sqrt{x}=2-a$
$0<a<2$
$x=(2-a)^2$

3) $a=2 \Rightarrow x=0$ и $x=16 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ 2 корня

4) $0<a<2 \Rightarrow$ 2 корня

5) $a>2 \Rightarrow$ 1 корень

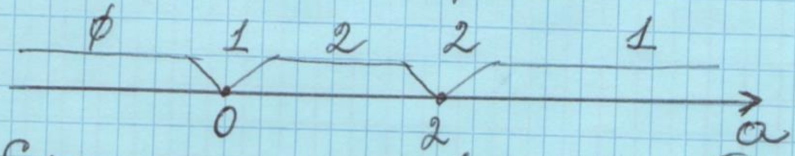
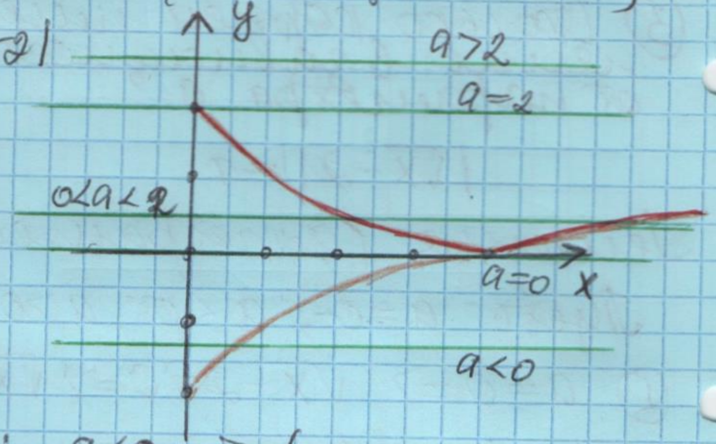


Схема количества корней

⑥ Решение (геометрическое)

$y=|\sqrt{x}-2|$

$y=a$



Ответ: $a<0 \Rightarrow \varnothing$
$a=0 \Rightarrow$ 1 корень
$0<a<2 \Rightarrow$ 2 корня
$a=2 \Rightarrow$ 2 корня
$a>2 \Rightarrow$ 1 корень

№ 6.12

① Сколько корней имеет уравнение в зависимости от параметра a?

$$|x^2-1|=a$$

При $a=0$; $a<0$; $a>0$.

① $a=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow$ 2 корня

② $a<0 \Rightarrow \varnothing$

③ $a>0 \Rightarrow x^2-1=\pm a$

1) $x^2=1+a$

$x_1=+\sqrt{1+a}$

$x_2=-\sqrt{1+a}$

2) $x^2=1-a$

$0<a<1$

$x_3=+\sqrt{1-a}$

$x_4=-\sqrt{1-a}$

$\Rightarrow$ 4 корня

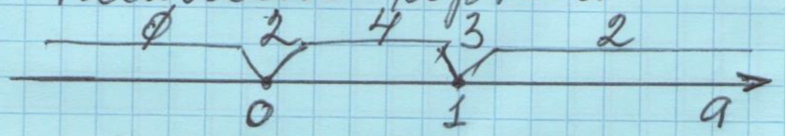
3) $a=1 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$
$\Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$

$\Rightarrow$ 3 корня

4) $a>1 \Rightarrow x^2=1+a \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{1+a}$

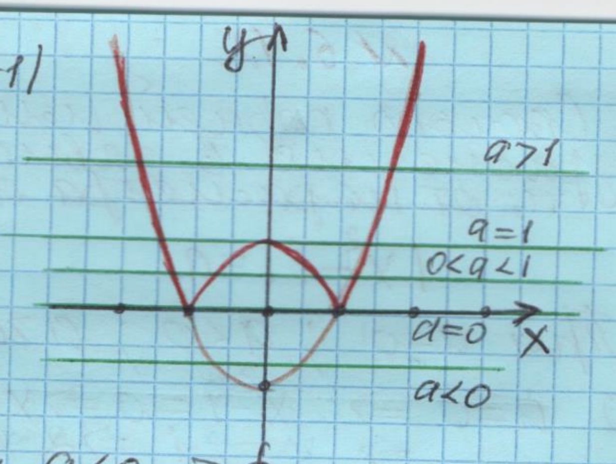
$\Rightarrow$ 2 корня

Количество корней



$y=|x^2-1|$

$y=a$



Ответ: $a<0 \Rightarrow \varnothing$

$a=0 \Rightarrow$ 2 корня

$0<a<1 \Rightarrow$ 4 корня

$a=1 \Rightarrow$ 3 корня

$a>1 \Rightarrow$ 2 корня

№ 6.12

2 Сколько корней имеет уравнение в зависимости от параметра a.

$$|(x+2)^2-3| = a.$$

При $a=0$; $a<0$; $a>0$

Решение (алгебраическое)

1. $a=0 \Rightarrow (x+2)^2=3 \Rightarrow x+2=\pm\sqrt{3}$
$\Rightarrow x_{1,2}=-2\pm\sqrt{3} \Rightarrow 2$ корня

2. $a<0 \Rightarrow \varnothing$

3. $a>0 \quad (x+2)^2-3=\pm a$

1) $(x+2)^2=3+a$
$x+2=\pm\sqrt{3+a}$
$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{3+a}$

2) $(x+2)^2=3-a$
$0<a<3$
$x+2=\pm(3-a)$
$x_{3,4}=-2\pm(3-a)$

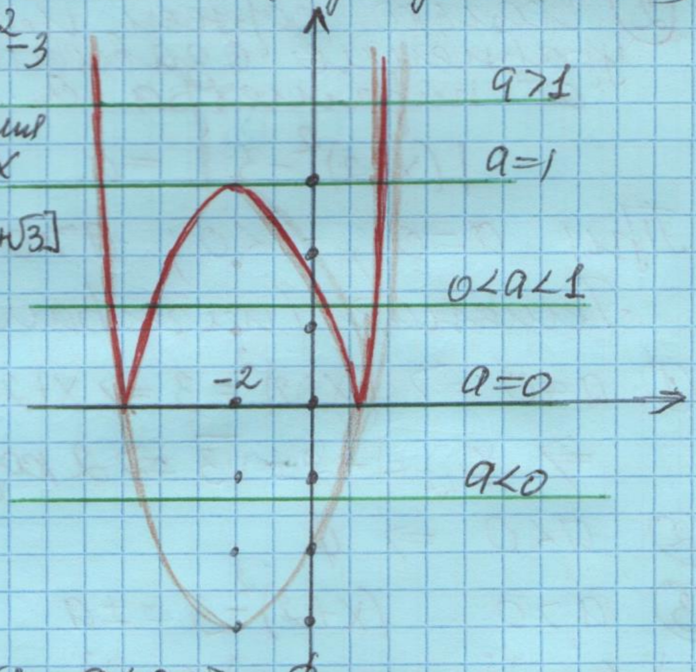
4. $a=3 \Rightarrow (x+2)^2=0 \Rightarrow x=-2$
$\Rightarrow (x+2)^2=6 \Rightarrow x_{1,2}=-2\pm\sqrt{6}$

$0<a<3 \Rightarrow$ 4 корня
$a=3 \Rightarrow$ 3 корня
$a>3 \Rightarrow$ 2 корня

Решение (графическое)

$y=(x+2)^2-3$

симметрия около OX на $[-2-\sqrt{3};-2+\sqrt{3}]$



Ответ: $a<0 \Rightarrow \varnothing$
$a=0 \Rightarrow$ 2 корня
$0<a<1 \Rightarrow$ 4 корня
$a=1 \Rightarrow$ 3 корня
$a>1 \Rightarrow$ 2 корня

№ 6.12

③ Сколько корней имеет уравнение в зависимости от параметра a

$$\left|(|x|-2)^2-3\right|=a.$$

Решение (алгебраическое)

При $a=0$; $a<0$; $a>0$

① $a=0 \Rightarrow (|x|-2)^2=3 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x|-2=\pm\sqrt{3} \Rightarrow |x|=2\pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow x=\pm(2\pm\sqrt{3}) \Rightarrow$ 4 корня

② $a<0 \Rightarrow \varnothing$

③ $a>0 \Rightarrow (|x|-2)^2-3=\pm a$

1) $(|x|-2)^2=3+a$

$|x|-2=\pm\sqrt{3+a}$

$|x|=2\pm\sqrt{3+a}$

$x=\pm(2\pm\sqrt{3+a})$

$2-\sqrt{3+a}>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0<a<1 \Rightarrow$ 8 корней

2) $(|x|-2)^2=3-a$

$0<a<3$

$|x|-2=\pm\sqrt{3-a}$

$|x|=2\pm\sqrt{3-a}$

$x=\pm(2\pm\sqrt{3-a})$

$2-\sqrt{3-a}>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a>-1,\ a>0$

3) $a=1 \Rightarrow (|x|-2)^2=4$

$|x|-2=\pm 2$ $\quad |x|=2\pm 2$

$|x|=0 \Rightarrow x=0$

$|x|=4 \Rightarrow x=\pm 4$

$\Rightarrow$ 7 корней

4) $a=1 \Rightarrow (|x|-2)^2=2$

$|x|-2=\pm\sqrt{2}$

$|x|=2\pm\sqrt{2}$

$x=\pm(2\pm\sqrt{2})$

5) $a=3$ $\quad (|x|-2)^2=6$

$|x|=2\pm\sqrt{6}$

$2-\sqrt{6}<0$

$|x|=2+\sqrt{6}$

$x=\pm(2+\sqrt{6})$

$(|x|-2)^2=0$

$|x|=2$

$x=\pm 2$

$\Rightarrow$ 4 корня

6) $1<a<3$ $\quad (|x|-2)^2=3+a$

$|x|=2\pm\sqrt{3+a}$

$2-\sqrt{3+a}<0$

$x=\pm(2+\sqrt{3+a})$

$(|x|-2)^2=3-a$

$x=\pm(2\pm\sqrt{3-a})$

$\Rightarrow$ 6 корней

7) $a>3$ $\quad (|x|-2)^2=3+a$

$|x|=2\pm\sqrt{3+a}$

$2-\sqrt{3+a}<0$

$x=\pm(2+\sqrt{3+a})$

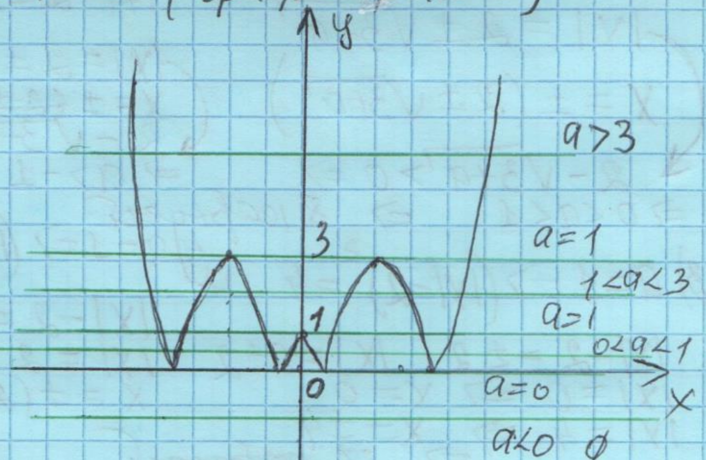
$(|x|-2)^2=3-a$

$3-a<0$

$\varnothing$

$\Rightarrow$ 2 корня

Решение (графическое)



5) $a=3$ $(|x|-2)^2=6$ $\qquad$ $(|x|-2)^2=0$

$|x|=2\pm\sqrt{6}$

$2-\sqrt{6}<0$ $\qquad$ $|x|=2$

$|x|=2+\sqrt{6}$

$x=\pm(2+\sqrt{6})$ $\qquad$ $x=\pm 2$

$\Rightarrow$ 4 корня

6) $1<a<3$ $(|x|-2)^2=3+a$ $\qquad$ $(|x|-2)^2=3-a$

$|x|=2\pm\sqrt{3+a}$ $\qquad$ $x=\pm(2\pm\sqrt{3-a})$

$2-\sqrt{3+a}<0$

$x=\pm(2+\sqrt{3+a})$

$\Rightarrow$ 6 корней

7) $a>3$ $(|x|-2)^2=3+a$ $\qquad$ $(|x|-2)^2=3-a$

$3-a<0$

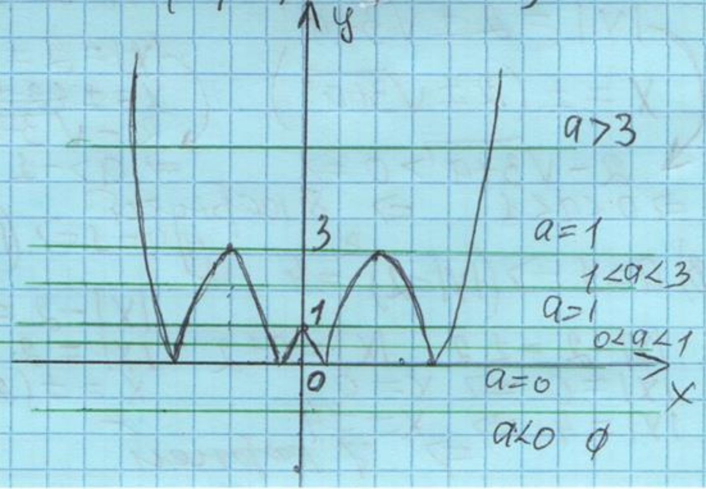
$|x|=2\pm\sqrt{3+a}$

$2-\sqrt{3+a}<0$ $\qquad$ $\varnothing$

$x=\pm(2+\sqrt{3+a})$

$\Rightarrow$ 2 корня

Решение (графическое)



Ответ: $a<0 \Rightarrow \varnothing$

$a=0$ $\quad$ $x_1=2+\sqrt{3}$ $\quad$ $x_3=-(2+\sqrt{3})$

$x_2=2-\sqrt{3}$ $\quad$ $x_4=-(2-\sqrt{3})$

$0<a<1$ $\quad$ $x_1=2+\sqrt{3+a}$ $\quad$ $x_5=2+\sqrt{3-a}$

$x_2=2-\sqrt{3+a}$ $\quad$ $x_6=2-\sqrt{3-a}$

$x_3=-(2+\sqrt{3+a})$ $\quad$ $x_7=-(2+\sqrt{3-a})$

$x_4=-(2-\sqrt{3+a})$ $\quad$ $x_8=-(2-\sqrt{3-a})$

$a=1$ $\quad$ $x_1=0$ $\quad$ $x_5=2-\sqrt{2}$

$x_2=4$ $\quad$ $x_6=-(2+\sqrt{2})$

$x_3=-4$ $\quad$ $x_7=-(2-\sqrt{2})$

$x_4=2+\sqrt{2}$

$1<a<3$ $\quad$ $x_1=2+\sqrt{3+a}$ $\quad$ $x_4=2-\sqrt{3-a}$

$x_2=-(2+\sqrt{3+a})$ $\quad$ $x_5=-(2+\sqrt{3-a})$

$x_3=2+\sqrt{3-a}$ $\quad$ $x_6=-(2-\sqrt{3-a})$

$a=3$ $\quad$ $x_1=2+\sqrt{6}$ $\quad$ $x_3=2$

$x_2=-2-\sqrt{6}$ $\quad$ $x_4=-2$

$a>3$ $\quad$ $x_1=2+\sqrt{3+a}$

$x_2=-(2+\sqrt{3+a})$

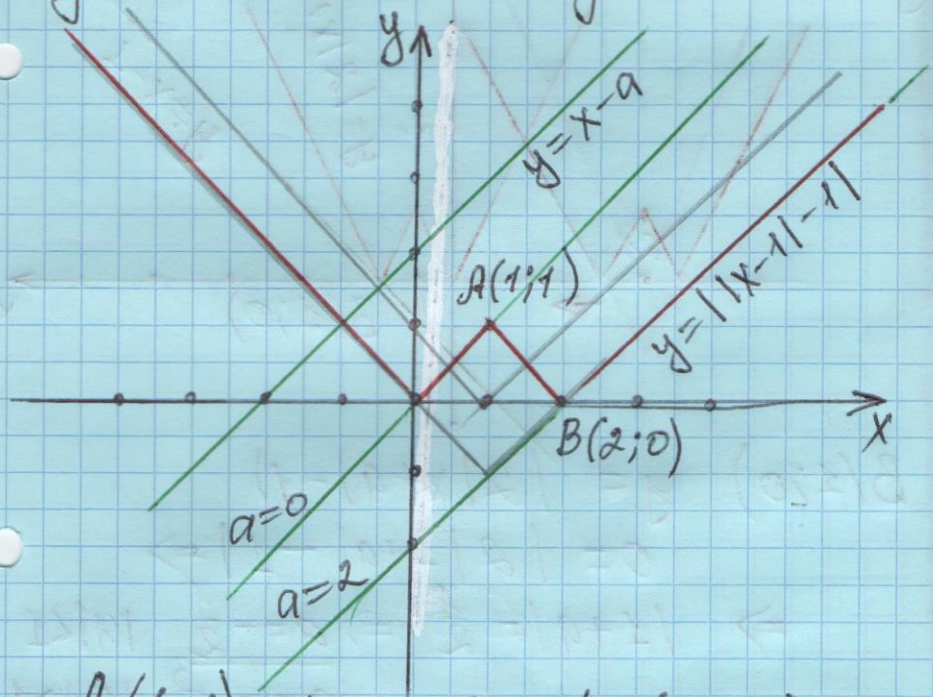
№ 6.15

При каких значениях параметра a уравнение имеет бесконечно много корней?

$$||x-1|-1| = x-a$$

Решение (графическое)

$y = ||x-1|-1|$ $\quad y = x-a$



$A(1;1)$ $\quad y=x-a \quad 1=1-a \Rightarrow \underline{a=0}$

$B(2;0)$ $\quad y=x-a \quad 0=2-a \Rightarrow \underline{a=2}$

Ответ $a=0$, $a=2$.

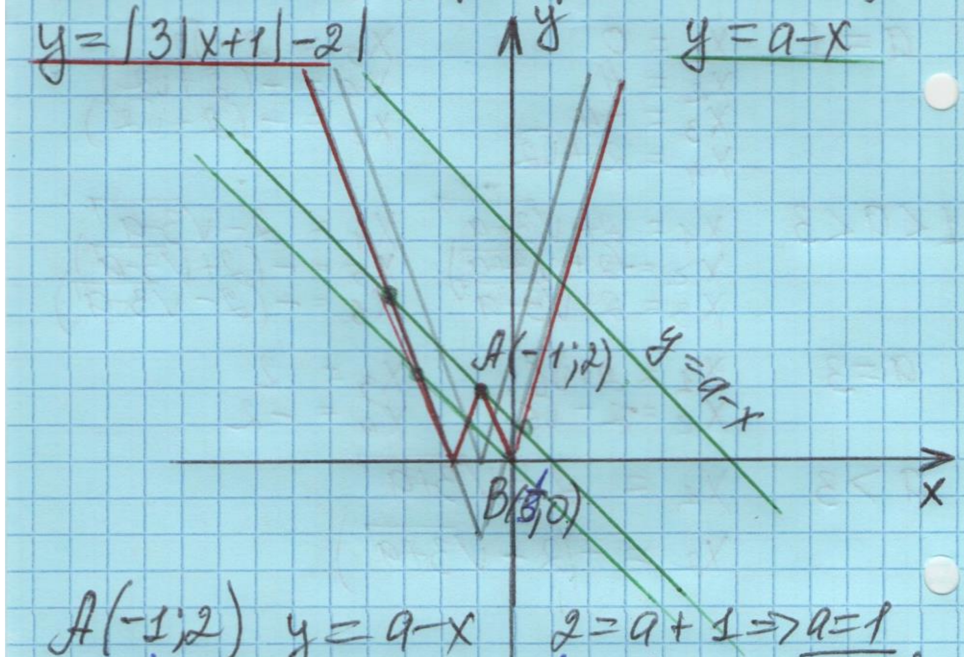
№ 6.16

При каких значениях параметра a уравнение имеет 3 корня?

$$|3|x+1|-2| = a-x$$

Решение (графическое)

$y=|3|x+1|-2|$ $\quad y=a-x$



$A(-1;2)$ $\quad y=a-x \quad 2=a+1 \Rightarrow \underline{a=1}$

$B(-\frac{1}{3};0)$ $\quad y=a-x \quad 0=a+\frac{1}{3} \Rightarrow \underline{a=-\frac{1}{3}}$

$x=-\frac{1}{3}$ корень ур-ия $3|x+1|=2$

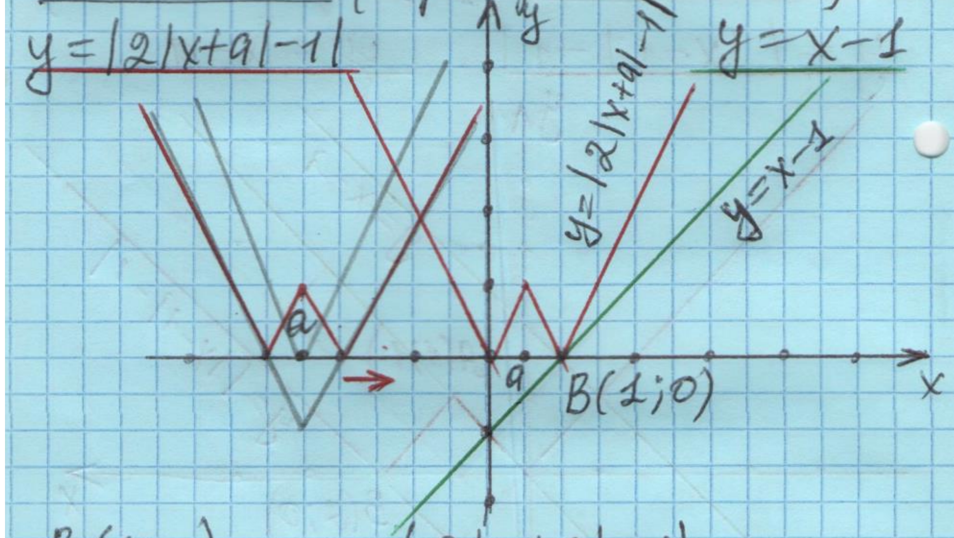
Ответ: $a=1$ $\quad a=-\frac{1}{3}$

№ 6.17

При каких значениях параметра а уравнение имеет единственный корень

$$|2|x+a|-1| = x-1$$

Решение (графическое)



$B(1;0)$ $\quad y = |2|x+a|-1|$

$0 = |2|1+a|-1| \Rightarrow$

$\Rightarrow |1+a| = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$ $\quad |a|<1$

$a = -\frac{3}{2}$ $\quad |a|>1$

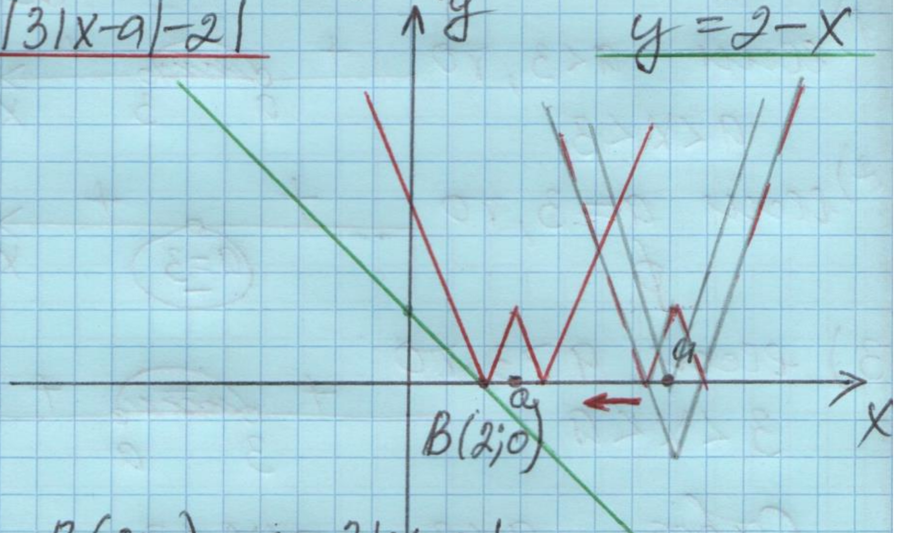
Ответ: $a = -\frac{1}{2}$

№ 6.18

При каких значениях параметра а уравнение имеет единственный корень

$$|3|x-a|-2| = 2-x$$

Решение (графическое)



$B(2;0)$ $\quad y = 3|x-a|-2$

$0 = 3|2-a|-2 \Rightarrow |2-a| = \frac{2}{3}$

$2-a = \frac{2}{3}$ или $2-a = -\frac{2}{3}$

$a = \frac{4}{3} < 2$ $\qquad a = \frac{8}{3} > 2$

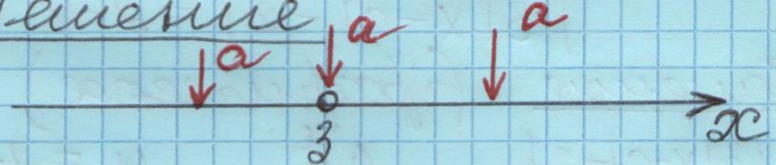
Ответ: $a = \frac{8}{3}$

№ 8.22

① Для каждого a решите неравенство

$$(x-3)(x-a)<0$$

Решение

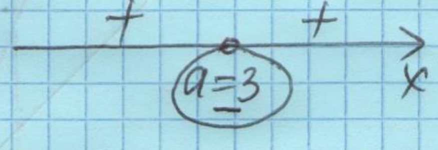


1) если $a<3$, то

$a<x<3$

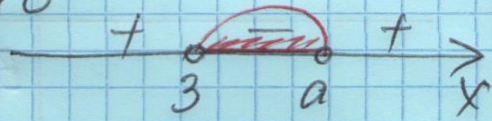
2) если $a=3$, то

$\varnothing$



3) если $a>3$, то

$3<x<a$



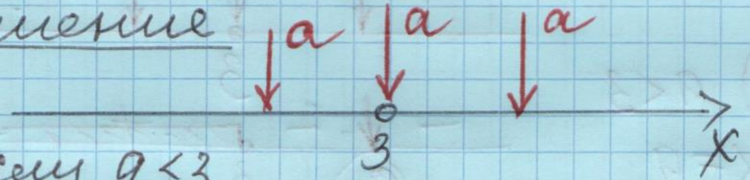
Ответ: $a<3$, $a<x<3$;
$a=3$, $\varnothing$;
$a>3$, $3<x<a$

8.22.

② Для каждого значения a решите неравенство

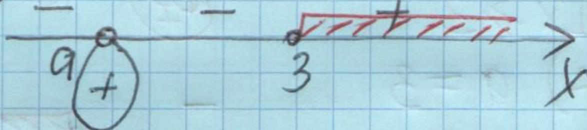
$$(x-3)(x-a)^2>0$$

Решение



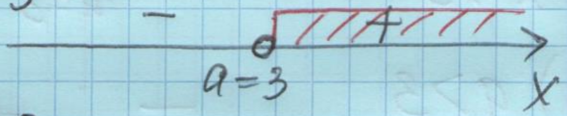
1) если $a<3$

$x>3$



2) если $a=3$

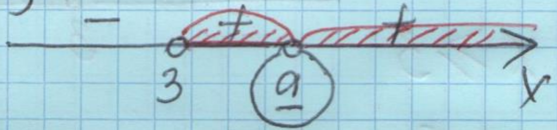
$x>3$



3) если $a>3$

$3<x<a$

$x>a$



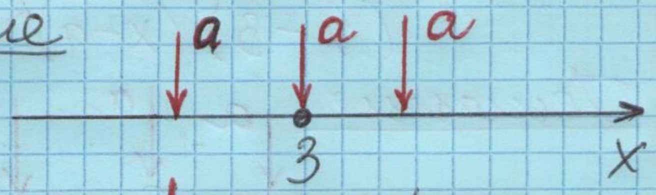
Ответ: $a\le 3$, $x>3$

$a>3$, $3<x<a$ и $x>a$

3) Для каждого а решите неравенство

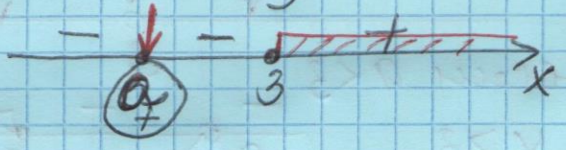
$$(x-3)(x-a)^2 \geq 0$$

Решение



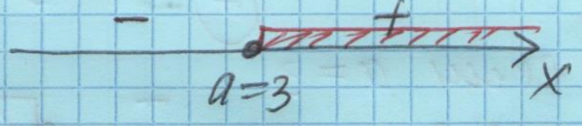
1) $a<3$

$\left[\begin{array}{l} x=a \\ x \geq 3 \end{array}\right.$



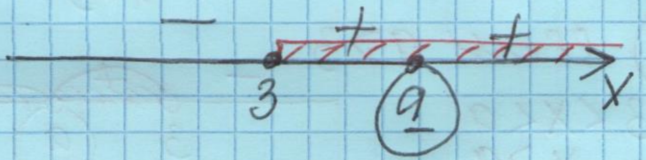
2) $a=3$

$x \geq 3$



3) $a>3$

$x \geq 3$

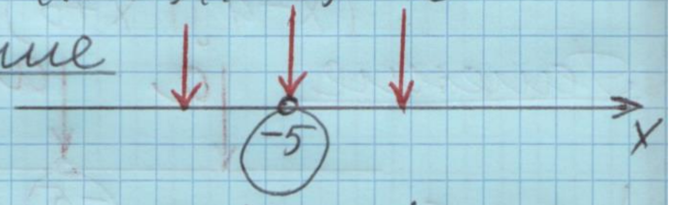


Ответ: $a<3$, $x=a$ и $x \geq 3$
$a \geq 3$, $x \geq 3$

4) Для каждого значения а решите неравенство

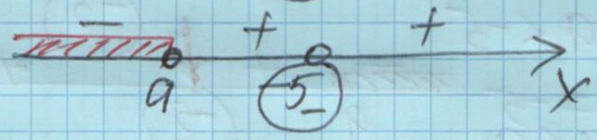
$$(x-a)(x+5)^2<0$$

Решение



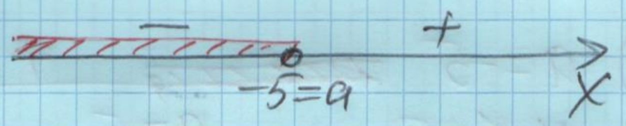
1) $a<-5$

$x<a$



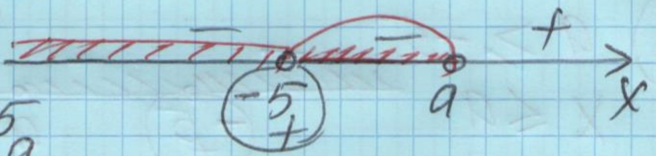
2) $a=-5$

$x<-5$



3) $a>-5$

$x<-5$
$-5<x<a$

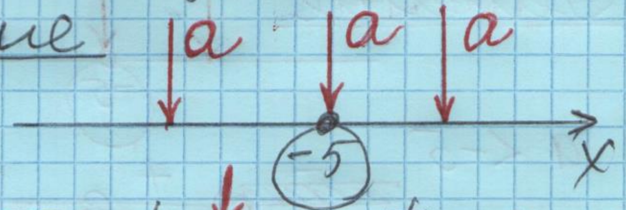


Ответ: $a<-5$, $x<a$
$a=-5$, $x<-5$
$a>-5$ $\left[\begin{array}{l} x<-5 \\ -5<x<a \end{array}\right.$

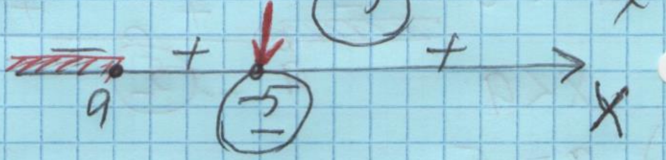
5. Для каждого значения а решите неравенство

$$(x-a)(x+5)^2 \le 0$$

Решение

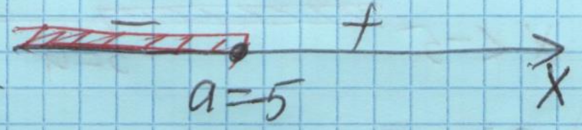


1) $a<-5$



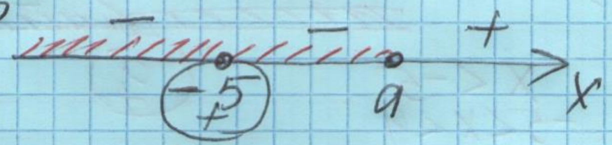
$\left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x\le a \end{array}\right.$

2) $a=-5$



$x \le -5$

3) $a>-5$



$x \le a$

Ответ: $a<-5$, $x=-5$ и $x \le a$

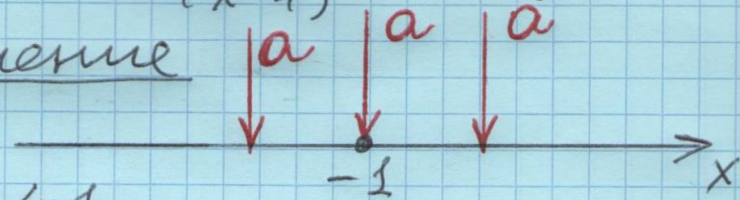
$a=-5$, $x \le -5$

$a>-5$, $x \le a$

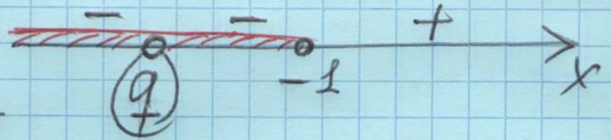
6. Для каждого значения а решите неравенство

$$\frac{(x+1)(x-a)}{(x-a)} \le 0$$

Решение

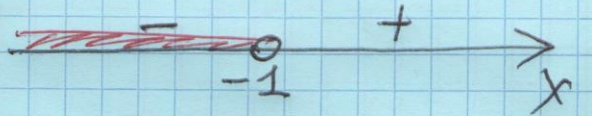


1) $a<-1$



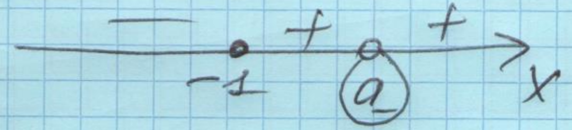
$\left[\begin{array}{l} x<a \\ a<x\le -1 \end{array}\right.$

2) $a=-1$



$x<-1$

3) $a>-1$



$x \le -1$

Ответ: $a<-1$, $\left[\begin{array}{l} x<a \\ a<x\le -1 \end{array}\right.$

$a=-1$, $x<-1$

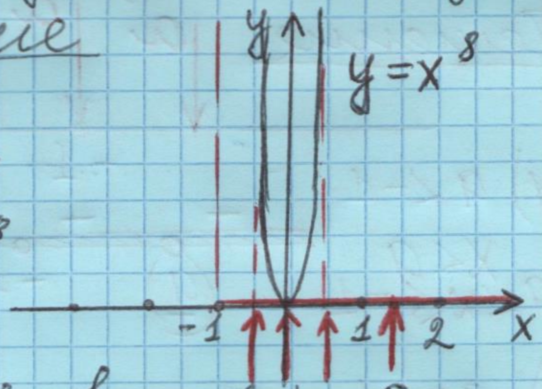
$a>-1$, $x \le -1$

9.12

(21)

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^8$ на промежутке $[-1; a]$, где $a > -1$

Решение



1) $-1 < a < 0$

$f_{max}(-1) = 1$

$f_{min}(a) = a^8$

2) $a = 0$

$f_{max}(-1) = 1$ $f_{min}(0) = 0$

3) $0 < a < 1$ $f_{max}(-1) = 1$ $f_{min}(0) = 0$

4) $a = 1$ $f_{max}(-1) = f_{max}(1) = 1$

$f_{min}(0) = 0$

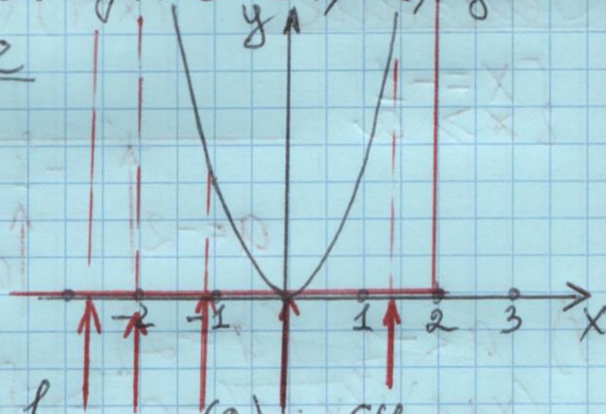
5) $a > 1$ $f_{max}(a) = a^8$ $f_{min}(0) = 0$

9.13

(25)

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^6$ на промежутке $[a; 2]$, где $a < 2$

Решение



1) $0 < a < 2$ $f_{max}(2) = 64$

$f_{min}(a) = a^6$

2) $a = 0$ $f_{max}(2) = 64$ $f_{min}(0) = 0$

3) $-2 < a < 0$ $f_{max}(2) = 64$ $f_{min}(0) = 0$

4) $a = -2$ $f_{max}(2) = f_{max}(-2) = 64$

$f_{min}(0) = 0.$

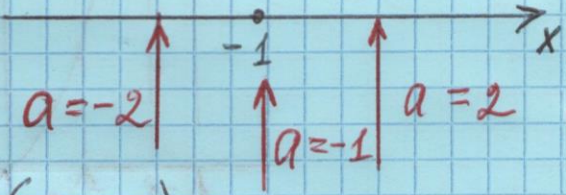
5) $a < -2$ $f_{max}(a) = a^6$

$f_{min}(0) = 0$

① В зависимости от параметра a определите количество корней уравнения

Решение $(x+1)\sqrt[4]{x-a}=0$

$\begin{cases} x=-1 \\ x\geq a \end{cases}$



1) $a<-1$ $(a=-2)$

$(x+1)\sqrt[4]{x+2}=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ x\geq -2 \end{cases} \\ x=-2 \end{array}\right.$ 2 корня

2) $a=-1$

$(x+1)\sqrt[4]{x+1}=0 \Rightarrow x=-1$

3) $a>-1$ $(a=2)$

$(x+1)\sqrt[4]{x-2}=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ x\geq 2 \end{cases} \varnothing \\ x=2 \end{array}\right.$ 1 корень

Ответ $a<-1$ 2 корня

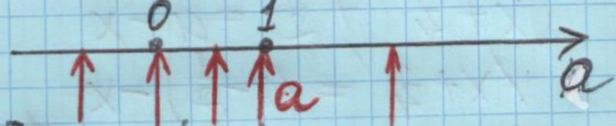
$a\geq -1$ 1 корень

② В зависимости от параметра a определите количество корней уравнения

$(x-1)(\sqrt[4]{x}-a)=0$

Решение

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ x>0 \end{cases} \\ \sqrt[4]{x}=a \end{array}\right.$



$\sqrt[4]{x}=a \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} a\geq 0 & 1 \text{ корень} \\ a<0 & \varnothing \end{array}\right.$

1) $a<0$ $(a=-2) \Rightarrow (x-1)(\sqrt[4]{x}+2)=0$

$\Rightarrow x=1$ 1 корень

2) $a=0 \Rightarrow (x-1)\cdot\sqrt[4]{x}=0 \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \end{array}$ 2 кор.

3) $0<a<1$ $(a=\frac{1}{2}) \Rightarrow (x-1)(\sqrt[4]{x}-\frac{1}{2})=0$

$\Rightarrow x=1$ $x=\frac{1}{4} \Rightarrow$ 2 корня

4) $a=1 \Rightarrow (x-1)(\sqrt[4]{x}-1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=1 \Rightarrow$ 1 корень

5) $a>1$ $(a=2) \Rightarrow (x-1)(\sqrt[4]{x}-2)=0$

$\Rightarrow x=1,\ x=16 \Rightarrow$ 2 корня

Ответ $\left[\begin{array}{l} a<0 \\ a=1 \end{array}\right.$ 1 корень $\left[\begin{array}{l} a\geq 0 \\ a\neq 1 \end{array}\right.$ 2 корня

14.18 (28)

Для каждого значения a решите уравнение

$$\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}} = a - x$$

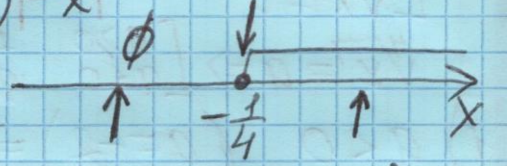
Решение

$$\sqrt{\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2} = a-x$$

$$\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2} = a-x$$

$$\sqrt{x+\frac{1}{4}} = \left(a-\frac{1}{2}\right)-x$$

О.Д.З. $x \geq -\frac{1}{4}$



$x = a-\frac{1}{2}$

1) $x<-\frac{1}{4} \Rightarrow a-\frac{1}{2}<-\frac{1}{4},\ a<\frac{1}{4}$ $\Rightarrow \varnothing$

2) $x \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow a-\frac{1}{2} \geq -\frac{1}{4},\ a \geq \frac{1}{4}$

$\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)^2 = \left(\left(a-\frac{1}{2}\right)-x\right)^2 \Rightarrow a-\frac{1}{2}-x \geq 0$

$x+\frac{1}{4} = \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(a-\frac{1}{2}\right)x + x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-2ax+(a^2-a)=0 \qquad D=4a.$

$x_{1,2} = a \pm \sqrt{a} \Rightarrow$ Если $x_1 = a+\sqrt{a}$

$\Rightarrow a-\frac{1}{2}-a-\sqrt{a} = -\left(\frac{1}{2}+\sqrt{a}\right)<0 \Rightarrow \varnothing$

Если $x_2 = a-\sqrt{a} \Rightarrow a-\frac{1}{2}-a+\sqrt{a} = \sqrt{a}-\frac{1}{2} \geq 0$

Ответ: $a<\frac{1}{4}$ $\varnothing$; $a \geq \frac{1}{4}$ $x = a-\sqrt{a}$

14.19 (29)

Для каждого значения a решите уравнение

$$2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} = a-x$$

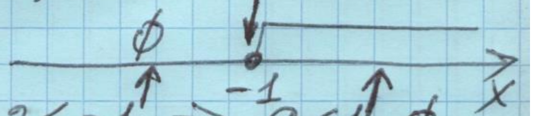
Решение

$$2\sqrt{\left(1+\sqrt{x+1}\right)^2} = a-x$$

$$1+\sqrt{x+1} = \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}x$$

$$\sqrt{x+1} = \left(\frac{1}{2}a-1\right)-\frac{1}{2}x \qquad x=a-2$$

О.Д.З. $x \geq -1$



1) $x<-1 \Rightarrow a-2<-1 \Rightarrow a<1$ $\varnothing$

2) $x \geq -1 \Rightarrow a-2 \geq -1 \Rightarrow a \geq 1$

$\Rightarrow \sqrt{x+1} = \left(\frac{1}{2}a-1\right)-\frac{1}{2}x,\ \frac{1}{2}a-1-\frac{1}{2}x \geq 0$

$\sqrt{x+1} = \frac{1}{2}(a-2-x) \Rightarrow 2\sqrt{x+1} = a-2-x$

$4(x+1) = (a-2)^2-2(a-2)\cdot x+x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-2ax+a^2-4a=0$

$D = 4a^2-4a^2+16a = 16a$

$x_{1,2} = a \pm 2\sqrt{a}$

Если $x_1 = a+2\sqrt{a}$, то $\frac{1}{2}a-1-\frac{1}{2}(a+\sqrt{a}) =$

$= -(1+\sqrt{a}) < 0 \Rightarrow 0$

Если $x_2 = a-2\sqrt{a}$, то $\frac{1}{2}a-1-\frac{1}{2}(a-\sqrt{a}) =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{a}-1$

№14 2016 Найти a, ровно 2 различных корня $\sqrt{x}+\sqrt{2a-x}=a$.

Решение

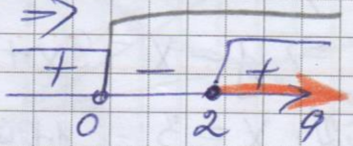
О.Д.З. $\begin{cases} x \geq 0 \\ 2a-x \geq 0 \end{cases}$ $\quad 0 \leq x \leq 2a$

1) при $a<0 \Rightarrow \varnothing$

2) при $a=0 \Rightarrow x=0$

3) при $a>0 \Rightarrow \left(\sqrt{x}+\sqrt{2a-x}\right)^2=a^2 \Rightarrow$

$2\sqrt{x}\cdot\sqrt{2a-x}=a^2-2a \qquad a^2-2a \geq 0$



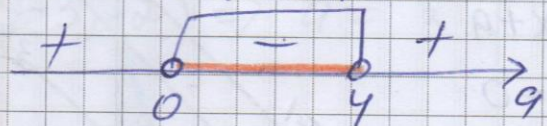
$4x(2a-x)=(a^2-2a)^2$

$\Rightarrow 4x^2-8ax+(a^2-2a)^2=0$

$D=(8a)^2-16(a^2-2a)^2>0 \qquad (8a)^2-(4a^2-8a)^2>0$

$(8a-4a^2+8a)(\cancel{8a}+4a^2-\cancel{8a})>0$

$a^2(a^2-4a)<0 \Rightarrow a^3(a-4)<0$



Ответ: $[2;4)$

№24 2014 Найти a, имеет ровно 2 решения

$\left((a-2)x^2+6x\right)^2-4\left((a-2)x^2+6x\right)+4-a^2=0$

Решение

Пусть $t=(a-2)x^2+6x \Rightarrow t^2-4t+4-a^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_1=a+2$ и $t_2=2-a \Rightarrow \underline{a=0} \quad t_1=t_2=2$

I $\quad (a-2)x^2+6x=a+2 \Rightarrow (a-2)x^2+6x-(a+2)=0$

$a=2 \quad 6x=4 \quad x_1=\frac{2}{3}$

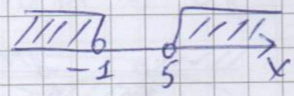
$a\neq 2 \quad D=36+4(a^2-4)=4(5+a^2)> \Rightarrow$ 2 корня

II $\quad (a-2)x^2+6x=2-a \Rightarrow (a-2)x^2+6x+a-2=0$

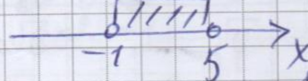
$a=2 \quad 6x=2 \quad x_1=\frac{1}{3}$

$a\neq 2 \quad D=4(5-a)(a+1)$

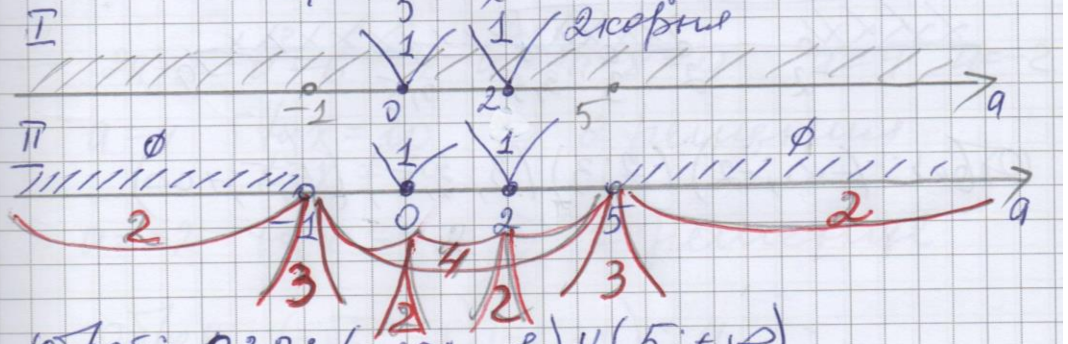
$D=0 \quad \left[\begin{array}{l} a=5 \\ a=-1 \end{array}\right.$ 1 корень

$D<0$ 

0 корней

$D>0$ 

2 корня.



Ответ: $0; 2; (-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$