Тригонометрические функции. Тригонометрические уравнения и неравенства

- Учебное пособие А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.М. Поляков «Математика: алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень»

20.14

При каких значениях параметра a число π является периодом ф-ции $f(x)=\frac{\sin x}{a-\cos x}$?

Решение. Если $T=\pi$, то $f(x+T)=f(x)$, значит

$$f(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{a-\cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{a+\cos x}$$

$$f(x)=\frac{\sin x}{a-\cos x} \Rightarrow$$

$$\frac{-\sin x}{a+\cos x}=\frac{\sin x}{a-\cos x} \Rightarrow a=0$$

Ответ: $a=0$

20.15

При каких значениях параметра a число $\pi/2$ является периодом ф-ции $f(x)=\frac{\cos 2x}{3a+\sin 2x}$?

Решение. Если $T=\frac{\pi}{2}$, то

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$$

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\cos 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{3a+\sin 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\cos(2x+\pi)}{3a+\sin(2x+\pi)}=\frac{-\cos 2x}{3a-\sin 2x}$$

$$f(x)=\frac{\cos 2x}{3a+\sin 2x} \Rightarrow$$

при $a=0$ $T=\frac{\pi}{2}$

Ответ: $a=0$

20.16

Найдите все рациональные значения a при которых функции имеют общий период.

$$f(x)=\cos\frac{2x}{\sqrt{5}+a^2} \text{ и } g(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{125}-4a+1}$$

Решение. $T(\cos x)=2\pi$

$T(\operatorname{tg} x)=\pi.$

$$T_f=\frac{2\pi}{\frac{2}{\sqrt{5}+a^2}}=\pi(\sqrt{5}+a^2)$$

$$T_g=\frac{\pi}{1/(\sqrt{125}-4a+1)}=\pi(\sqrt{125}-4a+1)$$

$$\frac{T_f}{T_g}=\frac{\sqrt{5}+a^2}{\sqrt{125}-4a+1}=K \Rightarrow K\in R$$

$$\sqrt{5}+a^2=K(\sqrt{125}-4a+1) \Rightarrow$$

$$\underline{\sqrt{5}}+a^2=\underline{K5\sqrt{5}}-4aK+K \Rightarrow$$

$$\sqrt{5}=K\cdot 5\sqrt{5} \Rightarrow K=\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{T_f}{T_g}=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow T_g=5\cdot T_f \Rightarrow 5\sqrt{5}-4a+1=5\cdot\sqrt{5}+5a^2$$

$$\Rightarrow 5a^2+4a-1=0 \quad D=36$$

$$a_1=\frac{-4+6}{10}=\frac{1}{5} \qquad a_2=\frac{-4-6}{10}=-1$$

Ответ: $-1;\ \frac{1}{5}$

28.11

При каких значениях a имеет решение уравнен.

$\cos 2x = -4a^2+4a-2$?

Решение Т.к. $|\cos 2x| \le 1$,

то $|-4a^2+4a-2|^2 \le 1^2 \Rightarrow (-4a^2+4a-2)^2-1^2 \le 0$

$(-4a^2+4a-2-1)(-4a^2+4a-2+1) \le 0$

$(4a^2-4a+3)(4a^2-4a+1) \le 0$

$4a^2-4a+3=0 \quad D<0 \Rightarrow \varnothing$

$4a^2-4a+1=0 \quad (2a-1)^2 \le 0 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

Ответ $a=\frac{1}{2}$

28.12

При каких значениях a имеет решение ур-ие

$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = -a^2-1$?

Решение Т.к. $\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right| \le 1$,

то $|-a^2-1|^2 \le 1^2 \Rightarrow (-a^2-1-1)(-a^2-1+1) \le 0$

$\Rightarrow a^2(a^2+2) \le 0$ т.к. $a^2+2>0$, то

$a^2 \le 0 \Rightarrow \quad a=0$

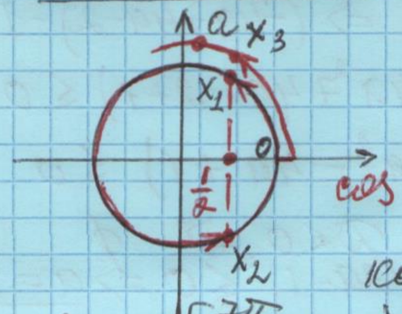
Ответ $a=0$

28.13

При каких значениях $a>0$ промежуток $[0;a]$ содержит не менее трех корней ур-ие

$\cos x = \frac{1}{2}$?

Решение $\cos x = \frac{1}{2}$



$x_1 = \frac{\pi}{3}, \; x_2 = \frac{5\pi}{3}$

$x_3 = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$

если $a \ge \frac{7\pi}{3}$, то корней не менее трех

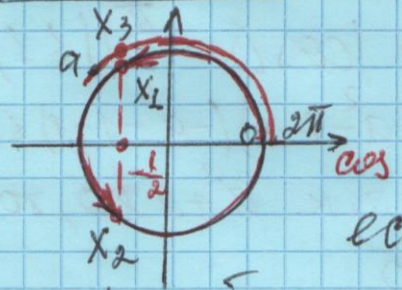
Ответ: $\left[\frac{7\pi}{3}; +\infty\right)$

28.14

При каких значениях $a>0$ промежуток $[0;a]$ содержит не менее трех корней ур-ие

$\cos x = -\frac{1}{2}$

Решение $\cos x = -\frac{1}{2}$



$x_1 = \frac{2\pi}{3} \quad x_2 = \frac{4\pi}{3}$

$x_3 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$

если $a \ge \frac{8\pi}{3}$, то

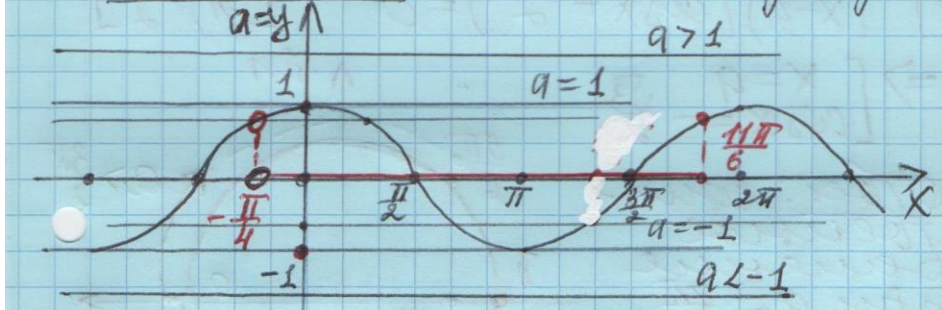
корней не менее трех

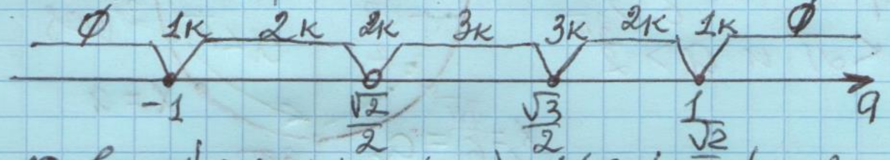
Ответ: $\left[\frac{8\pi}{3}; +\infty\right)$

28.15 и 28.16

а) Определите количество корней уравнения $\cos x = a$ на $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{11\pi}{6}\right)$ в зависимости от a.

Решение. Решим графически.

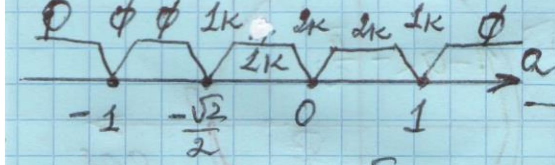


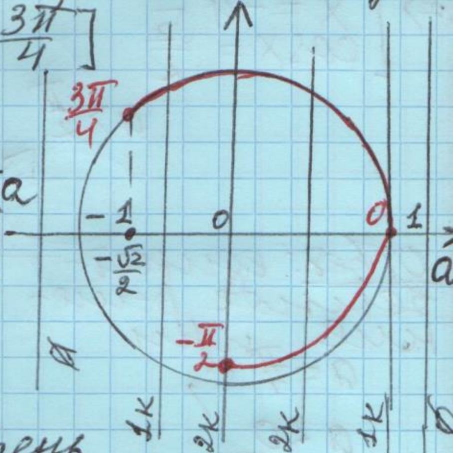


Ответ: 1) $a < -1$, $a > 1$ $\Rightarrow \varnothing$ 2) $-1 < a \le \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$ $\Rightarrow$ 2 корня

3) $a = -1$, $a = 1$ $\Rightarrow$ 1 корень 4) $\frac{\sqrt{2}}{2} < a \le \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ 3 корня

б) $\cos x = a$ $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$





Ответ: 1) $a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a > 1$ $\Rightarrow \varnothing$

2) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \le a < 0$, $a = 1$ $\Rightarrow$ 1 корень

3) $0 \le a < 1 \Rightarrow$ 2 корня

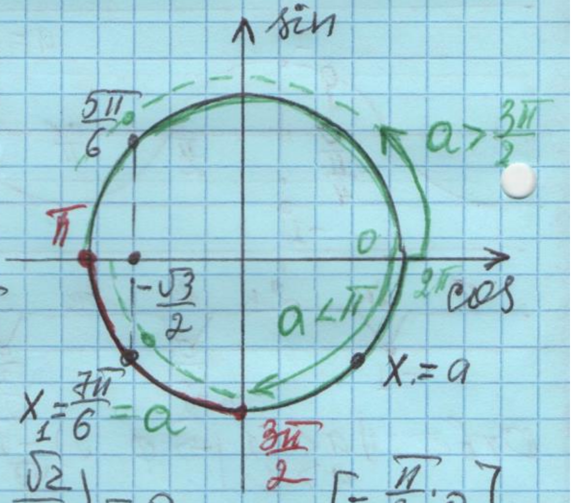
28.17 и 28.18

При каких значениях a уравнение имеет единственный корень на промежутке.

а) $(x-a)\left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

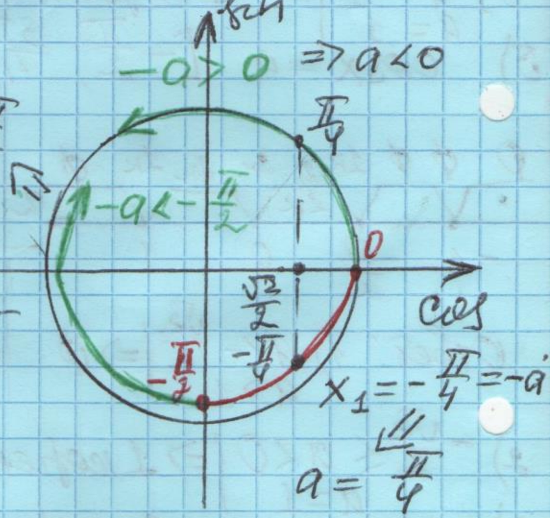
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

Ответ: единственное решение при $a = \frac{7\pi}{6}$, $a < \pi$ и $a > \frac{3\pi}{2}$



б) $(x+a)\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -a \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$



Ответ: единственное решение при $a = \frac{\pi}{4}$, $a < 0$, $a > \frac{\pi}{2}$

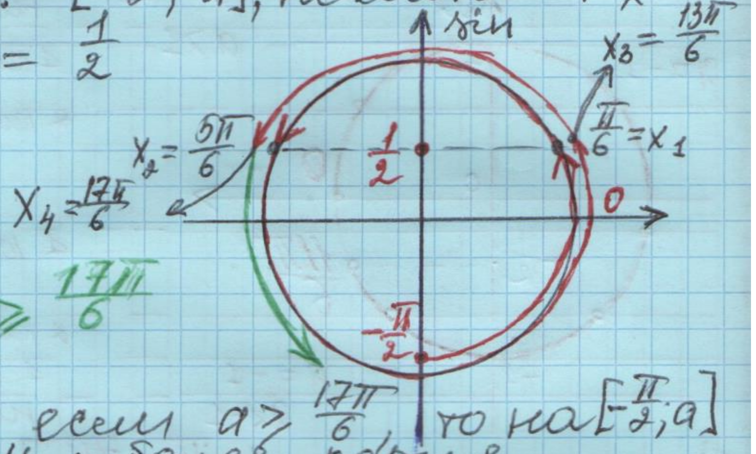
(42)

29.13 и 29.14.

При каких значениях a промежуток содержит определенное количество корней ур-ия

а) $a>0$? $[-\frac{\pi}{2}; a]$, не менее 4-х

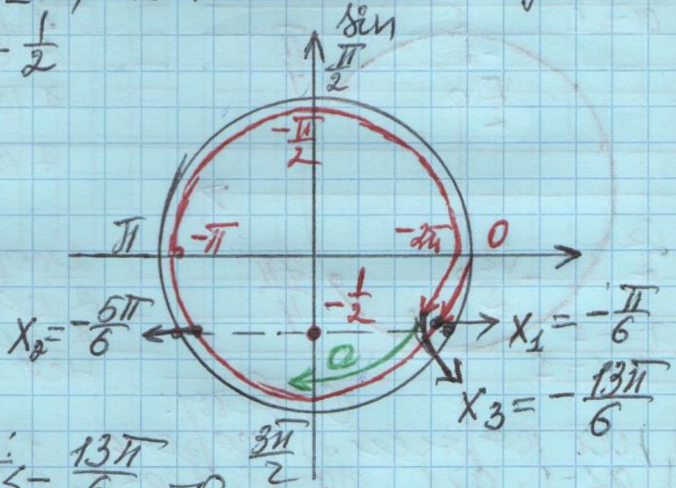
$\sin x = \frac{1}{2}$



Ответ: если $a \geq \frac{17\pi}{6}$, то на $[-\frac{\pi}{2}; a]$ будет 4 и более корня.

б) $a<0$? $[a; 0]$ не менее трех

$\sin x = -\frac{1}{2}$



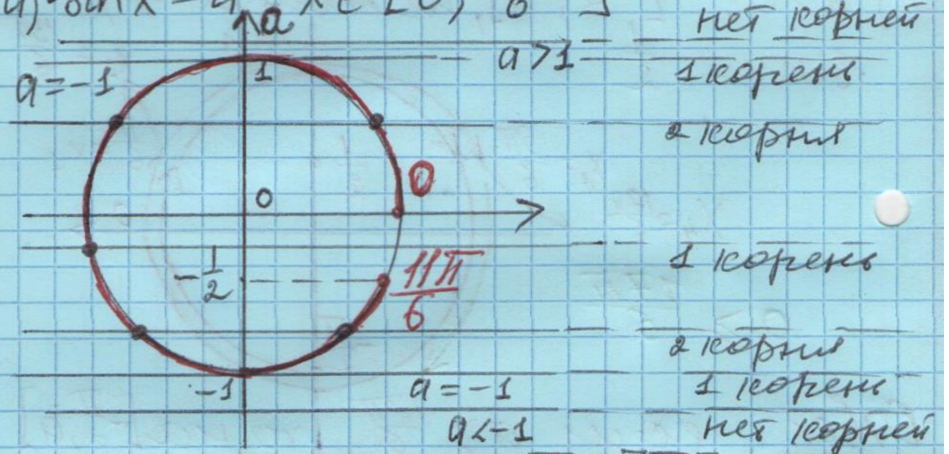
Ответ: если $a \leq -\frac{13\pi}{6}$, то на $[0; a]$ будет 3 и более корня

(43)

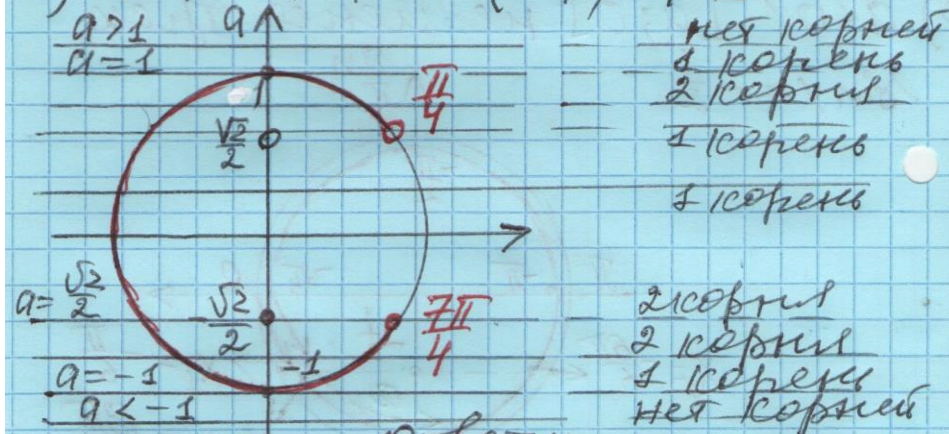
29.15

Определите количество корней уравнения $\sin x = a$ в зависимости от a на промежутке.

а) $\sin x = a$, $x \in [0; \frac{11\pi}{6}]$



б) $\sin x = a$ $x \in (\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}]$



Ответы:

1) нет корней 2) 1 корень 3) 2 корня

а) $a<-1$, $a>1$ а) $a=\pm 1$, $-\frac{1}{2}<a<0$ а) $(-1; -\frac{1}{2}]$, $[0; 1)$

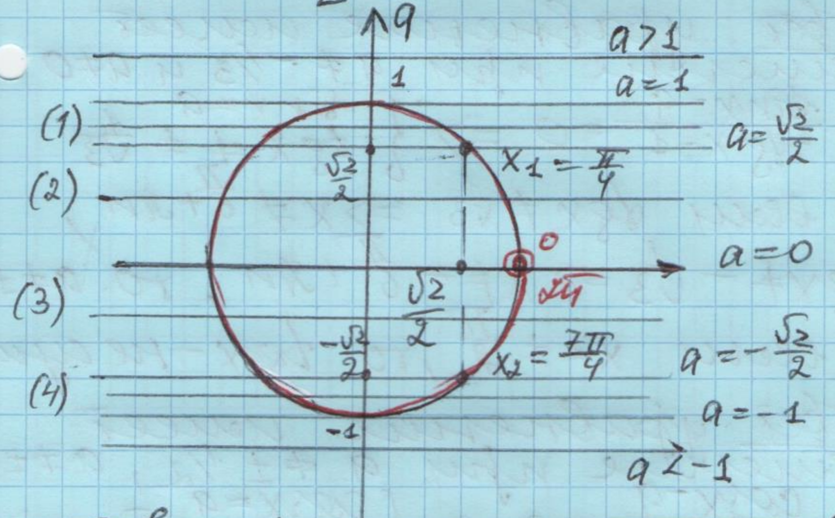
б) $a<-1$, $a>1$ б) $a=\pm 1$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$ б) $(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}]$; $[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1)$

29.17

Сколько корней в зависимости от значений a имеет уравнение

$$\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sin x - a) = 0 \text{ на } [0; 2\pi]$$

Решение $\left[\begin{array}{l}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin x = a\end{array}\right.$



Ответ 1) $a > 1$, $a < -1$ | 2 корня $x_1 = \pm\frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{7\pi}{4}$

2) $a = \pm 1$, $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 3 корня $x_1 = \pm\frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{7\pi}{4}$; $x_3 = \frac{\pi}{2}$ или $x_3 = \frac{3\pi}{2}$ или $x_3 = \frac{3\pi}{4}$ или $x_3 = \frac{5\pi}{4}$

3) $-1 < a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1$ | 4 корня $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{7\pi}{4}$

$x_{3,4} = (-1)^n \arcsin a + \pi k, k \in Z$ или

$x_{3,4} = (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n, n \in Z$

30.9

При каких значениях a имеет решение уравнен.

а) $\frac{\operatorname{tg} x - a}{\operatorname{ctg} x + 3} = 0 \Rightarrow \begin{cases}\operatorname{tg} x = a\\ \operatorname{ctg} x \ne -3\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ если $\operatorname{ctg} x \ne -3$, то $\operatorname{tg} x \ne -\frac{1}{3}$ и если $x = \pi n$, то $\operatorname{ctg} x$ не сущест.

Ответ: уравнение имеет решение при $a \ne -1/3$ и $a \ne 0$

б) $\frac{\sin x - a}{3\operatorname{tg}^2 x - 1} = 0 \Rightarrow \begin{cases}\sin x = a\\ \operatorname{tg} x \ne \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$

$\Rightarrow$ если $\operatorname{tg} x \ne \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x \ne \frac{\pi}{6} + \pi n$,

$\operatorname{tg} x \ne -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x \ne -\frac{\pi}{6} + \pi n$, то. $a \ne \pm\frac{1}{2}$

и если $x = \pm\frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} x$ — не сущ.

Ответ уравнение имеет решение при $a \ne \pm 1/2$, $a \ne \pm 1$

в) $\frac{\cos x - a}{\operatorname{ctg}^2 x - 3} = 0 \Rightarrow \begin{cases}\cos x = a\\ \operatorname{ctg} x \ne \pm\sqrt{3}\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{ctg} x \ne \sqrt{3} \Rightarrow x \ne \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

и $\operatorname{ctg} x \ne -\sqrt{3} \Rightarrow x \ne -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

и если $x = \pi n \Rightarrow \operatorname{ctg} x$ не сущест

Ответ уравнение имеет решение при $a \ne \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ и

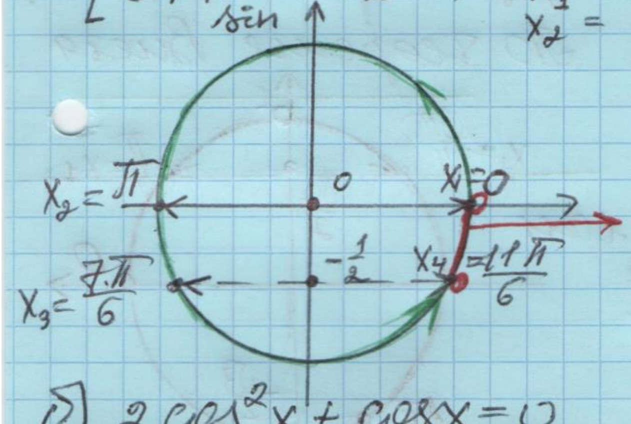
$a \ne \pm 1$

32.32.

Определите, при каких $a>0$ промежуток $[0; a]$ и корней уравнения

а) $2\sin^2 x + \sin x = 0$ $\quad n=4.$

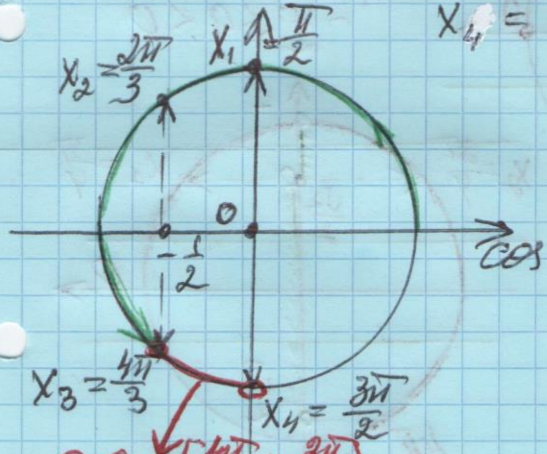
$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = 0 & \Rightarrow x = \pi n \quad n\in Z \\ \sin x = -1/2 & \Rightarrow x_1 = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k \quad k\in Z \\ & x_2 = \frac{11\pi}{6} + 2\pi m \quad m\in Z \end{array}\right.$



$a \in \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right)$

б) $2\cos^2 x + \cos x = 0$ $\quad n=3.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \cos x = 0 & \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \text{ и } x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \\ \cos x = -1/2 & \Rightarrow x_3 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n\in Z \\ & x_4 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, \quad k\in Z \end{array}\right.$



$a \in \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right)$

32.33

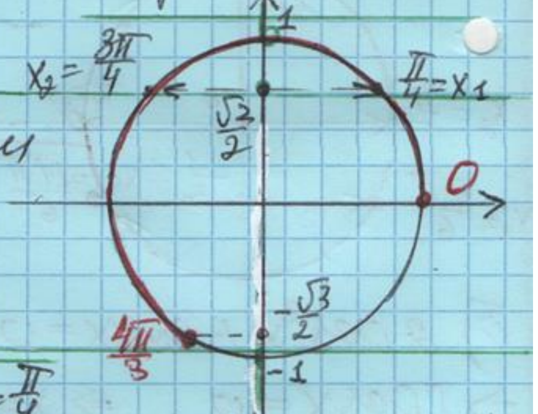
Определите, при каких значениях a уравнение

$\sin^2 x - \left(a + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin x + \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0$ имеет на $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$

а) два корня б) три корня в) ≥ 3

Решение По теореме Виета

$\left[\begin{array}{l} \sin x = a \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

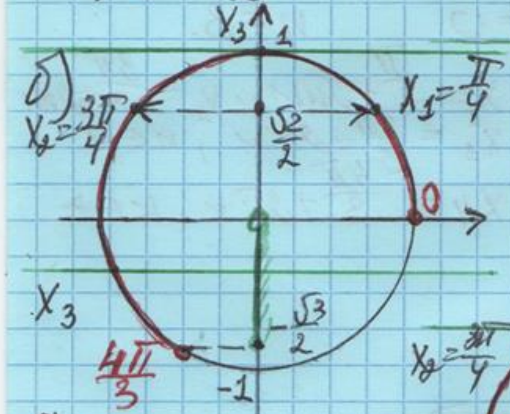


а) 2 корня, если

$a>1$, $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$a<-\frac{\sqrt{3}}{2}$

б)



3 корня, если

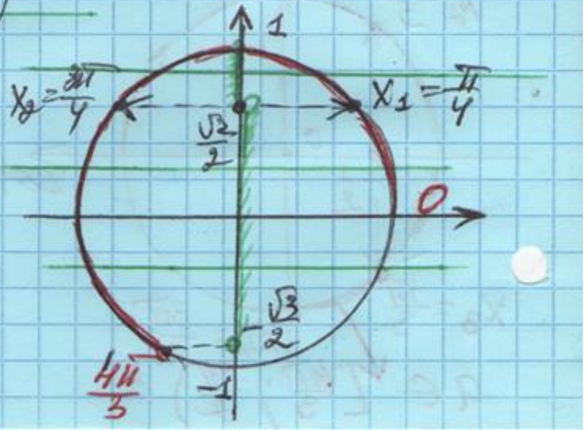
$a=1$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<0$

в) не менее трех корней

$\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leq 1$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq a<\frac{\sqrt{2}}{2}$



32.35

(48)

При каких значениях a уравнения равносильны:

(1) $\sin x = 2\sin^2 x$

(2) $\sin 3x = (a+1)\sin x - 2(a-1)\sin^2 x$

Решение

(1) $\sin x = 2\sin^2 x \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$

(2) $\sin 3x = (a+1)\sin x - 2(a-1)\sin^2 x$

$\Rightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x = (a+1)\sin x - 2(a-1)\sin^2 x \Rightarrow \sin x(4\sin^2 x - 2(a-1)\sin x + a-2) = 0 \Rightarrow$

1) $\sin x = 0$ 2) $4\sin^2 x - 2(a-1)\sin x + a - 2 = 0$

$D = 4(a-3)^2$

$\sin x = \frac{2(a-1)+2(a-3)}{8} = \frac{a-2}{2}$

$\sin x = \frac{2(a-1)-2(a-3)}{8} = \frac{1}{2}$

Итак (2) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \sin x = 1/2\\ \sin x = (a-2)/2\end{array}\right.$

Для равносильности уравнений должно выполняться условие или, $(a-2)/2 = 0 \Rightarrow a = 2$, или $(a-2)/2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 3$, или

$\left|\frac{a-2}{2}\right| > 1 \Rightarrow (a-2)^2 > 2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a-2-2)(a-2+2) > 0 \quad a(a-4) > 0$

0 4 a

$\left[\begin{array}{l}a < 0\\ a > 4\end{array}\right.$

32.36

(49)

При каких значениях a уравнения равносильны

(1) $\sin 2x + a = \sin x + 2a\cos x$

(2) $2\cos 2x + a^2 = 5a\cos x - 2$

Решение

(1) $\sin 2x + a = \sin x + 2a\cos x \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l}\sin x - a = 0\\ 2\cos x - 1 = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = a\\ \cos x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$

(2) $2\cos 2x + a^2 = 5a\cos x - 2 \Rightarrow$

$4\cos^2 x - 5a\cos x + a^2 = 0 \quad D = 9a^2$

$\left[\begin{array}{l}\cos x = \frac{5a+3a}{8} = a\\ \cos x = \frac{5a-3a}{8} = \frac{2a}{8} = \frac{a}{4}\end{array}\right.$

(1) $\left[\begin{array}{l}\sin x = a\\ \cos x = \frac{1}{2}\end{array}\right. \longleftrightarrow$ (2) $\left[\begin{array}{l}\cos x = a\\ \cos x = \frac{a}{4}\end{array}\right.$

$\frac{1}{2} = \frac{a}{4} \Rightarrow a = 2$

$\left[\begin{array}{l}\sin x = 2\\ \cos x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$ и $\left[\begin{array}{l}\cos x = 2\\ \cos x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$ равносильны

(1) $\left[\begin{array}{l}\sin x = a\\ \cos x = 1/2\end{array}\right. \longleftrightarrow$ (2) $\left[\begin{array}{l}\cos x = a\\ \cos x = \frac{a}{4}\end{array}\right.$

$a = \frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l}\sin x = \frac{1}{2}\\ \cos x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$ и $\left[\begin{array}{l}\cos x = \frac{1}{2}\\ \cos x = \frac{1}{8}\end{array}\right.$ неравно.

т.к. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, а $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2 \neq 1$

Ответ: $a = 2$

33.31

При каких значениях a уравнение имеет 1 корень?

$$6a\cos\frac{\pi x}{2} - a^2(1+6|x|)+7=0$$

Решение. Т.к. $\cos(-x)=\cos x$ и $|-x|=x$ =>

=> если x_0 – корень уравнения, то и $-x_0$ – корень ур-ия, значит всегда 2 корня существуют для любых a

=> $x=0$ – 1 корень => $a^2-6a-7=0$

=> $a_1=7$
$a_2=-1$.

а) Пусть $a_1=7$ =>

$6\cdot7\cdot\cos\frac{\pi x}{2} - 49(1+6|x|)+7=0$ =>

=> $6\cdot\cos\frac{\pi x}{2} - 7\cdot6|x|-6=0$ => $\cos\frac{\pi x}{2}=7|x|+1$

=> если $x=0$, то равенство верно.

б) Пусть $a_2=-1$ =>

$-6\cdot\cos\frac{\pi x}{2} - (1+6|x|+7=0$ =>

=> $\cos\frac{\pi x}{2} = 1-|x|$ => уравнение имеет 2 корня, причем $x=0$ не будет корень этого уравн.

Ответ: $a=7$

33.32

При каких значениях a уравнение имеет 1 корень?

$$a^2\cos\pi x - a(1+8x^2)=6 \quad (1)$$

Решение. Т.к $\cos(-x)=\cos x$ и $(-x)^2=x^2$, то данное ур-ие всегда имеет 2 корня разного знака, но равные по модулю т.е. x_0 и $-x_0$ наши корни. Чтобы корень уравнения был 1 должно выполняться $x_0=0$.

Пусть $x_0=0$ – корень => $a^2-a-6=0$

=> $a_1=3$ и $a_2=-2$.

а) Пусть $a=3$ => $3\cos\pi x-8x^2-3=0$

и если $x_0=0$ корень, то равенство верное.

б) Пусть $a=-2$ =>

$4\cos\pi x+2(1+8x^2)=6$ =>

=> $2\cos\pi x+1+8x^2=3$ => $\cos\pi x+8x^2=1$

и если $x_0=0$ корень ур-ия (1), то уравнение $\cos\pi x+8x^0=1$ не имеет корня $x_0=0$.

Ответ: $a=3$

33.33

При каких значениях a уравнение имеет 1 корень

$$x^2 - 2a\sin(\cos x) + 2 = 0$$

Решение. Т.к. $\cos(-x) = \cos x$, $(-x)^2 = x^2$ $\Rightarrow$ то уравнение имеет x_0 и $-x_0$, т.е. два корня. Чтобы уравнение имело 1 корень, то он должен быть равен 0.

Пусть $x_0 = 0$ корень $\Rightarrow -2a\sin 1 + 2 = 0$

$\Rightarrow a = \frac{1}{\sin 1}$

Ответ: $a = \frac{1}{\sin 1}$

33.34

При каких значениях a уравнение имеет 1 корень

$$2x^2 - a\cdot tg(\cos x) + a^2 = 0.$$

Решение. Т.к. $\cos(-x) = \cos x$ и $(-x)^2 = x^2$ $\Rightarrow$ ур-ние имеет 2 корня x_0 и $-x_0$. Чтобы уравнение имело 1 корень, то он должен быть равен 0.

Пусть $x_0 = 0$ корень $\Rightarrow -a\,tg 1 + a^2 = 0$

$a(a - tg 1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

$a_2 = tg 1.$

Ответ: $0;\ tg 1.$

№ 31 2013 Найдите a, имеет хотя бы 1 корень

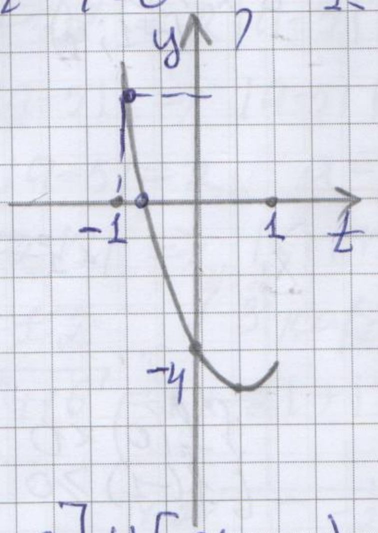
$$(4\cos x-3-a)\cos x-2{,}5\cos 2x+1{,}5=0$$

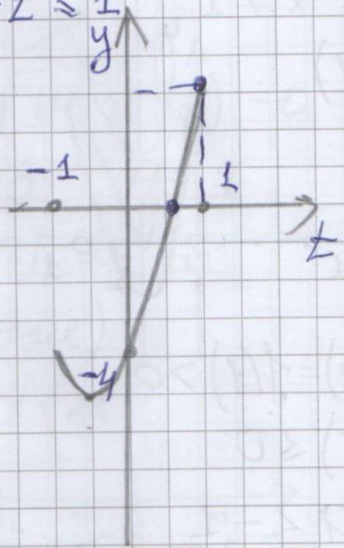
Решение

$t=\cos x \quad (4t-3-a)t-2{,}5(2t^2-1)+1{,}5=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2+(3+a)t-4=0 \qquad -1\le t\le 1$

$f(0)=-4<0$





$$\left[\begin{array}{l} f(-1)\ge 0 \\ f(1)\ge 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a\le -6 \\ a\ge 0 \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-6]\cup[0;+\infty)$

№34
2013

Найти a, имеет ! корень на $(\frac{\pi}{2};\pi]$

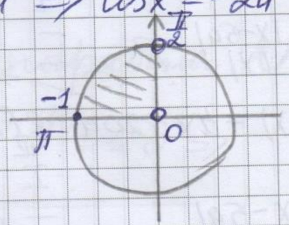
$|\sin^2 x+2\cos x+a| = \sin^2 x+\cos x-a$

Решение

I $\sin^2 x+2\cos x+a\geq 0$

$\cancel{\sin^2 x}+2\cos x+a=\cancel{\sin^2 x}+\cos x-a \Rightarrow \cos x=-2a$

$-1\leq -2a<0 \Rightarrow 0<a\leq \frac{1}{2}$



Подставим $\cos x=-2a$ в

$\sin^2 x+2\cos x+a\geq 0$

$1-\cos^2 x+2\cos x+a\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4a^2+3a-1\leq 0, \quad -1\leq a\leq \frac{1}{4}$

II $\sin^2 x+2\cos x+a<0$

$-\sin^2 x-2\cos x-a=\sin^2 x+\cos x-a \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sin^2 x+3\cos x=0 \Rightarrow (2\cos x+1)(\cos x-2)=0$

$\Rightarrow \cos x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}\in(\frac{\pi}{2};\pi]$

Подставим $\cos x=-\frac{1}{2}$ в $\sin^2 x+2\cos x+a<0$

$1-\cos^2 x+2\cos x+a<0 \Rightarrow a<\frac{1}{4}$

! корень при $a=\frac{1}{4}$ (из I)

! корень при $a\leq 0$

Ответ: $(-\infty;0]\ \{\frac{1}{4}\}$

№27
2014

Найти a $\forall x \in R$ выполн. неравенство

$$|3\sin x + a^2 - 22| + |7\sin x + a + 12| \le 11\sin x + |a^2 + a - 20| + 11$$

Решение.

Пусть $\sin x = t$ $|t| \le 1$

$|3t + a^2 - 22| + |7t + a + 12| \le 11t + |a^2 + a - 20| + 11$

$f(t) = |\underline{3}t + a^2 - 22| + |\underline{7}t + a + 12|$

$g(x) = 11t + |a^2 + a - 20| + 11.$

$f(t)$ – кусочно линейн, $k \le 10$; $g(t)$ – линейная, $k = 11$ $\Rightarrow g(t) - f(t) \uparrow$

$\Rightarrow g(t) - f(t) \ge 0 \Rightarrow f(x) \le g(t)$ при $t \ge -1$

$f(-1) \le g(-1) \Rightarrow |\underbrace{a^2 - 25}_{(a-5)(a+5)}| + |a+5| \le |\underbrace{a^2 + a - 20}_{(a+5)(a-4)}|$

$\Leftrightarrow |a+5| \cdot (|a-4| - |a-5| - 1) \ge 0$

$a + 5 = 0$ $a = -5$ $|a-4| - |a-5| - 1 \ge 0$

1) $a \le 4 \Rightarrow -2 \ge 0$ $\varnothing$
2) $4 < x < 5 \Rightarrow a \ge 5$ $\varnothing$
3) $x \ge 5 \Rightarrow 0 = 0$

Ответ: $\{-5\} \cup [5; +\infty)$

14.20

(30)

При каких значениях параметра a уравнение имеет единственное решение

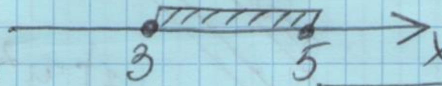
$$ax-1=\sqrt{8x-x^2-15}$$

Решение

Пусть $y=ax-1$ и $y=\sqrt{8x-x^2-15}$

О.Д.З. $8x-x^2-15\geq 0$; $y\geq 0$

$x^2-8x+15\leq 0$ $x_1=3$ $x_2=$



$y=ax-1$

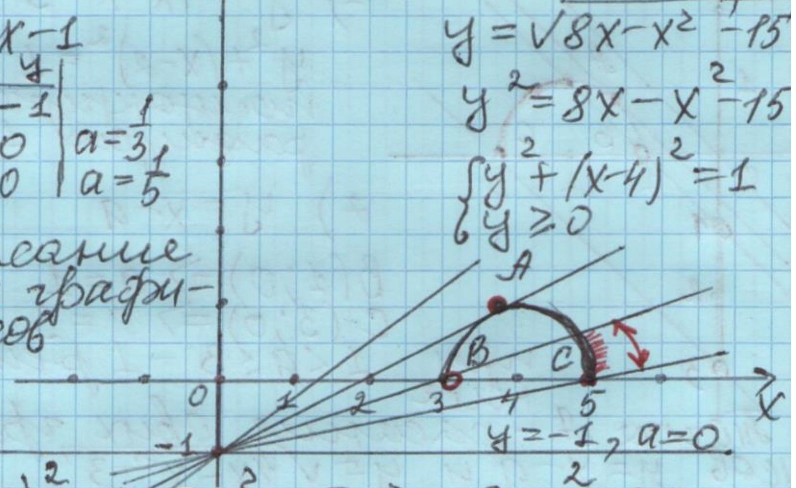
	x	y	
	0	-1	
B	3	0	$a=\frac{1}{3}$,
C	5	0	$a=\frac{1}{5}$

$y=\sqrt{8x-x^2-15}$

$y^2=8x-x^2-15$

$\begin{cases} y^2+(x-4)^2=1 \\ y\geq 0 \end{cases}$

A – касание двух графиков



$y=-1$, $a=0$

$(ax-1)^2=8x-x^2-15 \Rightarrow 60a^2-32a=0$

$\Rightarrow a=0$ и $a=\frac{8}{15}$

Ответ: $a=\frac{8}{15}$; $\frac{1}{5}\leq a<\frac{1}{3}$

14.21

(31)

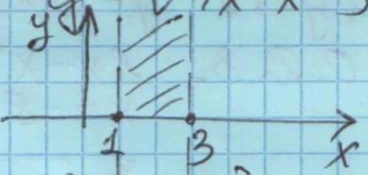
При каких значениях параметра a уравнение имеет единственное решение

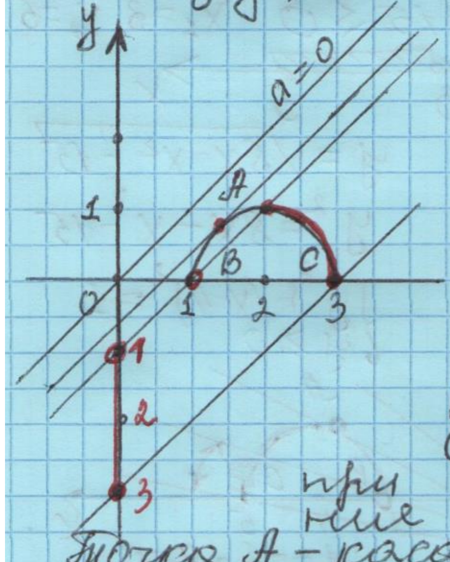
$$\sqrt{4x-x^2-3}=x-a$$

Решение Пусть $y=x-a$

$y=\sqrt{4x-x^2-3}$

О.Д.З. $\begin{cases} 4x-x^2-3\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$





1) $y^2=4x-x^2-3$

$y^2+(x-2)^2=1$

полуокружность радиуса 1.

2) $y=x-a$

$B(1;0)\Rightarrow a=1$

$C(3;0)\Rightarrow a=3$

при $1<a\leq 3$ – 1 решение

Точка A – касание двух графиков $y=x-a$ и $y=\sqrt{4x-x^2-3}$

$(x-a)^2=4x-x^2-3 \Rightarrow 2x^2-x(2a+4)+a^2+3=0$

$\Rightarrow D=0 \Rightarrow a^2-4a+2=0 \Rightarrow$

$a_1=2+\sqrt{2} \Rightarrow \varnothing$

$a_2=2-\sqrt{2}$

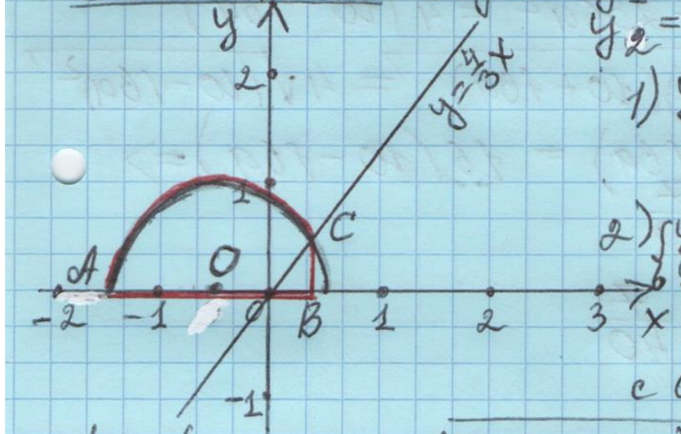
Ответ: $2-\sqrt{2}$; $1<a\leq 3$

16.15

При каких значениях a множеством решений является промежуток длиной $\frac{9}{5}$ неравенства $\sqrt{1-(x+2a)^2} \geqslant \frac{4}{3}x$

Решение Пусть $y_1 = \frac{4}{3}x$

$y_2 = \sqrt{1-(x+2a)^2}$



1) $y = \frac{4}{3}x$

x	y
0	0
3	4

2) $\begin{cases} y = \sqrt{1-(x+2a)^2} \\ y \geqslant 0 \end{cases}$

$y^2+(x+2a)^2 = 1$

полуокружн. с $O(-2a;0)$ $R=1$

график $y=\sqrt{1-(x+2a)^2}$ выше графика $y = \frac{4}{3}x$ на отрезке $AB = \frac{9}{5}$. Точка C – пересечения двух графиков в I четверти.

Найдем координату по оси X точки C.

$\frac{4}{3}x = \sqrt{1-(x+2a)^2} \Rightarrow$

$\frac{25x^2}{9} + 4xa + 4a^2 - 1 = 0 \Rightarrow$

$D = 16a^2 - \frac{16\cdot 25}{9}a^2 + \frac{100}{9} = \frac{100-256a^2}{9}$

$x_1 = \frac{-4a-\sqrt{D}}{\frac{50}{9}} \in$ III четверти

$x_2 = \frac{-4a+\sqrt{D}}{\frac{50}{9}} \in$ I четверти

т. $A(-2a-1;0)$ и $B\left(\frac{9}{50}(-4a+\sqrt{D});0\right)$

$|AB| = \frac{9}{50}(-4a+\sqrt{D}) + 2a + 1 = \frac{9}{5} \quad |\cdot 50$

$9(-4a+\sqrt{D}) + 100\cdot a + 50 = 90 \Rightarrow$

$9\sqrt{D} = 40 - 64a$

$9 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{100-256a^2} = 4(10-16a)$

$3\cdot\sqrt{(10-16a)(10+16a)} = 4\sqrt{(10-16a)^2}$

$\Rightarrow 9\cdot(10+16a) = 16(10-16a) \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \frac{7}{40}$

Ответ: $\frac{7}{40}$

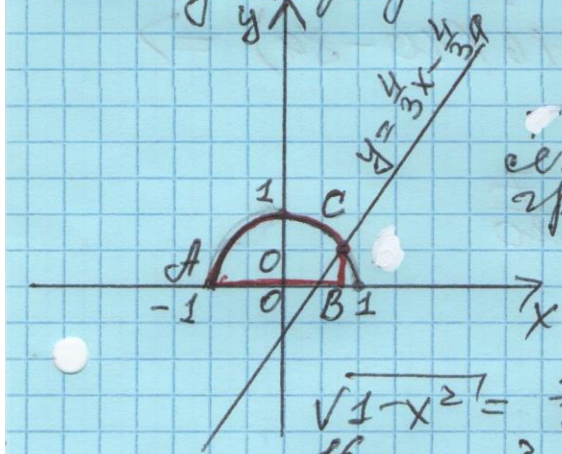
16.16 (34)

При каких значениях параметра a множество решений неравенства

$$\sqrt{1-x^2} \geq \frac{4}{3}(x-a)$$

является промежуток длиной $\frac{9}{5}$?

Решение. Пусть $y=\frac{4}{3}(x-a)$ и $y=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2+x^2=1$ — полуокружность $O(0;0)$ и $R=1$



$y=\frac{4}{3}(x-a)$

C — точка пересечения двух графиков лежит в I четв.

$$\sqrt{1-x^2}=\frac{4}{3}(x-a)$$

$$1-x^2=\frac{16}{9}(x-a)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2-32xa+16a^2-9=0$$

$$D=(32a)^2-4\cdot 25(16a^2-9)=900-576a^2$$

$$x_1=\frac{32a-\sqrt{D}}{50} \quad \phi$$

$$x_2=\frac{32a+\sqrt{D}}{50} \Rightarrow C(x_2;\sqrt{1-x_2^2}) \in I$$

(35)

$AB=\frac{9}{5}$.

$AB=AO+OB=1+\frac{4}{5}$

$O(0;0)$, $B\left(\frac{32a+\sqrt{D}}{50};0\right)$

$OB=\frac{32a+\sqrt{D}}{50}=\frac{4}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{D}=40-32a$

$900-576a^2=(40-32a)^2$

$(30-24a)(30+24a)=16(10-8a)^2$

$9(10-8a)(10+8a)=16(10-8a)^2$

$9(10+8a)=16(10-8a) \Rightarrow$

$\Rightarrow a=\frac{7}{20}$

Ответ $a=\frac{7}{20}$