Показательная и логарифмическая функции

Учебное пособие 11 класс

А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.М. Поляков

«Математика: алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень»

Ким Н.А.

2.24

При каких значениях a уравнение имеет единственный корень?

$$9^x-(a+1)\cdot 3^x+3a-6=0$$

Решение. Пусть $3^x=t>0$

$t^2-(a+1)t+3a-6=0$

Единственный корень уравнение имеет при условии

I $\begin{cases} D>0 \\ t_1\cdot t_2<0 \end{cases}$ II $D=0$

I $D=(a+1)^2-4(3a-6)=a^2-10a+25=$

$=(a-5)^2>0 \Rightarrow \forall a,\ a\neq 5$

$t_1\cdot t_2=3a-6<0 \Rightarrow a<2$

Если

$a=2 \Rightarrow t^2-2\cdot t=0 \Rightarrow t(t-2)=0$

$\Rightarrow t=0 \Rightarrow 3^x=t=0 \Rightarrow \varnothing$

$t=2 \Rightarrow 3^x=2 \Rightarrow x=\log_3 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ единственный корень

Итак $(-\infty;2]$

II $D=(a+1)^2-4(3a-6)=(a-5)^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a=5$

Ответ: $(-\infty;2]\cup\{5\}$

2.25

При каких значениях a уравнение не имеет корней

$$25^x+5^{x+1}-a^2+a+6=0$$

Решение. Пусть $5^x=t>0$

$t^2+5t-a^2+a+6=0.$

Уравнение не имеет корней при условии

I $D<0$ II $\begin{cases} D\geq 0 \\ t_1<0 \quad t_2<0 \end{cases}$

I $D=25-4(-a^2+a+6)=(2a-1)^2<0 \Rightarrow$ нет значений a

II $D=(2a-1)^2\geq 0 \Rightarrow$ любые значения a.

$t_1=\frac{-5+(2a-1)}{2}=a-3<0 \Rightarrow \underline{a<3}$

$t_2=\frac{-5-(2a-1)}{2}=-a-2<0 \Rightarrow \underline{a>-2}$

Если $\underline{a=3} \Rightarrow 25^x+5\cdot5^x-9+3+6=0$

$5^x(5^x+5)=0 \Rightarrow$

$5^x\neq 0$ и $5^x\neq -5 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ нет корней.

Если $\underline{a=-2} \Rightarrow 25^x+5\cdot5^x-4-2+6=0$

$5^x(5^x+5)=0 \Rightarrow$

$5^x\neq 0$ и $5^x=-5 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ нет корней.

Ответ: $[-2;3]$

2.26

При каких значениях a уравнение имеет два различных корня?

$$4^x-(a+1)\cdot2^x+2a-2=0$$

Решение: Пусть $2^x=t>0$

$t^2-(a+1)t+2a-2=0$

Уравнение имеет два различных корня при условии $\begin{cases} D>0 \\ t_1>0 \text{ и } t_2>0 \end{cases}$

$D=(a+1)^2-4(2a-2)=(a-3)^2>0$

$\Rightarrow$ любые значения a, кроме $a=3$.

$t_1=\frac{a+1+(a-3)}{2}=a-1>0 \Rightarrow \underline{a>1}$

$t_2=\frac{a+1-(a-3)}{2}=2>0 \Rightarrow \forall a$

Ответ: $(1;3)\cup(3;+\infty)$

2.29

При каких значениях a уравнение имеет два различных корня?

$$(\sqrt{x}-a)(3^{2x}-4\cdot 3^x+3)=0$$

Решение. Пусть $3^x=t>0$

1) $t^2-4t+3=0$ По теореме Виета $t_1=3$ и $t_2=1$ $\Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l}3^x=3\\3^x=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=1\\x_2=0\end{array}\right.$ два различных корня

2) $\sqrt{x}-a=0\Rightarrow\sqrt{x}=a\geq 0$

Это уравнение должно или не иметь корней при $a<0$, или иметь корни $x_1=1\Rightarrow$ $\Rightarrow a=1$ и $x_2=0\Rightarrow a=0$

Ответ: $(-\infty;0]\cup\{1\}$

2.30

При каких значениях a уравнение имеет два различных корней?

$$(\sqrt{x}-a)(2^{2x}-10\cdot 2^x+16)=0$$

Решение. Пусть $2^x=t>0$

I $t^2-10t+16=0$ По теореме Виета $t_1=8$ и $t_2=2$ $\Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l}2^x=8\\2^x=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=3\\x_2=1\end{array}\right.$ два различных корней

II $\sqrt{x}=a$

Это уравнение или не имеет корней при $a<0$ или имеет корни $x_1=3\Rightarrow a=\sqrt{3}$

$x_2=1\Rightarrow a=1$

Ответ: $(-\infty;0)\cup\{1;\sqrt{3}\}$

2.35

При каких значениях a имеет единственное решение уравнение

$$2^{|x|}=ax^2+a^2$$

Решение. Т.к $|\pm x_0|=x_0$ и $(\pm x_0)^2=x_0^2$, то если уравнение имеет корень x_0, то это уравнение имеет и $-x_0$ корнем уравнения. Т.о. уравнение $2^{|x|}=ax^2+a^2$ всегда имеет 2 корня (x_0 и $-x_0$). Единственный корень уравнения возможен при $x_0=0$

Пусть $x_0=0 \Rightarrow 2^0=a^2 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$

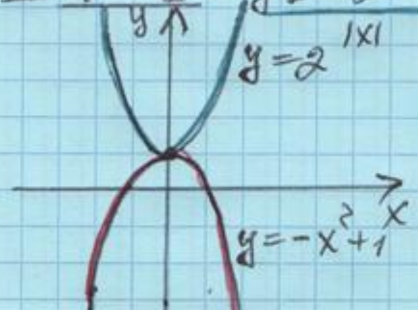
Проверим нет ли еще корней при $a=1$ и $a=-1$

I $a=1$ $\quad y_1=2^{|x|}$, $y_2=x^2+1$

x	0	1	-1
y_1	1	2	2
y_2	1	2	2

$\Rightarrow$ $x_1=0$ $x_2=1$ $x_3=-1$ три корня

II $a=-1$ $\quad y_1=2^{|x|}$ $\quad y_2=-x^2+1$



$x=0$ – 1 корень

Ответ: $a=-1$

2.36

При каких значениях a уравнение имеет единственное решение

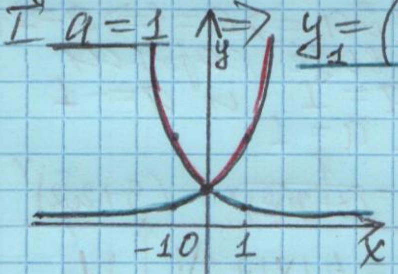
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}=\left(a+\frac{1}{3}\right)x^2+a^2$$

Решение. Т.к. $|\pm x_0|=x_0$ и $(\pm x_0)^2=x_0^2$ то уравнение имеет всегда два корня (x_0 и $-x_0$), если они не равны 0. Единственный корень уравнения $x=0$.

Пусть $x=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^0=a^2 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$

Проверим есть ли еще корни уравнения при $a=1$ и $a=-1$

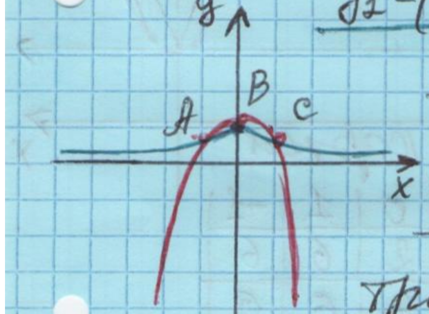
I $a=1$ $\Rightarrow$ $y_1=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$ $\quad y_2=\frac{4}{3}x^2+1.$



x	0	1	-1
y_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
y_2	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{3}$

1 корень уравнен.

II $a=-1$ $\Rightarrow$ $y_1=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$ $\quad y_2=-\frac{2}{3}x^2+1$



x	0	1	-1
y_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
y_2	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	B	C	A

три корня

Ответ: $a=1$

2.37

При каких значениях a уравнение имеет единственное решения?

$$(3-2\sqrt{2})^x+(3+2\sqrt{2})^x=(3a+1)|x|+2a^2$$

Решение $(3-2\sqrt{2})^x=\left(\frac{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}}\right)^x=$
$=\left(\frac{9-8}{3+2\sqrt{2}}\right)^x=\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^x}$ Итак.

$$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^x}+(3+2\sqrt{2})^x=(3a+1)|x|+2a^2$$

Уравнение имеет 2 корня x_0 и $-x_0$. Единственный корень $x_0=0$.

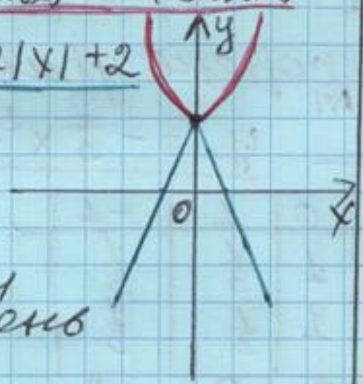
Пусть $x_0=0 \Rightarrow 1+1=2a^2 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm1$

Проверим есть ли ещё корни уравнения при $a=1$ и $a=-1$

I $a=-1$

$y_1=\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^x}+(3+2\sqrt{2})^x$

$y_2=-2|x|+2$



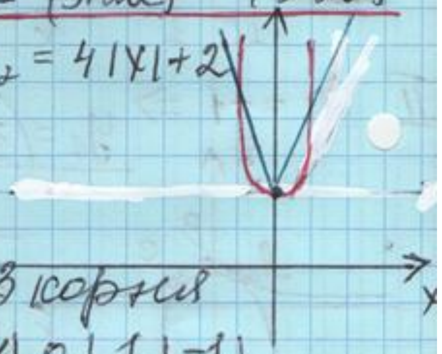
один корень

Ответ: $a=-1$

II $a=1$

$y_1=\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^x}+(3+2\sqrt{2})^x$

$y_2=4|x|+2$



3 корня

x	0	1	-1
y_1	2	6	6
y_2	2	6	6

2.38

При каких значениях a имеет единственное решение уравнения

$$(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=2(a-1)x^2+\frac{1}{2}a^2$$

Решение $(2-\sqrt{3})^x=\frac{1}{(2+\sqrt{3})^x} \Rightarrow$
$\frac{1}{(2+\sqrt{3})^x}+(2+\sqrt{3})^x=2(a-1)x^2+\frac{1}{2}a^2$. Уравнение имеет 2 корня x_0 и $-x_0$. Уравнение будет иметь единственный корень, если $x_0=0$.

Пусть $x=0 \Rightarrow 1+1=\frac{1}{2}a^2 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm2$

Проверим есть ли ещё корни уравнения при $a=2$ и $a=-2$

I $a=2$ $y_1=\frac{1}{(2+\sqrt{3})^x}+(2+\sqrt{3})^x$

$y_2=2x^2+2$

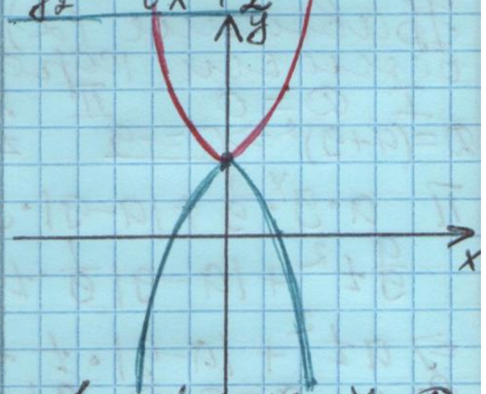
x	0	1	-1
y_1	2	4	4
y_2	2	4	4

$x_1=0$ $x_2=1$ $x_3=-1$

3 корня

II $a=-2$ $y_1=\frac{1}{(2+\sqrt{3})^x}+(2+\sqrt{3})^x$

$y_2=-6x^2+2$



1 корень $x=0$

Ответ $a=-2$

2.39

При каких значений a уравнения равносильны?

$$4^{x+1}+2^{x+4}=2^{x+2}+16 \qquad (1)$$

$$|a-9|\cdot 3^{x-2}+a\cdot 9^{x-1}=1 \qquad (2)$$

Решение (1): Пусть $2^x=t>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4t^2+16t=4t+16 \Rightarrow t^2+3t-4=0$

$\Rightarrow t_1=-4<0$ и $t_2=1 \Rightarrow 2^x=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=0$ единственный корень.

(2): Пусть $x=0$ корень уравнения (2), тогда

$|a-9|\cdot\frac{1}{9}+a\cdot\frac{1}{9}=1 \Rightarrow |a-9|=9-a$

$\Rightarrow 9-a\geq 0 \Rightarrow \underline{a\leq 9}$

Уравнение (2) имеет единственный корень при условии

I $D=0$ II $D>0$

$D=(a+9)^2 \Rightarrow \underline{a=-9}$ $t_1\cdot t_2<0$, где $t=3^x$

II $a\cdot 9^x\cdot\frac{1}{9}+|a-9|\cdot 3^x\frac{1}{9}=1 \Rightarrow$ Пусть $3^x=t$

$\frac{a}{9}t^2+|a-9|\frac{1}{9}\cdot t=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow at^2+|a-9|\cdot t-9=0$

Если $\underline{a=0} \Rightarrow 9t=9 \Rightarrow t=1 \Rightarrow x=0$

Если $\underline{a\neq 0} \Rightarrow t^2+\frac{|a-9|}{a}t-\frac{9}{a}=0$

$\Rightarrow$ По теореме Виета $t_1\cdot t_2=-\frac{9}{a}<0$

$\Rightarrow \underline{a>0}$ Итак ответ: $[0;9]\cup\{-9\}$

2.40

При каких значениях a уравнения равносильны

$$3^x+3^{x+3}=3^{x+1}+25 \qquad (1)$$

$$|a-4|\cdot 2^x+a\cdot 4^x=4 \qquad (2)$$

Решение (1): Пусть $3^x=t>0 \Rightarrow$

$t+27t=3t+25 \Rightarrow 25t=25 \Rightarrow t=1 \Rightarrow x=0$

$\Rightarrow$ единственный корень.

(2): Пусть $x=0$ корень уравнения (2), тогда $|a-4|=4-a \Rightarrow$

$4-a\geq 0 \Rightarrow \underline{a\leq 4}$

Уравнение (2) имеет единствен. корень при условии

I $D=0$ II $D>0$ и $t_1\cdot t_2<0$

Пусть $2^x=t>0 \Rightarrow at^2+|a-4|t-4=0$

I $D=(a-4)^2+16a=(a+4)^2=0$ $\underline{a=-4}$

II $D>0$ $(a+4)^2>0 \Rightarrow \forall a,\ a\neq -4$

По теореме Виета $t_1\cdot t_2=-\frac{4}{a}<0$

$\Rightarrow \underline{a>0}$

Если $\underline{a=0} \Rightarrow 4t=4 \Rightarrow t=1 \Rightarrow x=0$

Итак ответ: $[0;4]\cup\{-4\}$

3.32

Для каждого значения параметра a решите неравенство

$$(x-a)\sqrt{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}\geq 0$$

Решение

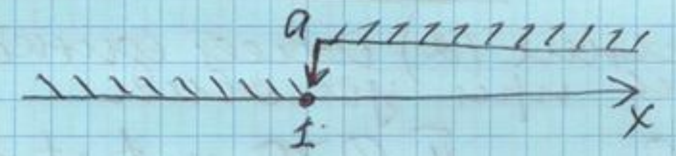
1) О.Д.З. $3\cdot 2^x-2\cdot 3^x\geq 0$ $/:6\cdot 3^x \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^x-\frac{1}{3}\geq 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x\geq \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{x\leq 1}$

2) Т.к. $\sqrt{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}\geq 0$, то

$x-a\geq 0 \Rightarrow \underline{x\geq a}$

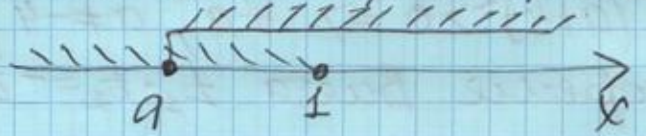
I



если $\underline{a\geq 1}$ корень $\underline{x=1}$

если $a<1$, то $x\in[a;1]$

II



Ответ: $a\geq 1$ $x=1$

$a<1$ $x\in[a;1]$

3.33

Для каждого значения a решите неравенство

$$(x-a)\sqrt{6\cdot 5^x-5\cdot 6^x}\leq 0$$

Решение

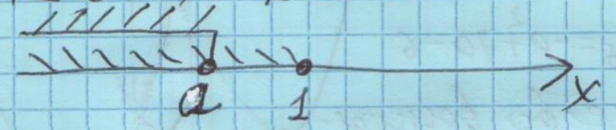
1) О.Д.З. $6\cdot 5^x-5\cdot 6^x\geq 0 \Rightarrow \frac{5^{x-1}}{6^{x-1}}\geq 1$

$\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\geq\left(\frac{5}{6}\right)^0 \Rightarrow x-1\leq 0 \Rightarrow \underline{x\leq 1}$

2) Т.к. $\sqrt{6\cdot 5^x-5\cdot 6^x}\geq 0$, то

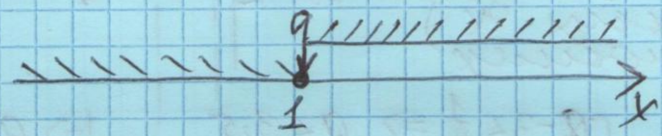
$x-a\leq 0 \Rightarrow x\leq a$

I



если $a<1$, то $x\in(-\infty;a]\cup\{1\}$

II



если $a\geq 1 \Rightarrow x\in(-\infty;1]$

Ответ: $a<1 \Rightarrow x\in(-\infty;a]\cup\{1\}$

$a\geq 1 \Rightarrow x\in(-\infty;1]$

3.34

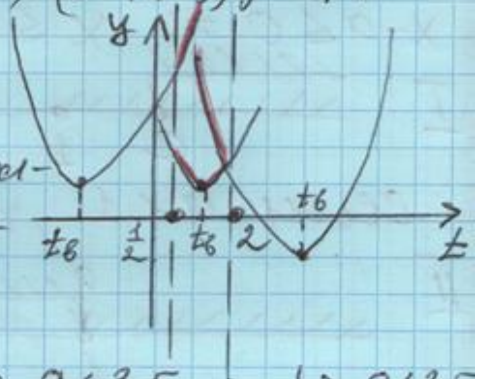
При каких значениях параметра a неравенство выполняется при всех действительных x?

$$4^{\cos x} - 2(a-3)\cdot 2^{\cos x} + a + 3 > 0$$

Решение. Пусть $2^{\cos x} = t > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos x = \log_2 t$. Т.к. $|\cos x| \le 1$, то
$-1 \le \log_2 t \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \le t \le 2$.

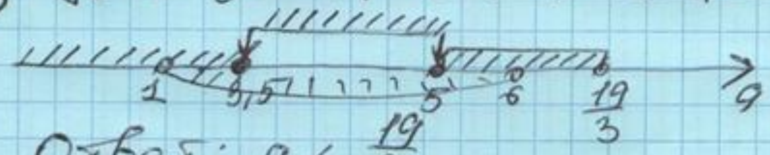
$t^2 - 2(a-3)t + a + 3 > 0 \Rightarrow (t-(a-3))^2 - a^2 +$
$+ 7a - 6 > 0$

$t_в = a-3$; $y_в = -a^2 + 7a - 6$



Неравенство выполняется при $\frac{1}{2} \le t \le 2$ (т.е. для всех действительных x) при условиях

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t_в < \frac{1}{2} \\ f(\frac{1}{2}) > 0 \end{cases} \begin{cases} a-3 < \frac{1}{2} \Rightarrow a < 3{,}5 \\ \frac{1}{4} - 2(a-3)\frac{1}{2} + a + 3 > 0 \Rightarrow \forall a \end{cases} \Rightarrow \underline{a < 3{,}5} \\ \begin{cases} t_в > 2 \\ f(2) > 0 \end{cases} \begin{cases} a-3 > 2 \Rightarrow \underline{a > 5} \\ 4 - 4(a-3) + a + 3 > 0 \Rightarrow \underline{a < \frac{19}{3}} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{2} \le t_в \le 2 \\ y_в > 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{1}{2} \le a-3 \le 2 \Rightarrow \underline{3{,}5 \le a \le 5} \\ -a^2 + 7a - 6 > 0 \Rightarrow \underline{1 < a < 6} \end{cases} \end{array}\right.$$



Ответ: $a < \frac{19}{3}$

3.35

При каких значениях параметра m неравенство выполняется при всех действительных x

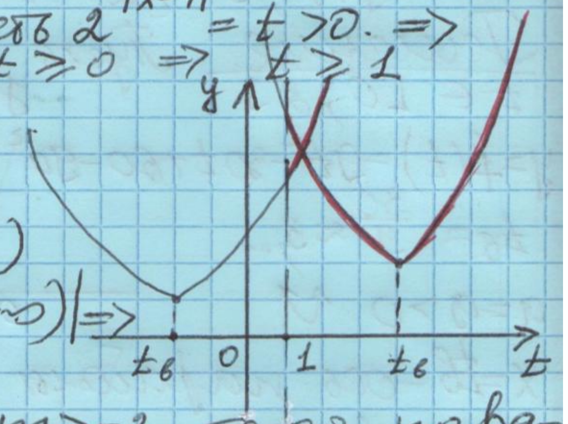
$$(m+2)\cdot 4^{|x-1|} - 2m\cdot 2^{|x-1|} + 3m + 1 > 0$$

Решение. Пусть $2^{|x-1|} = t > 0 \Rightarrow$

① $|x-1| = \log_2 t \ge 0 \Rightarrow t \ge 1$

② Пусть $y = f(x)$

$x \in (-\infty; +\infty)$
$|x-1| \in [0; +\infty)$
$t = 2^{|x-1|} \in [1; +\infty) \Rightarrow$
$t \ge 1$

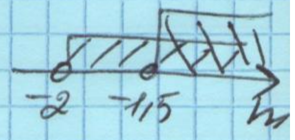


③ $m+2 > 0 \Rightarrow m > -2$, тогда парабола ветвями вверх. Если $m < -2$, то параболы ветви вниз и при некоторых значений t, значение функции будет отрицательное.

④ Неравенство выполняется при $t \ge 1$ (т.е. для всех действительных x) при условии

$$\begin{cases} t_в < 1 \\ f(1) > 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{m}{m+2} < 1 \\ m+2 - 2m + 3m + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{m+2} < 0 \Rightarrow m > -2 \\ 2m > -3 \Rightarrow m > -1{,}5 \end{cases}$$



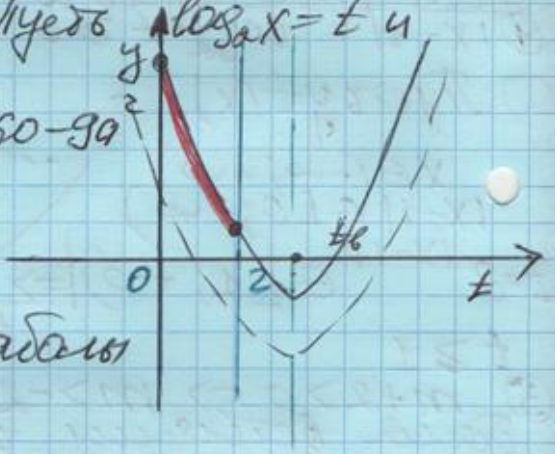
Ответ: $m > -1{,}5$

5.41

При каких значениях a наименьшее значение функции на отрезке $[1; 4]$ является положительным числом

$$f(x) = 9\log_2^2 x - 30\log_2 x + 60 - 9a^2$$

Решение. Пусть $\log_2 x = t$ и $t \in [0; 2]$



$y = f(t) = 9t^2 - 30t + 60 - 9a^2$

$t_в = \frac{30}{9} \approx 3,...$

$a = 9 > 0$

$x = t_в$ – ось параболы

$\min\limits_{t=2} f(t) > 0$

$f(2) = 36 - 60 + 60 - 9a^2 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 - 4 < 0 \quad (a-2)(a+2) < 0$

Ответ: $(-2; 2)$

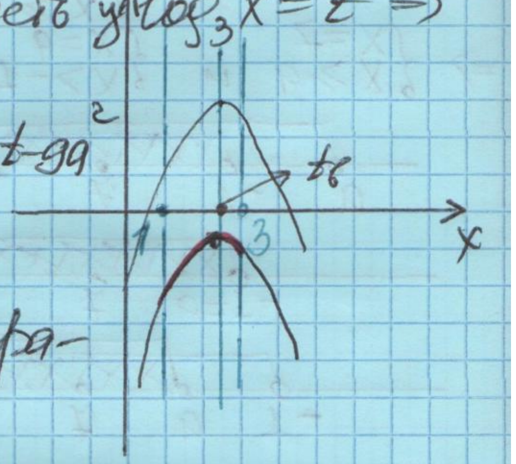
5.42

При каких значениях a наибольшее значение функции на отрезке $[3; 27]$ является отрицательным числом

$$f(x) = -4\log_3^2 x + 20\log_3 x - 9a^2$$

Решение. Пусть $\log_3 x = t \Rightarrow$

$\Rightarrow t \in [1; 3]$



$y = f(t) = -4t^2 + 20t - 9a^2$

$t_в = \frac{-20}{-8} = 2,5 = \frac{5}{2}$

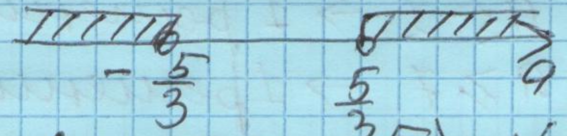
$x = t_в = 2,5$ – ось параболы

$a = -4 < 0$

$\max\limits_{t=t_в} f(t) < 0$

$f\left(\frac{5}{2}\right) = -4 \cdot \frac{25}{4} + 20 \cdot \frac{5}{2} - 9a^2 < 0$

$\Rightarrow 9a^2 - 25 > 0 \quad (3a-5)(3a+5) > 0$



Ответ: $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$

6.42

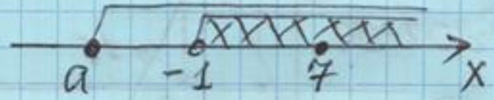
Сколько решений имеет уравнение в зависимости от a

$$\left(\log_2(x+1)-3\right)\sqrt{x-a}.$$

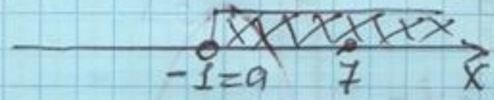
Решение

$$\begin{cases}\log_2(x+1)=3\\ x\geq a\end{cases} \text{ и } \begin{cases}x=a\\ x>-1\end{cases}$$

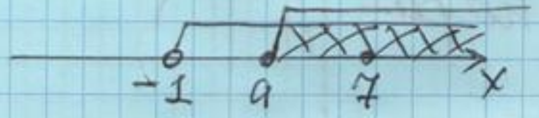
$$\Rightarrow \begin{cases}x=7\\ x\geq a\end{cases} \text{ и } \begin{cases}x=a\\ x>-1\end{cases} \qquad \text{О.Д.З.} \begin{cases}x\geq a\\ x>-1\end{cases}$$



$a<-1$ $x_1=7$



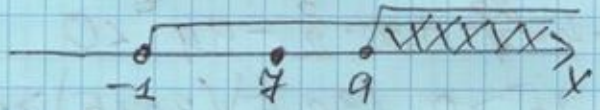
$a=-1$ $x_1=7$



$a>-1$ $x_1=a$

$a<7$ $x_2=7$

$a=7$ $x_1=7=a$



$a>7$ $x_1=a$

Ответ:

$a\leq-1 \to 1$ решение

$a\geq 7 \to 1$ решение

$-1<a<7 \to 2$ решения

6.43

Сколько решений имеет уравнение в зависимости от значений a

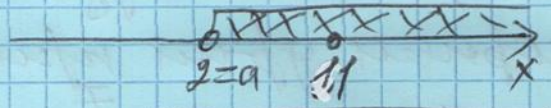
$$\left(\log_3(x-2)-2\right)\left(\sqrt{x-a}\right)=0$$

Решение

$$\begin{cases}\log_3(x-2)=2\\ x\geq a\end{cases} \text{ и } \begin{cases}x=a\\ x>2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=11\\ x\geq a\end{cases} \text{ и } \begin{cases}x=a\\ x>2\end{cases} \qquad \text{О.Д.З} \begin{cases}x\geq a\\ x>2\end{cases}$$

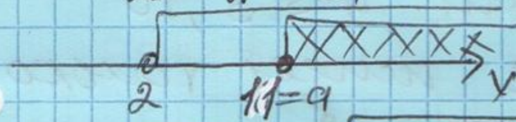
$a<2$ $x_1=11$



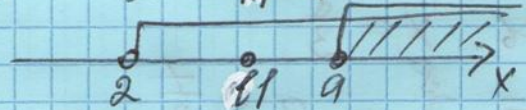
$a=2$ $x_1=11$

$a>2$ $x_1=a$

$a<11$ $x_2=11$



$a=11$ $x_1=11=a$



$a>11$ $x_1=a$

Ответ: $a\leq 2 \to$ 1 решение

$a\geq 11 \to$ 1 решение

$2<a<11 \to$ 2 решения

6. 44

При каких значениях a уравнение имеет единственный корень?

$$(x-a)\cdot\log_2(3x-7)=0.$$

Решение

1) $\log_2(3x-7)=0 \Rightarrow 3x-7=1 \quad x=\frac{8}{3}$

2) $x-a=0 \quad x=a$

Если $a=\frac{8}{3}$ то $x=\frac{8}{3}$ единственный корень уравнения

Если $a\neq\frac{8}{3}$, то. $x=a$ будет вторым корнем ур-ия при условии $3x-7>0 \Rightarrow x>\frac{7}{3}$.

Поэтому если $a\leq\frac{7}{3}$, то уравнение имеет только один корень $x=\frac{8}{3}$.

Ответ: $a=\frac{8}{3}$ и $a\leq\frac{7}{3}$

6.44

При каких значениях a уравнение имеет единственный корень?

$$(x-a)\cdot\log_2(3x-7)=0.$$

Решение

1) $\log_2(3x-7)=0 \Rightarrow 3x-7=1 \quad x=\frac{8}{3}$

2) $x-a=0 \qquad x=a$

Если $a=\frac{8}{3}$ то $x=\frac{8}{3}$ единственный корень уравнения

Если $a\neq\frac{8}{3}$, то. $x=a$ будет вторым корнем ур-ия при условии $3x-7>0 \Rightarrow x>\frac{7}{3}$.

Поэтому если $a\le\frac{7}{3}$, то уравнение имеет только один корень $x=\frac{8}{3}$.

Ответ: $a=\frac{8}{3}$ и $a\le\frac{7}{3}$

6.45

При каких значениях параметра a уравнение имеет единственный корень

$$(x+a)\log_3(2x-5)=0$$

Решение

I $\begin{cases}x+a=0\\2x-5>0\end{cases}$ $\begin{cases}x=-a\\x>2,5\end{cases}$ $(a<-2,5)$

II $\log_3(2x-5)=0 \Rightarrow x=3$

1) Если $a=-3$, то уравнение имеет единственный корень

2) Если $a\neq-3$ и $a\geq-2,5$, то один из корней $x=-a$ не удовлетворяет условию $x>2,5$

Поэтому при $a\geq-2,5$ уравнение имеет только один корень $x=3$

Ответ: $a=-3$ и $a\geq-2,5$

7.29

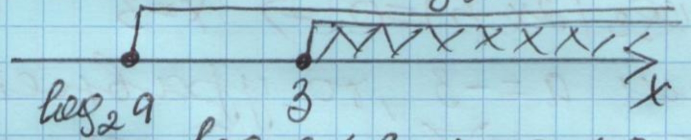
Для каждого значения a решите неравенство

$$(2^x-a)\sqrt{x-3}\geq 0$$

Решение О.Д.З. $x\geq 3$, т.е. $x\in[3;+\infty)$

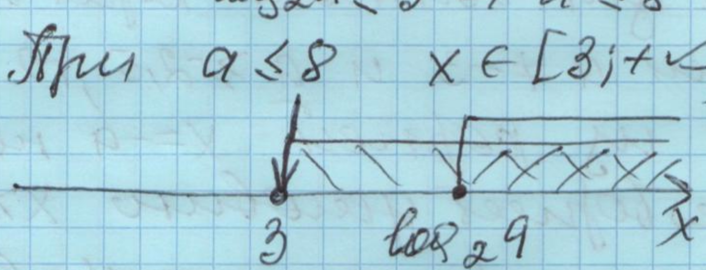
Т.к. $\sqrt{x-3}\geq 0$, то $2^x-a\geq 0 \Rightarrow$

$2^x\geq a \Rightarrow x\geq \log_2 a$



$\log_2 a\leq 3 \Rightarrow a\leq 8$

При $a\leq 8$ $x\in[3;+\infty)$



$\log_2 a>3 \Rightarrow a>8$

При $a>8$ $x\in[\log_2 a;+\infty)$ и $\{3\}$

Ответ: $a\leq 8$ $x\in[3;+\infty)$

$a>8$ $x\in[\log_2 a;+\infty)$

$x=3.$

7.30

Для каждого значения параметра a решите неравенство

$$(3^x-a)\sqrt{x-2}\leq 0$$

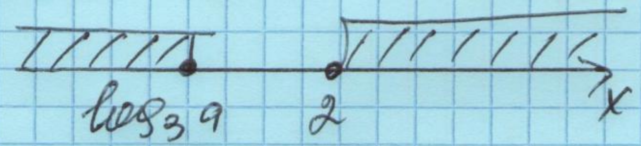
Решение О.Д.З. $x-2\geq 0$

$x\geq 2$

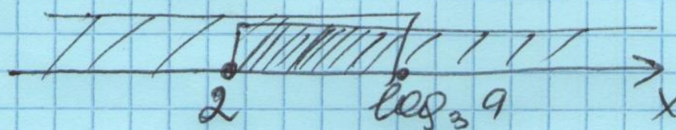
$x\in[2;+\infty)$

Т.к. $\sqrt{x-2}\geq 0$, то

$3^x-a\leq 0 \Rightarrow x\leq \log_3 a$



При $\log_3 a\leq 2 \Rightarrow a\leq 9$ $x=2$



$\log_3 a>2 \Rightarrow a>9$

При $a>9$ $x\in[2;\log_3 a]$

Ответ: $a\leq 9$ $x=2$

$a>9$ $x\in[2;\log_3 a]$