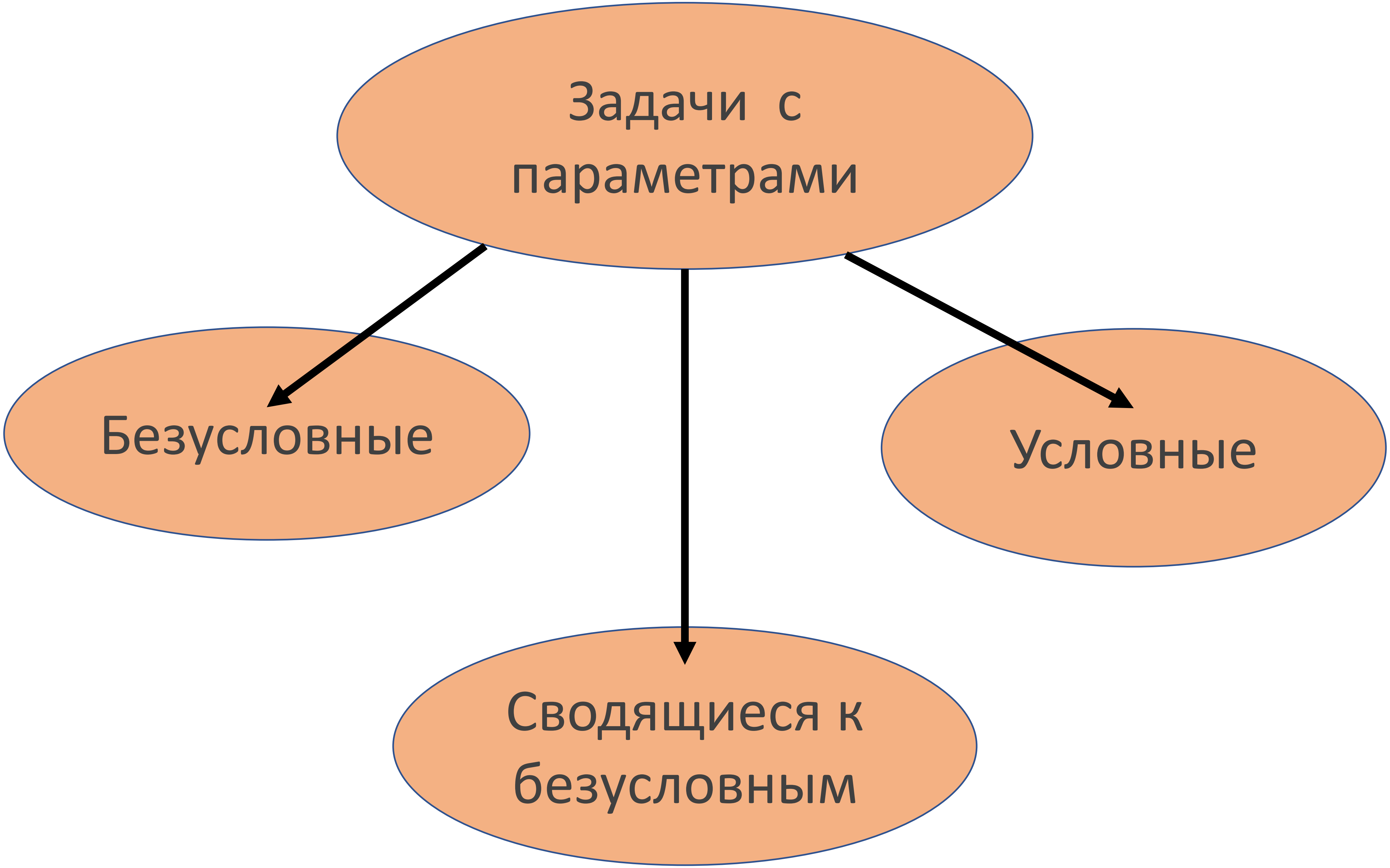

Задачи с параметрами
Безусловные
Условные
Сводящиеся к безусловным

Примеры безусловных задач с параметрами

1) Для каждого значения p решить уравнение $(p^2+6)x = 5px + p - 3$

2) Для каждого значения параметра b найти множество реш. нер-ва $4xb^2 - (17x+4)b + 4x + 1 \geq 0$

3) При всех m решить урав-е $\frac{mx}{3m-x} = 2$

4) При всех a решить ур-е. $2|x| + |a| = x + 3$

5) При всех x найти все a удовлетворяющие неравенству $|x-a| < x$

6) Для каждого c решить неравенство $\log_c (x+c) \leq 2$.

① Для каждого p решить уравнение

$$(p^2+6)x = 5px + p - 3$$

Решение:

1. Вопрос: как его решать если бы не было параметра? Ответ: как линейное ур-е.

2. Преобразуем его: $(p^2-5p+6)x = p-3$

$$(p-3)(p-2)x = p-3$$

а) если $p=2$, то $0\cdot x = -1 \Rightarrow$ нет решений

б) если $p=3$, то $0\cdot x = 0 \Rightarrow x$ – любое значение

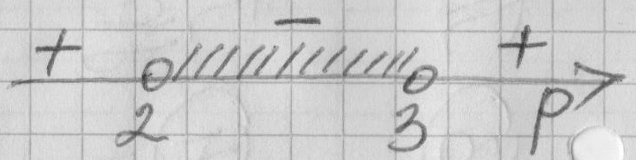
в) если $p\neq 3$ и $p\neq 2$, то $x = \frac{p-3}{(p-3)(p-2)} = \frac{1}{p-2}$

Ответ: если $p=2$, то $x\in\varnothing$; если $p=3$, то $x\in R$

если $p\neq 2$, $p\neq 3$, то $x = \frac{1}{p-2}$

3. Дополнительный вопрос: для каких p есть хотя бы 1 решение больше или равно 1?

$$\begin{cases} p\neq 2 \\ p\neq 3 \\ \frac{1}{p-2} \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p\neq 2 \\ p\neq 3 \\ \frac{p-3}{p-2} \leq 0 \end{cases}$$



$p\in(2;3)$

Примеры условных задач с параметрами, сводящиеся к безусловным

① Для каждого значения параметра a найти число корней уравнения

$$7(2x-1)a^2-(23x-22)a+3(x-1)=0$$

② При всех допустимых a решить урав-е и определить знаки корней

$$4ax=\sqrt{a-2}+\sqrt{a}+12x$$

③ При каких значениях a все корни уравнения удовлетворяют $|x|<1$?

$$3ax^2+(3a^3-12a^2-1)x-a(a-4)=0.$$

Условные задачи с параметрами

Общие методы и техники решения задач (не только с параметрами)

- Расщепление большой задачи на несколько простых задач
- Замена переменных
- Переформулировка задачи
- Метод рационализации
- Обобщенный метод интервалов

№18 $\sqrt{37x^2-12ax+9}=2x^2-2ax+3$

a? ровно 3 корня.

$\sqrt{f}=g \Rightarrow \begin{cases} f=g^2 \\ g\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 37x^2-12ax+9=(2x^2-2ax+3)^2 \\ 2x^2-2ax+3\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^4-8ax^3+4a^2x^2-25x^2= \\ 2x^2-2ax+3\geq 0 \end{cases}$

$x^2(4x^2-8ax+4a^2-25)=0 \Rightarrow x=0.$

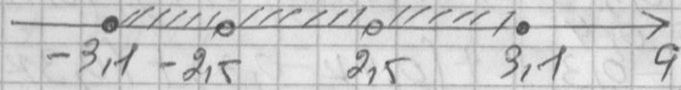
$4(x^2-2ax+a^2)-25=0$

$4(x-a)^2-25=0 \qquad (x-a)^2=\frac{25}{4} \qquad x-a=\pm\frac{5}{2}$

$x=a+2,5 \qquad x=a-2,5$

Корни $x_1=0 \quad x_2=a+2,5 \quad x_3=a-2,5$

$\begin{cases} a+2,5\neq 0 \\ a-2,5\neq 0 \\ a+2,5\neq a-2,5 \\ 2(a+2,5)^2-2a(a+2,5)+3\geq 0 \\ 2(a-2,5)^2-2a(a-2,5)+3\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a\neq -2,5 \\ a\neq 2,5 \\ \\ a\geq -3,1 \\ a\leq 3,1. \end{array}$



Ответ: $[-3,1;-2,5)\cup(-2,5;2,5)\cup(2,5;3,1]$

№18 $\sqrt{4x^4-9x^2+a^2}=2x^2-3x+a$. a? "3"

$\sqrt{f}=g \Rightarrow \begin{cases} f=g^2 \\ g\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x^4-9x^2+a^2=(2x^2-3x+a)^2 \\ 2x^2-3x+a\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\cancel{4x^4}-9x^2+\cancel{a^2}=\cancel{4x^4}+9x^2+\cancel{a^2}-12x^3+4x^2a-6xa$

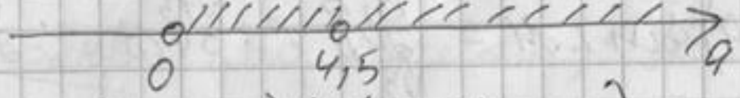
$18x^2-12x^3+4x^2a-6xa=0$

$-2x(-9x+6x^2-2ax+3a)=0 \qquad x=0\,!$

$6x^2-x(2a+9)+3a=0 \qquad D=(2a+9)^2-4\cdot 6\cdot 3a=$

$=(2a-9)^2 \qquad x_1=\frac{a}{3} \qquad x_2=1,5=\frac{3}{2}$

$\begin{cases} \frac{a}{3}\neq 0 \\ \frac{a}{3}\neq\frac{3}{2} \\ 2\cdot\left(\frac{a}{3}\right)^2-3\cdot\left(\frac{a}{3}\right)+a\geq 0 \\ 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot\frac{3}{2}+a\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a\neq 0,\quad a\neq\frac{9}{2}=4,5 \\ a^2\geq 0 \Rightarrow \forall a \\ a\geq 0 \end{array}$



Ответ: $(0;4,5)\cup(4,5;+\infty)$

№18 $a-?$ $\dfrac{a-(a^2-2a)\cos 2x+2}{3-\cos 4x+a^2}<1$

содержит отрезок $\left[-2\pi; -\frac{7\pi}{6}\right]$

$3-\cos 4x+a^2>0 \Rightarrow$

$a-(a^2-2a)\cos 2x+2 < 3-\cos 4x+a^2$

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 \qquad \cos 2x = t \qquad |t| \le 1$

$a-(a^2-2a)t+2<3-(2t^2-1)+a^2 \Rightarrow$

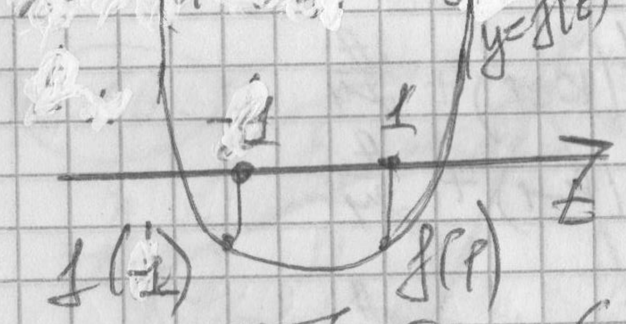
$2t^2-(a^2-2a)t-a^2+a-2<0$

$f(t)=2t^2-(a^2-2a)t-a^2+a-2$

$-2\pi \le x \le -7\pi/6 \quad |\cdot 2$

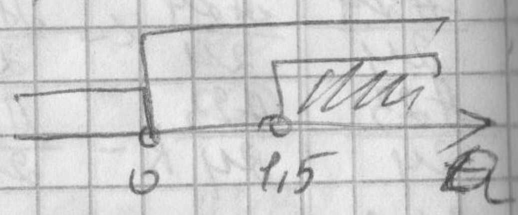
$-4\pi \le 2x \le -\frac{7\pi}{3}$

$-1 \le t \le 1$



$\begin{cases} f(-1)<0 \\ f(1)<0 \end{cases}$

$\begin{cases} a>0 \\ a(2a-3)>0 \end{cases} \Rightarrow$



Ответ: $(1{,}5; +\infty)$

№18 a? $\begin{cases} x^2-8x+y^2+4y+15=4|2x-y-10| \\ x+2y=a \end{cases}$ имеет более двух реш.

I $|2x-y-10| = 2x-y-10$, $2x-y-10>0$ $\quad y < 2x-10$

$\begin{cases} x^2-8x+y^2+4y+15=8x-4y-40 \\ x+2y=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-16x+y^2+8y+55=0 \\ x+2y=a \end{cases}$

$\begin{cases} (x-8)^2+(y+4)^2=25 \\ x+2y=a \end{cases} \Rightarrow \quad y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a$

II $|2x-y-10| = -2x+y+10$ $\quad y > 2x-10$

$\begin{cases} x^2-8x+y^2+4y+15=-8x+4y+40 \\ x+2y=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x+2y=a \end{cases} \Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a$

а) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a$ $\quad A(5;0) \Rightarrow$
$\Rightarrow a=5;$ $B(3;-4) \Rightarrow a=-5$

б) $\begin{cases} x^2-16x+y^2+8y+55=0 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a \end{cases}$

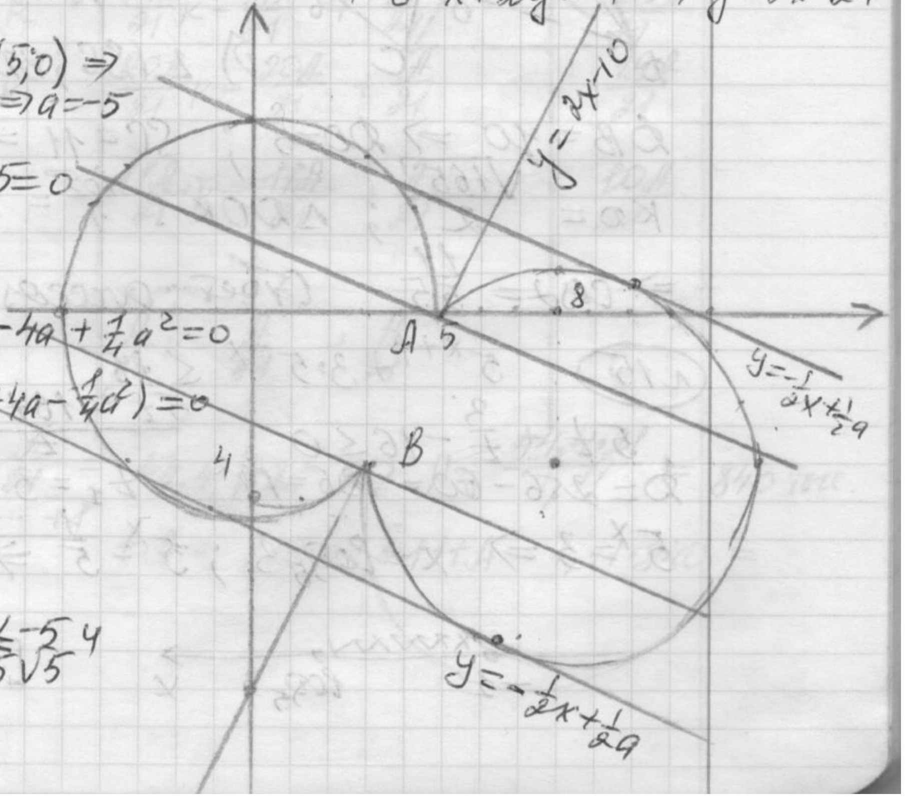
$\frac{5x^2}{4}+x\left(\frac{1}{2}a-20\right)+55-4a+\frac{1}{4}a^2=0$

$D=\left(\frac{1}{2}a-20\right)^2-5\left(55-4a-\frac{1}{4}a^2\right)=0$

$-a^2+125=0$

$a=\pm 5\sqrt{5}$

Ответ: $-5\sqrt{5}<a\le -5$
$5\le a<5\sqrt{5}$



№18 a — ?

$$\begin{cases} y^2-x-2=|x^2-x-2| \\ x-y=a \end{cases}$$

$|x^2-x-2| = x^2-x-2$, $x^2-x-2 \geq 0$

$= -(x^2-x-2)$, $x^2-x-2<0$

более 2х точек (общих)

I $|x^2-x-2| = x^2-x-2$; $x^2-x-2\geq 0$

$y^2-\cancel{x}-\cancel{2}-x^2+\cancel{x}+\cancel{2}=0$

$$\begin{cases} y^2=x^2 \\ y=x-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x \text{ и } y=-x \\ y=x,\ a=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$a=0$ бесконечно много точек

II $|x^2-x-2| = -(x^2-x-2)$

$y^2-x-2+x^2-x-2=0$

$y^2+x^2-2x+1-5=0 \Rightarrow y^2+(x-1)^2=5$

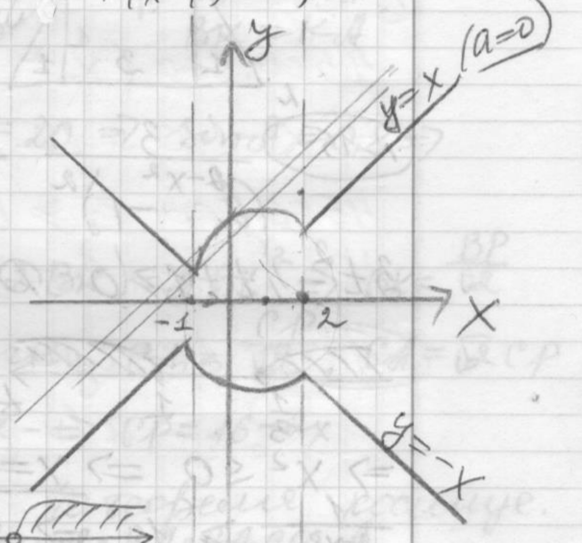
$$\begin{cases} y^2+(x-1)^2=(\sqrt{5})^2 \\ y=x-a \end{cases}$$

$(x-a)^2+(x-1)^2=5$

$2x^2-x(2a+2)+a^2-4=0$

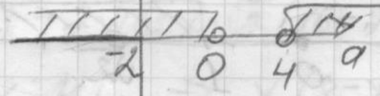
$D=-4a^2+8a+36>0$

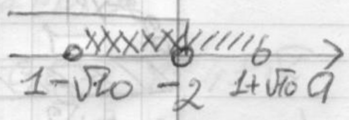
$a^2-2a-9<0$



$x_1>-1$ $x_2<2$

$$\begin{cases} \dfrac{2a+2-\sqrt{10}}{4}>-1 \Rightarrow \\ \dfrac{2a+2+\sqrt{10}}{4}<2 \Rightarrow \end{cases}$$





Ответ: $1-\sqrt{10}<a<-2$ и $a=0$

18 Найти все a, ровно 1 корень $x \in [0;2]$ ур-ия $\ln(3x-1)\cdot\sqrt{x^2-4x+4a-a^2}=0$

Решение

$$\ln(3x-1)\cdot\sqrt{x^2-4x+4a-a^2}=0$$

$$x^2-4x+4a-a^2=0 \quad | \pm 4$$

$$\underbrace{x^2-4x+4}+\underbrace{4a-a^2-4}=0$$

$$(x-2)^2-(a-2)^2=0 \qquad (x-2-a+2)(x-2+a-2)=0$$

$$(x-a)(x+a-4)=0$$

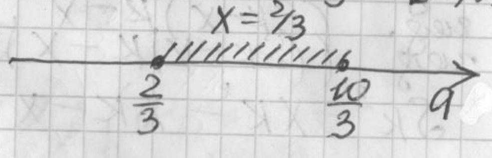
$$\ln(3x-1)\cdot\sqrt{(x-a)(x+a-4)}=0$$

$$\mathrm{I}\begin{cases}\ln(3x-1)=0\\(x-a)(x+a-4)\geq 0\end{cases} \qquad \mathrm{II}\begin{cases}(x-a)(x+a-4)=0\\3x-1>0\end{cases}$$

I $\ln(3x-1)=0 \quad 3x-1=1 \Rightarrow x=\frac{2}{3}\in[0;2]$

$x_1=a \quad x_2=4-a$

$x=\frac{2}{3},\ a_1=\frac{2}{3} \quad a_2=\frac{10}{3}$



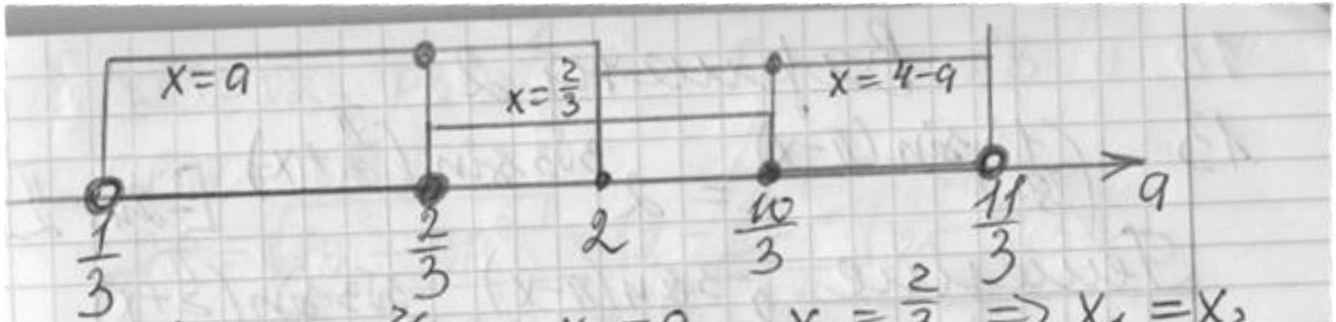
$$\left(\frac{2}{3}-a\right)\left(\frac{2}{3}+a-4\right)\geq 0 \qquad \left(a-\frac{2}{3}\right)\left(a-\frac{10}{3}\right)\leq 0$$

II $(x-a)(x+a-4)=0 \Rightarrow x_1=a \quad x_2=4-a$

$3x-1>0 \quad x>\frac{1}{3}$ | $x\in[0;2]$

$x_1=a \Rightarrow a>\frac{1}{3}$ | $\Rightarrow x=a \quad \frac{1}{3}<a\leq 2$

$x_2=4-a \Rightarrow a<\frac{11}{3}$ | $\Rightarrow x=4-a \quad 2\leq a<\frac{11}{3}$



при $a=\frac{2}{3}$ $\quad x_1=a \quad x_2=\frac{2}{3} \Rightarrow x_1=x_2$

при $a=\frac{10}{3}$ $\quad x_1=\frac{2}{3} \quad x_2=4-a \Rightarrow x_1=x_2$

$x_2=4-\frac{10}{3}=\frac{2}{3}$

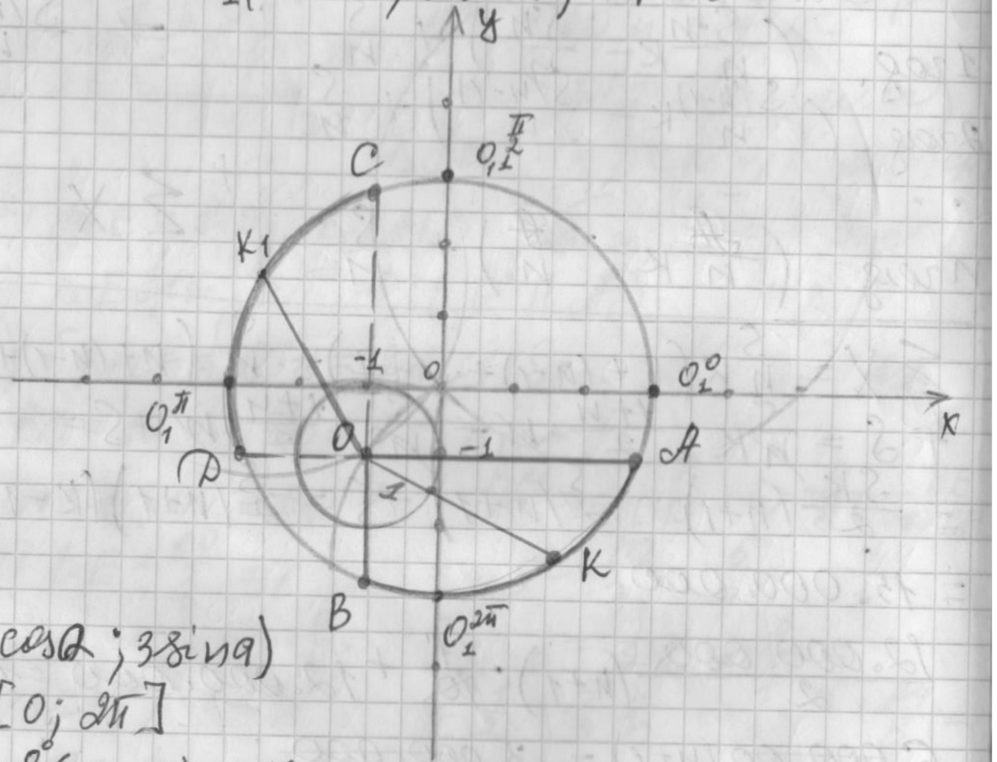
Ответ: $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]\ \left[\frac{10}{3};\frac{11}{3}\right)$

18 a? $a \in [0; 2\pi]$ хотя бы 1 решение

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2=1 & (1) \\ (x-3\cos a)^2+(y-3\sin a)^2=9 & (2) \end{cases}$$

(1) − окр-ть $O(-1;-1)$ $R=1$

(2) − окр-ть $O_1(3\cos a; 3\sin a)$ $R=3$



$O_1(3\cos a; 3\sin a)$

$a \in [0; 2\pi]$

$a=0$	$O_1^0(3;0)$
$a=\frac{\pi}{2}$	$O_1^{\frac{\pi}{2}}(0;3)$
$a=\pi$	$O_1^{\pi}(-3;0)$
$a=2\pi$	$O_1^{2\pi}(0;-3)$

Центр O_1 окр-ти (2) лежит на окружности $R=3$ $O(0;0)$

$OA = 1+3 = 4 - d(O;O_1)$

$OD = 3-1 = 2 - d(O;O_1)$

OK_1, OK − расстояние между O и O_1

$2 \le OK \le 4$ и $2 \le OK_1 \le 4$ или $|()^2$

$4 \le OK^2 \le 16$ и $4 \le OK_1^2 \le 16$

$OK = d(O;O_1) = \sqrt{(3\cos a+1)^2+(3\sin a+1)^2}$

$4 \le (3\cos a+1)^2+(3\sin a+1)^2 \le 16$

$4 \le 9\cos^2 a + 6\cos a + 1 + 9\sin^2 a + 6\sin a + 1 \le 16$

$4 \le 6\cos a + 6\sin a + 11 \le 16$

$-7 \le 6\cos a + 6\sin a \le 5 \quad |:6$

$-\frac{7}{6} \le \cos a + \sin a \le \frac{5}{6} \quad |\cdot \frac{\sqrt2}{2}$

$-\frac{7\sqrt2}{12} \le \underbrace{\frac{\sqrt2}{2}}_{\cos\frac{\pi}{4}}\cos\theta + \sin\theta \cdot \underbrace{\frac{\sqrt2}{2}}_{\sin\frac{\pi}{4}} \le \frac{5\sqrt2}{12}$

$-\frac{7\sqrt2}{12} \le \cos(a-\frac{\pi}{4}) \le \frac{5\sqrt2}{12} \quad |\arccos$

$\arccos(-\frac{7\sqrt2}{12}) \le \arccos(\cos(a-\frac{\pi}{4})) \le \arccos\frac{5\sqrt2}{12}$

$\pi - \arccos\frac{7\sqrt2}{12} \geqslant a - \frac{\pi}{4} \geqslant \arccos\frac{5\sqrt2}{12}$ $\smile AB$

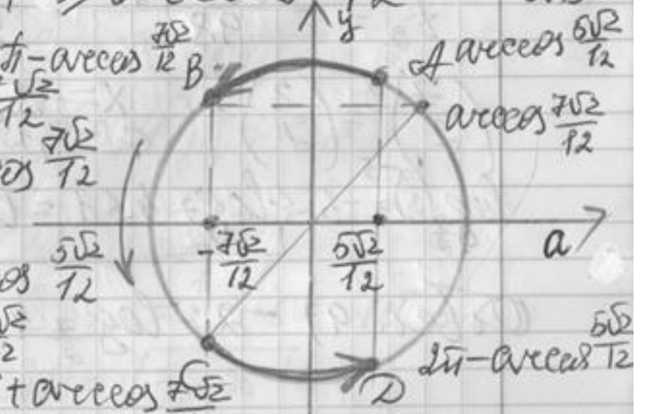
$\arccos\frac{5\sqrt2}{2} \le a - \frac{\pi}{4} \le \pi - \arccos\frac{7\sqrt2}{12}$

$\frac{\pi}{4} + \arccos\frac{5\sqrt2}{2} \le a \le \frac{5\pi}{4} - \arccos\frac{7\sqrt2}{12}$

$\smile CD$

$\pi + \arccos\frac{7\sqrt2}{12} \le a - \frac{\pi}{4} \le 2\pi - \arccos\frac{5\sqrt2}{12}$

$\frac{5\pi}{4} + \arccos\frac{7\sqrt2}{12} \le a \le \frac{9\pi}{4} - \arccos\frac{5\sqrt2}{12}$



OK_1, OK – расстояние между O и O_1

$2 \le OK \le 4$ и $2 \le OK_1 \le 4$. или $|(\,)^2$

$4 \le OK^2 \le 16$ и $4 \le OK_1^2 \le 16$

$OK = d(O;O_1) = \sqrt{(3\cos a+1)^2 + (3\sin a+1)^2}$

$4 \le (3\cos a+1)^2 + (3\sin a+1)^2 \le 16$

$4 \le 9\cos^2 a + 6\cos a + 1 + 9\sin^2 a + 6\sin a + 1 \le 16$

$4 \le 6\cos a + 6\sin a + 11 \le 16$

$-7 \le 6\cos a + 6\sin a \le 5 \quad |:6$

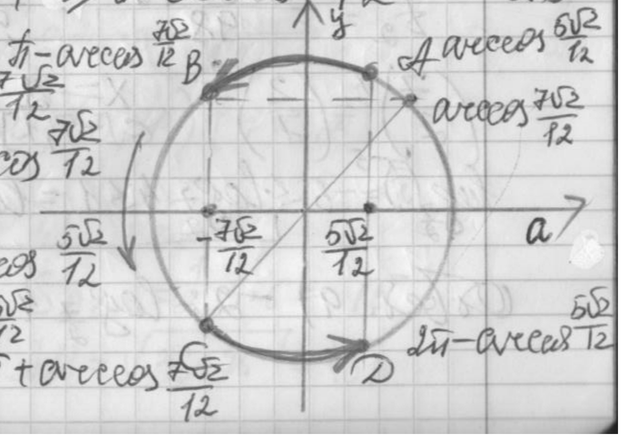
$-\frac{7}{6} \le \cos a + \sin a \le \frac{5}{6} \quad |\cdot \frac{\sqrt2}{2}$

$-\frac{7\sqrt2}{12} \le \underbrace{\frac{\sqrt2}{2}}_{\cos\frac{\pi}{4}}\cos\theta + \sin\theta\cdot\underbrace{\frac{\sqrt2}{2}}_{\sin\frac{\pi}{4}} \le \frac{5\sqrt2}{12}$

$-\frac{7\sqrt2}{12} \le \cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right) \le \frac{5\sqrt2}{12} \quad |\arccos$

$\arccos\left(-\frac{7\sqrt2}{12}\right) \le \arccos\left(\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)\right) \le \arccos\frac{5\sqrt2}{12}$

$\pi - \arccos\frac{7\sqrt2}{12} \geqslant a - \frac{\pi}{4} \geqslant \arccos\frac{5\sqrt2}{12}$ $\cup$ AB



$\arccos\frac{5\sqrt2}{2} \le a - \frac{\pi}{4} \le \pi - \arccos\frac{7\sqrt2}{12}$

$\frac{\pi}{4} + \arccos\frac{5\sqrt2}{2} \le a \le \frac{5\pi}{4} - \arccos\frac{7\sqrt2}{12}$

$\cup$ CD

$\pi + \arccos\frac{7\sqrt2}{12} \le a - \frac{\pi}{4} \le 2\pi - \arccos\frac{5\sqrt2}{12}$

$\frac{5\pi}{4} + \arccos\frac{7\sqrt2}{12} \le a \le \frac{9\pi}{4} - \arccos\frac{5\sqrt2}{12}$

Ответ $\frac{\pi}{4} + \arccos\frac{5\sqrt2}{12} \le a \le \frac{5\pi}{4} - \arccos\frac{7\sqrt2}{12}$

$\frac{5\pi}{4} + \arccos\frac{7\sqrt2}{12} \le a \le \frac{9\pi}{4} - \arccos\frac{5\sqrt2}{12}$

18 $a \in [0; \frac{3\pi}{2})$ хотя бы одно решение

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-5)^2=25 & (1) \\ (x-\cos a)^2+(y-\sin a)^2=1 & (2) \end{cases}$$

(1) − ок-ть $O(2;5)$ $R=5$

(2) − ок-ть $O_1(\cos a; \sin a)$ $R=1$

$a=0$ $O_1^0(1;0)$

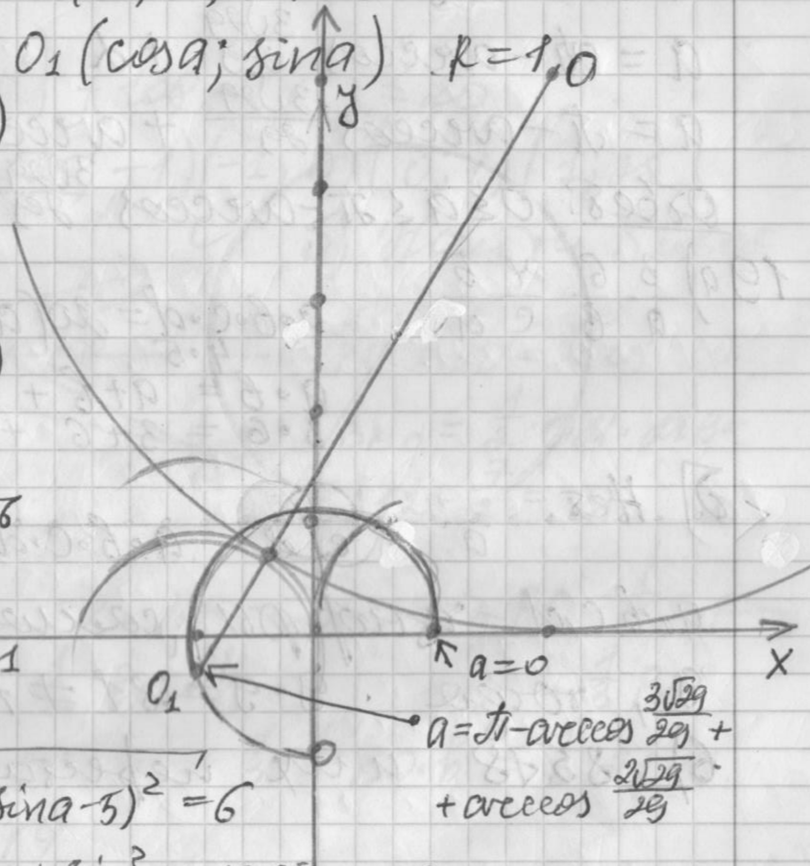
$a=\frac{\pi}{2}$ $O_1^{\frac{\pi}{2}}(0;1)$

$a=\pi$ $O_1^{\pi}(-1;0)$

$a\neq\frac{3\pi}{2}$ $O_1^{\frac{3\pi}{2}}(0;-1)$

$OO_1=6=d.$

зеленая ок-ть содержит центры окр-ти (2) радиуса $R=1$



$d=\sqrt{(\cos a-2)^2+(\sin a-5)^2}=6$

$\cos^2 a-4\cos a+4+\sin^2 a-10\sin a+25=36$

$-4\cos a-10\sin a=6 \quad |:-2$

$2\cos a+5\sin a=-3 \quad |: \sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$

$\frac{2}{\sqrt{29}}\cos a+\frac{5}{\sqrt{29}}\sin a=-\frac{3}{\sqrt{29}}$

Пусть $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{29}}$ и $\sin\alpha=\frac{5}{\sqrt{29}}$

$\cos\alpha\cdot\cos a+\sin\alpha\sin a=-\frac{3}{\sqrt{29}}$

$\cos(a-\alpha)=-\frac{3}{\sqrt{29}} \quad |\arccos$

$a-\alpha=\pi-\arccos\frac{3\sqrt{29}}{29}$

$a=\pi-\arccos\frac{3\sqrt{29}}{29}+\alpha$

$a=\pi-\arccos\frac{3\sqrt{29}}{29}+\arccos\frac{2\sqrt{29}}{29}$

Ответ: $0\leq a\leq\pi-\arccos\frac{3\sqrt{29}}{29}+\arccos\frac{2\sqrt{29}}{29}$

18 $a-?$ $a \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$ хотя бы 1 реш

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-4)^2=16 & (1) \\ (x-\cos a)^2+(y-\sin a)^2=1 & (2) \end{cases}$$

Решение

(1) – окружность $O(3;4)$ $R=4$.

(2) – окружность $O_1(\cos a, \sin a)$ $R=1$

$a=-\frac{\pi}{2}$ $O_1(0;-1)$ $a=\frac{3\pi}{2}$ $O_1(0;-1)$

$a=0$ $O_1(1;0)$

$a=\frac{\pi}{2}$ $O_1(0;1)$

$a=\pi$ $O_1(-1;0)$

$d=OO_1=\sqrt{(\cos a-3)^2+(\sin a-4)^2}$

$d=5$

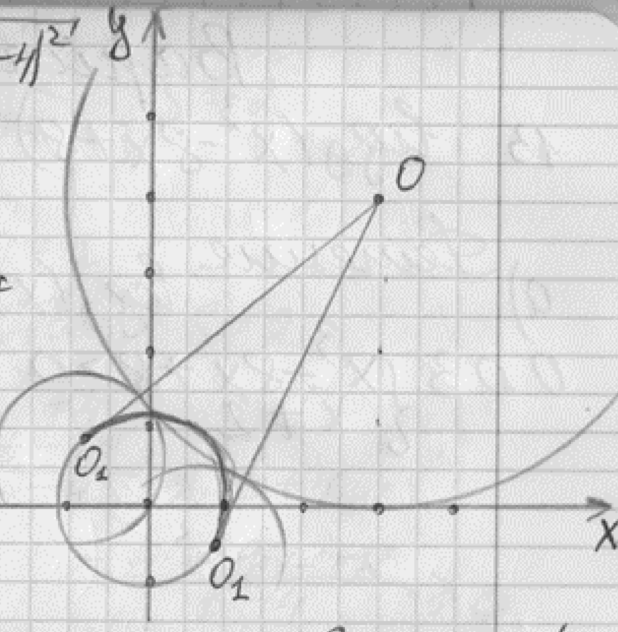
$(\cos a-3)^2+(\sin a-4)^2=25$

$\cos^2 a-6\cos a+9+\sin^2 a-8\sin a+$

$+16=25$

$6\cos a+8\sin a=1 \quad |:\sqrt{6^2+8^2}$

$\frac{6}{10}\cos a+\frac{8}{10}\sin a=\frac{1}{10}$



$\frac{3}{5}\cos a+\frac{4}{5}\sin a=\frac{1}{10}$ Пусть $\cos\alpha=\frac{3}{5}$; $\sin\alpha=\frac{4}{5}$

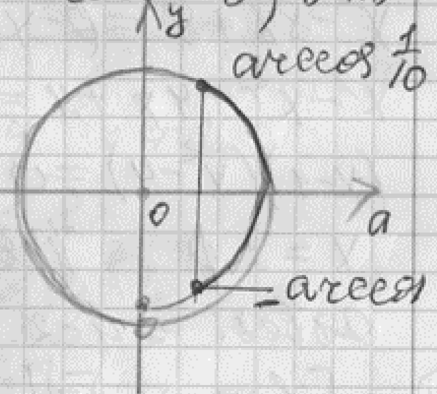
$\cos(a-\alpha)=\frac{1}{10}$.

$-\arccos\frac{1}{10}\le a-\alpha\le \arccos\frac{1}{10}$

$-\arccos\frac{1}{10}+\alpha\le a\le \arccos\frac{1}{10}+\alpha$

$\arccos\frac{3}{5}-\arccos\frac{1}{10}\le a\le$

$\arccos\frac{3}{5}+\arccos\frac{1}{10}$



Ответ $\arccos\frac{3}{5}-\arccos\frac{1}{10}\le a\le \arccos\frac{3}{5}+\arccos\frac{1}{10}$

18 $a-?$ $|3x^2-4x-7|=a-2x^2-7x$

либо нет решений либо 1 решение

Решение $y=|3x^2-4x-7|$ $y=a-2x^2-7x$

1) $3x^2-4x-7=0$

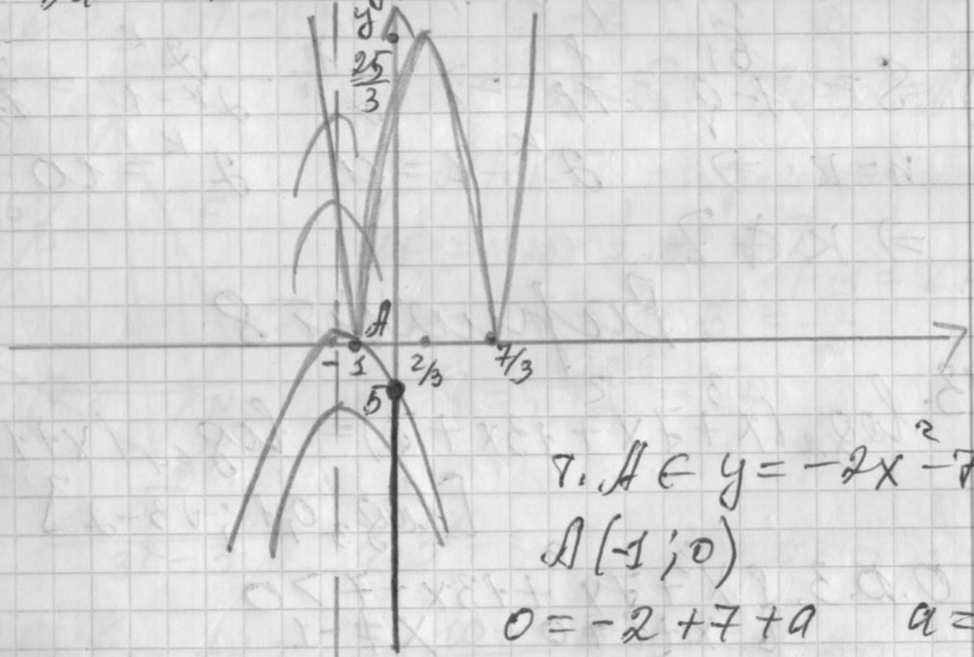
$D=10^2$ $x_1=\frac{4+10}{6}=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$

$x_2=\frac{4-10}{6}=-1$

$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ $y_0=-\frac{25}{3}\approx-8\frac{1}{3}$

2) $y=-2x^2-7x+a$ $D=49+8a$ $\}>\{=\}<0$

$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{7}{-4}\approx-1\frac{3}{4}$ $y_0=a+\frac{49}{8}$



т. $A\in y=-2x^2-7x+a$

$A(-1;0)$

$0=-2+7+a$ $a=-5$

Ответ: $(-\infty;-5]$

(18) $\sqrt{x-3a}\cdot \ln(x+a)=(x-2)\ln(x+a)$

ровно 1 корень на $[0;2]$

Решение $\underbrace{\sqrt{x-3a}}_{y}\cdot\underbrace{\ln(x+a)}_{z}=\underbrace{(x-2)}_{t}\underbrace{\ln(x+a)}_{z}$

$yz=t\cdot z$

I $\begin{cases} z=0 \\ x-3a\geq 0 \end{cases}$ $\ln(x+a)=0 \Rightarrow x+a=1 \quad x=1-a$

$\Rightarrow 1-a-3a\geq 0 \Rightarrow \underline{a\leq \frac{1}{4}}$

$x\in[0;2] \quad 0\leq 1-a\leq 2 \Rightarrow -1\leq a\leq 1$

$\begin{cases} a\leq \frac{1}{4} \\ -1\leq a\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{-1\leq a\leq \frac{1}{4}}$

II $\begin{cases} y=t \\ x+a>0 \end{cases}$ $\Rightarrow \sqrt{x-3a}=x-2 \quad x\in[0;2] \Rightarrow \underline{x=2}$

$x>-a$ $\quad \sqrt{2-3a}=0 \Rightarrow a=\frac{2}{3}$

Ответ: $a=\frac{2}{3}$; $-1\leq a\leq \frac{1}{4}$

№20 k – ? хотя бы 1 решение $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

$$\frac{2(k+1)\cos t-k}{\sin t+\cos t}=2 \quad \Big|\cdot(\sin t+\cos t)$$

$$2(k+1)\cos t-k=2\sin t+2\cos t$$

$$2k\cdot\cos t+\cancel{2\cos t}-k=2\sin t+\cancel{2\cos t}$$

$$k=\frac{2\sin t}{2\cos t-1} \Rightarrow k(t)=\frac{2\sin t}{2\cos t-1}.$$

$$k'(t)=\frac{4-2\cos t}{(2\cos t-1)^2} \Rightarrow k'(t)=0 \Rightarrow \begin{cases}4-2\cos t=0\\ 2\cos t-1\neq 0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos t=2 \Rightarrow \varnothing \quad и \quad 4-2\cos t>0 \Rightarrow$$

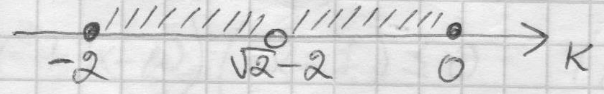
$$\Rightarrow k'(t)>0 \Rightarrow k(t)\uparrow \text{ на } \left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$$

$$\min_{t=\frac{\pi}{2}} k(t)=-2 \qquad \max_{t=\pi} k(t)=0 \Rightarrow k\in[-2;0]$$

О. Д. З. $\cos t+\sin t\neq 0 \quad \operatorname{tg} t\neq -1 \quad t\neq\frac{3\pi}{4}$

$$k\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{2\sin\frac{3\pi}{4}}{2\cos 3\pi/4-1}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt2}{2}}{-2\cdot\frac{\sqrt2}{2}-1}=\frac{\sqrt2}{-(\sqrt2+1)}=\frac{\sqrt2(\sqrt2-1)}{-(\sqrt2+1)(\sqrt2-1)}=$$

$$=\frac{\sqrt2(\sqrt2-1)}{-(2-1)}=-\sqrt2(\sqrt2-1)=\sqrt2-2$$



Ответ: $-2\le k<\sqrt2-2$ и $\sqrt2-2<k\le 0$

№20 $a-?$ $\forall x \in [2;3]$ решение ур-я

$$|x-a-2|+|x+a+3|=2a+5$$

1) Если $2a+5<0 \Rightarrow$ нет решения

2) Если $a=-2,5 \Rightarrow |x+0,5|+|x+0,5|=0$

$\Rightarrow x=-0,5 \notin [2;3]$

3) Если $2a+5>0 \Rightarrow a>-2,5$

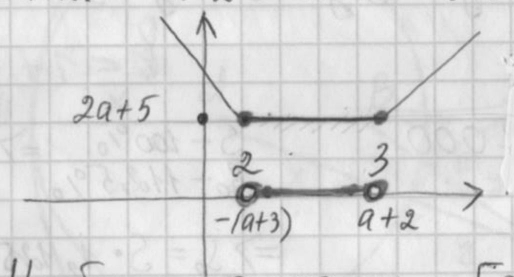
$$|x-(a+2)|+|x-(-a-3)|=2a+5$$

$x_1=a+2 \Rightarrow a>-2,5 \Rightarrow a+2>-0,5$

$x_2=-(a+3) \Rightarrow a>-2,5 \Rightarrow -a<2,5 \Rightarrow -a-3<-0,5$

$-a-3$ $\quad -0,5 \quad$ $a+2$ $\quad a$ $\Rightarrow -a-3<a+2$

т.к. $a+2+a+3=2a+5$, то



Найдем a если $[2;3]\subset[-a-3;a+2]$

$-a-3$ $\quad 2 \quad 3 \quad$ $a+2$ $\quad x$

$\begin{cases}-a-3\le 2\\ a+2\ge 3\end{cases}$ $\begin{cases}-a\le 5\\ a\ge 1\end{cases}$ $\begin{cases}a\ge -5\\ a\ge 1\end{cases}$ $\quad -5 \quad 1$

Ответ: $[1;+\infty)$

№21) a? $\frac{a-(a^2-2a-3)\sin x+4}{1{,}5+0{,}5\cos 2x+a^2}<1$

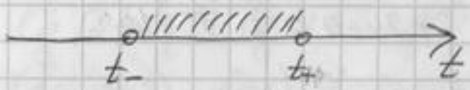
мн-во реш. $\subset [-2\pi; -\frac{7\pi}{6}]$, $\sin x = t$

$a-(a^2-2a-3)t+4<1{,}5+0{,}5(1-2t^2)+a^2$

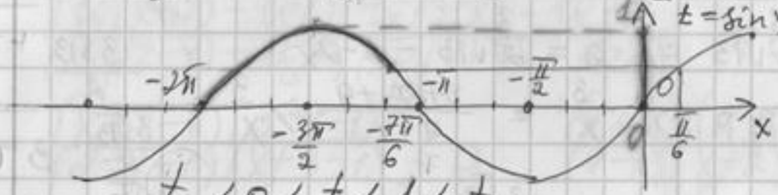
$t^2-(a+1)(a-3)t-(a+1)(a-2)<0$

$D=(a+1)^2(a-3)^2+4(a+1)(a-2)$

$t_+=\frac{(a+1)(a-3)+\sqrt{D}}{2}$ $\quad t_-=\frac{(a+1)(a-3)-\sqrt{D}}{2}$

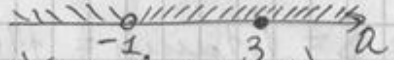


$t_-<t<t_+$



$t_-<0<t<1<t_+$

$t_-<0 \Rightarrow \underbrace{(a+1)(a-3)}_{0<\ u>0}<\sqrt{(a+1)\cdot\left((a+1)(a-3)^2+4(a-2)\right)}$



$(a+1)^2(a-3)^2<(a+1)\left((a+1)(a-3)^2+4(a-2)\right)$

$(a+1)\left[\cancel{(a+1)(a-3)^2}-\cancel{(a+1)(a-3)^2}-4(a-2)\right]<0$

$(a+1)(a-2)>0$

$t_+>1 \quad (a+1)(a-3)+\sqrt{D}>2 \Rightarrow \sqrt{D}>2-(a+1)(a-3)$

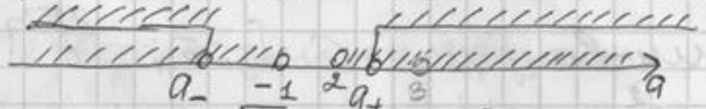
$(a+1)\left((a+1)(a-3)^2+4a-8\right)>\left(2-(a+1)(a-3)\right)^2$

$(a+1)\left((a+1)(a-3)^2\overbrace{\quad}^{4a-8}\right)>4-4(a+1)(a-3)+(a+1)^2(a-3)^2$

$(a+1)\left[\cancel{(a+1)(a-3)^2}+4a-8-\cancel{(a+1)(a-3)^2}+4(a-3)\right]-4>0$

$(a+1)(8a-20)-4>0 \Rightarrow 2a^2-3a-6>0$

$D=57$. $\quad a_+=\frac{3+\sqrt{57}}{4}\approx 2{,}6 \quad a_-=\frac{3-\sqrt{57}}{4}\approx -1{,}1$



Ответ: $\left(-\infty; \frac{3-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{57}}{4};+\infty\right)$

№20 $a-?$ 1 решение $x<2$.

$$|\log_{0,5}(x^2)-a|-|\log_{0,5}x+2a|=(\log_{0,5}x)^2$$

$\log_{0,5}x=t \Rightarrow t>-1 \Rightarrow |2t-a|-|t+2a|=t^2$

$t_1=\frac{a}{2}$ $\quad t_2=-2a$

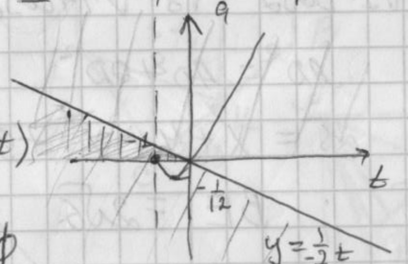
$a>0$: points on t: $-2a$, $\frac{a}{2}$; intervals 1), 2), 3)

	1)	2)	3)
$2t-a$	−	−	+
$t+2a$	−	+	+

$a<0$: points on t: $\frac{a}{2}$, $-2a$; intervals 4), 5), 6)

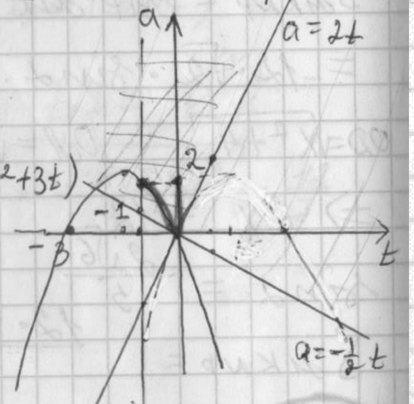
	4)	5)	6)
$2t-a$	−	+	+
$t+2a$	−	−	+

1) $\begin{cases} a>0 \\ a<-\frac{1}{2}t \\ a=\frac{1}{3}(t^2+t) \\ t>-1 \end{cases}$



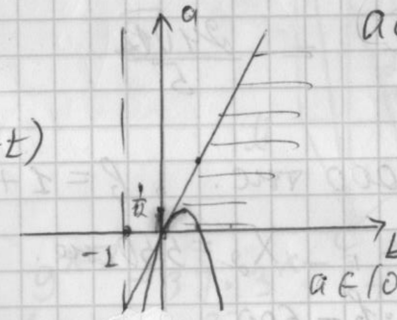
$a\in\varnothing$

2) $\begin{cases} a>0 \\ a>2t \\ a>-\frac{1}{2}t \\ a=-(t^2+3t) \\ t>-1 \end{cases}$



$a\in(0;2)$

3) $\begin{cases} a>0 \\ a<2t \\ a=-\frac{1}{3}(t^2-t) \\ t>-1 \end{cases}$

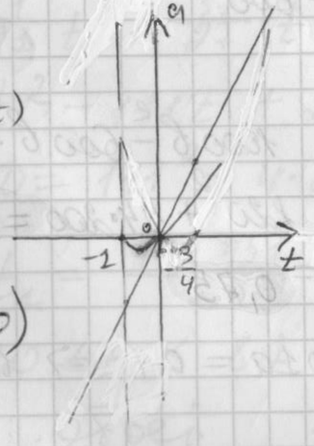


$a\in(0;\frac{1}{12})$

$\left[\begin{array}{l} a\in(0;2) \\ a\in(0;\frac{1}{12}) \end{array}\right. \Rightarrow a\in(0;2)$

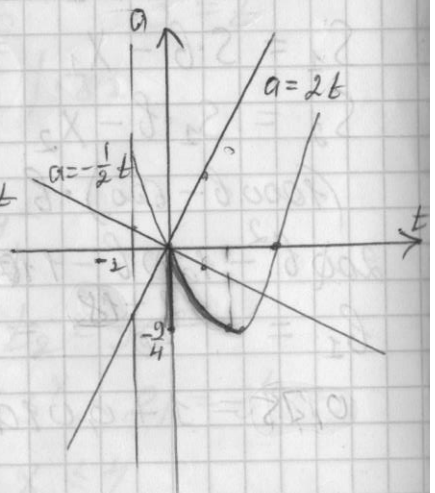
$\varnothing$

4) $\begin{cases} a<0 \\ a>2t \\ a=\frac{1}{3}(t^2+t) \\ t>-1 \end{cases}$



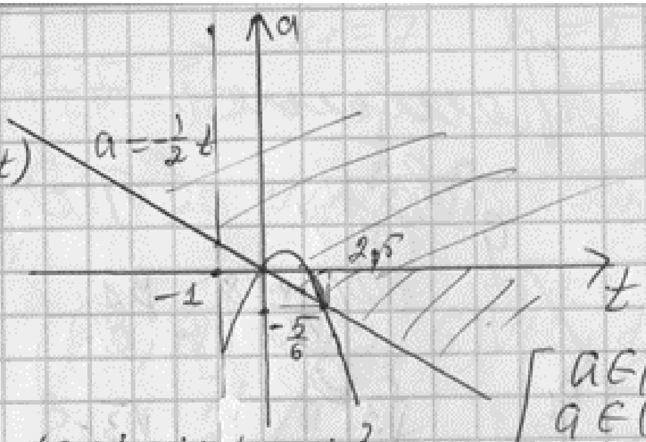
$a\in(-\frac{3}{4};0)$

5) $\begin{cases} a<0 \\ a<2t \\ a<-\frac{1}{2}t \\ a=t^2-3t \\ t>-1 \end{cases}$



$a\in(-\frac{9}{4};0)$

6) $\begin{cases} a<0 \\ a>-\frac{1}{2}t \\ a=-\frac{1}{3}(t^2-t) \\ t>-1 \end{cases}$



$a\in(-\frac{5}{6};0)$

$\left[\begin{array}{l} a\in(-\frac{9}{4};0) \\ a\in(-\frac{5}{6};0) \end{array}\right. \Rightarrow a\in(-\frac{9}{4};0)$

7) $a=0$ $\quad |2t|-|t|=t^2$

$-1<t<0$ $\quad -2t+t=t^2$ $\quad t^2+t=0 \Rightarrow t=-1$ и $t=0 \Rightarrow$

$\log_{0,5}x=0 \Rightarrow x=1<2$; $\log_{0,5}x=-1 \Rightarrow x=2$

$t>0$ $\quad 2t-t=t^2$ $\quad t^2-t=0 \Rightarrow t=1$ и $t=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=1<2$; $\log_{0,5}x=1 \Rightarrow x=0,5<2$

Ответ: $(-\frac{9}{4};2)$

№20 $a>0$? 1 решение

$$1 \le \frac{a+x^2+2\log_5(a^2-4a+5)}{30\sqrt{17x^4+5x^2}+a+1+\log_5^2(a^2-4a+5)}$$ >0

$$30\sqrt{17x^4+5x^2}+\cancel{a}+1+\log_5^2(a^2-4a+5) \le \cancel{a}+x^2+2\log_5(a^2-$$

$$30\sqrt{17x^4+5x^2}+(\log_5(a^2-4a+5)-1)^2 \le x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 30\sqrt{17x^4+5x^2}=0 & \Rightarrow x^2=0 \\ \log_5(a^2-4a+5)-1=0 & \Rightarrow a^2-4a+5=5 \quad \begin{matrix} a=0 \ \varnothing \\ a=4 \end{matrix} \\ x^2=0 & \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

Ответ: $a=4$ и $x=0$