



корпорация

российский
учебник

Методика изучения логарифмов в старшей школе

Г.К.Муравин, кандидат педагогических наук,
почетный работник образования, ветеран труда,
автор УМК по математике для 1–11 классов

О.В.Муравина, кандидат педагогических наук, доцент,
профессор кафедры математического образования
Института развития образовательных технологий,
автор УМК по математике для 1–11 классов

7 февраля 2019, Москва

План вебинара

1. Определение логарифма.
2. Логарифмическая функция. Уравнения и неравенства, решаемые на основе свойств функции. Задания из ЕГЭ.
3. Свойства логарифмов. Уравнения и неравенства, решаемые на основе свойств логарифмов. Задания из ЕГЭ.
4. Комплексные задания с логарифмами. Задания из ЕГЭ.
5. История развития логарифмов и логарифмических таблиц. Мастер-класс Г.К.Муравина в Томске.

УМК по математике для 5-11 классов





Приложение

К приказу Министерства просвещения
Российской Федерации
от «18» декабря 2018 г. № 345

**Федеральный перечень учебников,
рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную
аккредитацию образовательных программ начального общего, основного
общего, среднего общего образования**



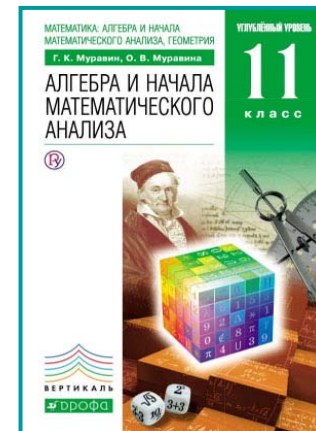
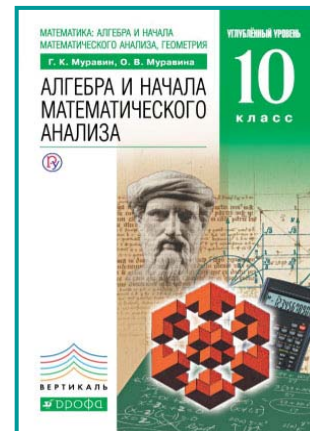
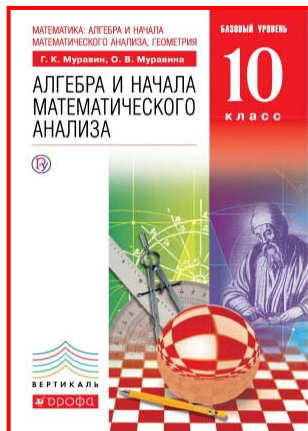
1.3.4.	Математика и информатика (предметная область)				
1.3.4.1	Математика (базовый уровень) (учебный предмет)				
1.3.4.1.10.1	Муравин Г.К., Муравина О.В.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень)	10	ООО «ДРОФА»	http://www.drofa.ru/75/
1.3.4.1.10.2	Муравин Г.К., Муравина О.В.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень)	11	ООО «ДРОФА»	http://www.drofa.ru/75/

1.3.4.2.	Математика (углублённый уровень) (учебный предмет)				
1.3.4.2.2.1	Муравин Г.К., Муравина О.В.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (углублённый уровень)	10	ООО «ДРОФА»	http://www.drofa.ru/73/
1.3.4.2.2.2	Муравин Г.К., Муравина О.В.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (углублённый уровень)	11	ООО «ДРОФА»	http://www.drofa.ru/73/

УМК по алгебре и началам математического анализа для 10-11 классов

Рабочие программы

Учебники

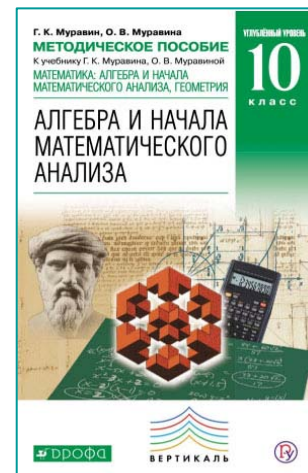
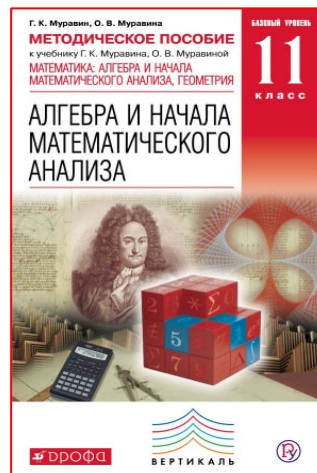


Электронные приложения

Методические пособия



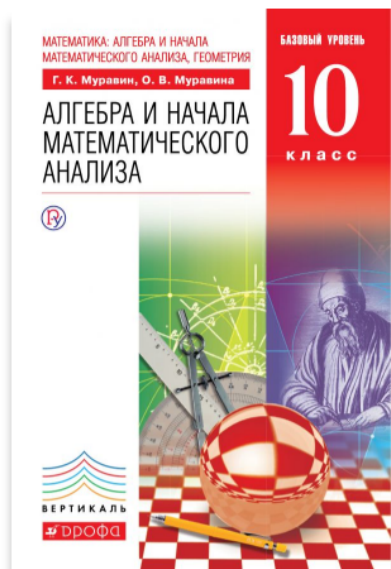
rosuchebnik.ru



Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10 класс. Учебник

rosuchebnik.ru

Характеристики Описание Состав УМК



Содержание
Введение

Книга доступна в форме:

Печатная Электронная

608 ₽

скидка 26%
по промокоду drofa-ventana

Купить в магазине издательской группы

414 ₽

есть в наличии

Купить в Ozon

Загрузить электронное приложение

Давайте вместе сделаем учебную продукцию лучше

Автор

Серия

Класс

Предмет

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10 класс. Учебник

Характеристики Описание Состав УМК



Содержание
Введение

Книга доступна в форме:

Печатная Электронная

149 ₽

есть в наличии

Купить в LECTA

149.00 ₽

есть в наличии Купить в .pdf в Litres

Загрузить электронное приложение

Давайте вместе сделаем учебную продукцию лучше

Автор

Муравин Г.К., Муравина О.В.

Серия

Линия УМК Г.К. Муравина, К.С. Муравина, О.В. Муравиной. Алгебра и начала математического анализа (10-11) (баз.)

Класс

10 класс

Предмет

Алгебра

Электронные приложения



Содержание учебников

Содержание материала учебника в 10 классе

Глава 1. Функции и графики

Глава 2. Степени и корни

Глава 3. Показательная и логарифмическая функции

Глава 4. Тригонометрические функции

Глава 5. Вероятность и комбинаторика

Глава 6. Повторение



Содержание материала учебника в 11 классе

Глава 1. Непрерывность и пределы функции

Глава 2. Производная функции

Глава 3. Техника дифференцирования

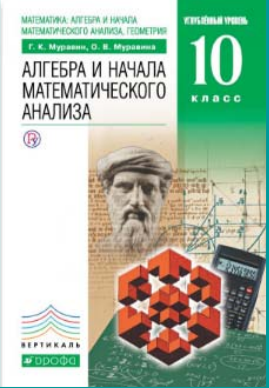
Глава 4. Интеграл и первообразная

Глава 5. Уравнения, неравенства и их системы

Глава 6. Вероятность и статистика

Глава 7. Комплексные числа





Содержание учебников



Оглавление

Глава 1. Функции и графики

1. Понятие функции	7
2. Прямая, гипербола, парабола и окружность	15
3. Непрерывность и монотонность функций	24
4. Квадратичная и дробно-линейная функции. Преобразование графиков	35

Глава 2. Степени и корни

5. Степенная функция $y = x^n$ при натуральном n	46
6. Понятие корня n -й степени	51
7. Свойства арифметических корней	61
8. Степень с рациональным показателем	67

Глава 3. Показательная и логарифмическая функции

9. Функция $y = a^x$	76
10. Понятие логарифма	86
11. Свойства логарифмов	95

Глава 4. Тригонометрические функции и их свойства

12. Угол поворота	106
13. Радианная мера угла	110
14. Синус и косинус любого угла	115

15. Тангенс и котангенс любого угла	122
16. Простейшие тригонометрические уравнения ..	128
17. Формулы приведения	136
18. Свойства и график функции $y = \sin x$	144
19. Свойства и график функции $y = \cos x$	151
20. Свойства и графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$	157
21. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента	165
22. Синус и косинус суммы и разности двух углов	171
23. Тангенс суммы и тангенс разности двух углов	177
24. Тригонометрические функции двойного угла	182
25. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму. Обратное преобразование	188
26. Решение тригонометрических уравнений	194

Глава 5. Элементы теории вероятностей и комбинаторики

27. Понятие о вероятности	203
28. Вычисление числа вариантов	208

Глава 6. Повторение

29. Функции и графики	217
30. Уравнения и неравенства	232

Домашние контрольные работы	241
Ответы	248
Советы	270
Решения	280

Основные формулы	311
------------------------	-----

Предметный указатель	315
----------------------------	-----

Список дополнительной литературы и интернет-ресурсов	317
--	-----

Рабочие программы

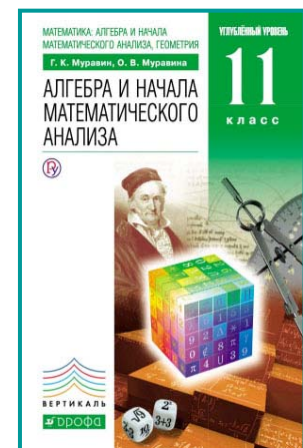
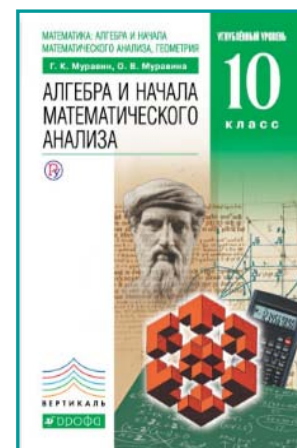
СОДЕРЖАНИЕ

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10—11 классы

Пояснительная записка	3
Общая характеристика учебного предмета	7
Место предмета в учебном плане	9
Личностные, метапредметные и предметные результаты освоения учебного предмета	9
Содержание учебного предмета	11
Тематическое планирование	15
10 класс	15
11 класс	25
Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение образовательного процесса	33

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10—11 классы

Пояснительная записка	38
Общая характеристика учебного предмета	42
Место предмета в учебном плане	44
Личностные, метапредметные и предметные результаты освоения учебного предмета	44
Содержание учебного предмета	47
Тематическое планирование	51
10 класс	51
11 класс	63
Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение образовательного процесса	72



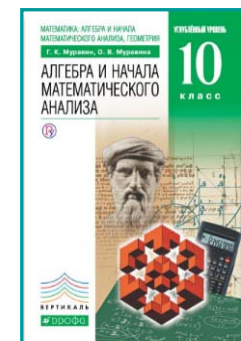
Тематическое планирование

Содержание материала учебника	Количество часов	Характеристика основных видов учебной деятельности учащихся
10. Понятие логарифма Понятие логарифма числа. Основное логарифмическое тождество. Логарифмическая функция, ее свойства и график. Логарифмические уравнения	6	Формулировать определение логарифма. Записывать число в виде логарифма с заданным основанием. Решать простейшие логарифмические уравнения, неравенства. Сравнить значения логарифмических функций. Находить область определения логарифмической функции. Строить график логарифмической функции как функции, обратной к показательной, в тетради и с применением компьютерных программ. Формулировать свойства логарифмической функции. Приводить примеры реальных явлений (процессов), количественные характеристики которых описываются с помощью логарифмической функции. Описывать свойства логарифмической функции с опорой на ее график. Перечислять свойства логарифмической функции и иллюстрировать их с помощью графика
11. Свойства логарифмов Основные свойства логарифмов. Логарифмические уравнения и неравенства. Десятичные и натуральные логарифмы. Характеристика и мантисса десятичного логарифма. История появления логарифмических таблиц	6	Формулировать свойства логарифмов. Применять логарифмические тождества, включая формулу перехода от одного основания логарифма к другому при преобразованиях логарифмических выражений, решении логарифмических уравнений и неравенств. Пользоваться логарифмическими таблицами и микрокалькулятором для вычисления значений логарифмической функции. Решать показательные и логарифмические уравнения и неравенства с неизвестными как в основании, так и под знаком логарифма
Зачет или контрольная работа № 3	1	Контролировать и оценивать свою работу. Ставить цели на следующий этап обучения



Тематическое планирование

Содержание материала учебника	Количество часов	Характеристика основных видов учебной деятельности учащихся
10. Понятие логарифма Понятие логарифма числа. Основное логарифмическое тождество.	7	Формулировать определение логарифма. Записывать число в виде логарифма с заданным основанием. Решать логарифмические уравнения, неравенства. Сравнить значения логарифмических функций. Находить область определения логарифмической функции. Строить график логарифмической функции как функции, обратной к показательной, в тетради и с применением компьютерных программ. Формулировать свойства логарифмической функции. Приводить примеры реальных явлений (процессов), количественные характеристики которых описываются с помощью логарифмической функции. Описывать свойства логарифмической функции с опорой на ее график. Перечислять свойства логарифмической функции и иллюстрировать их с помощью графика
Логарифмическая функция, ее свойства и график. Логарифмические уравнения		
11. Свойства логарифмов Основные свойства логарифмов. Логарифмические уравнения и неравенства. Десятичные и натуральные логарифмы. Характеристика и мантисса десятичного логарифма. История появления логарифмических таблиц	8	Формулировать и доказывать свойства логарифмов. Применять логарифмические тождества, включая формулу перехода от одного основания логарифма к другому при преобразованиях логарифмических выражений, решении логарифмических уравнений и неравенств. Пользоваться логарифмическими таблицами и микрокалькулятором для вычисления значений логарифмической функции. Решать показательные и логарифмические уравнения и неравенства относительно сложных видов, в том числе с параметрами и модулями, с неизвестными как в основании, так и под знаком логарифма
Зачет или контрольная работа № 3	1	Контролировать и оценивать свою работу. Ставить цели на следующий этап обучения



Понятие логарифма в учебнике

10. Понятие логарифма

При решении показательных уравнений в предыдущем пункте удавалось представить обе части уравнения в виде степеней с одинаковыми основаниями и рациональными показате-

лями. Так, например, при решении уравнения $2^x = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{5}}$ мы заменяем $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{5}}$ степенью $2^{-\frac{6}{5}}$ и из равенства степеней с одинаковыми основаниями $2^x = 2^{-\frac{6}{5}}$ делаем вывод о равенстве показателей: $x = -\frac{6}{5}$. Однако,

чтобы решить, казалось бы, более простое уравнение $2^x = 3$ имеющихся у вас знаний оказывается недостаточно. Дело в том, что число 3 нельзя представить в виде степени с основанием 2 и рациональным показателем.

▼ Действительно, если бы равенство $2^{\frac{m}{n}} = 3$, где m и n — натуральные числа, было верным, то, возведя его в степень n , мы должны были бы получить верное равенство $2^m = 3^n$. Но последнее равенство неверно, так как левая его часть является чётным числом, а правая — нечётным. Значит, не может быть верным и равенство $2^{\frac{m}{n}} = 3$. $\triangle$

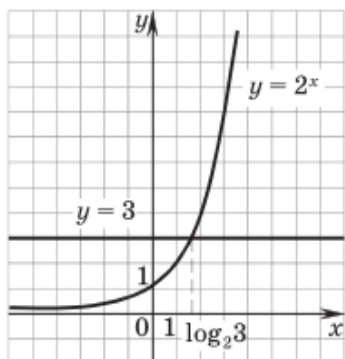


Рис. 61

С другой стороны, график непрерывной функции $y = 2^x$ пересекается с прямой $y = 3$ (рис. 61), и, значит, уравнение $2^x = 3$ имеет корень.

Таким образом, перед нами стоят два вопроса: «Как записать этот корень?» и «Как его вычислить?». Ко второму вопросу мы вернёмся в следующем пункте, а ответ на первый вопрос сформулируем в виде определения.

Показатель степени, в которую нужно возвести число a ($a > 0$, $a \neq 1$), чтобы получить число b , называется **логарифмом b по основанию a** и обозначается $\log_a b$.

Теперь мы можем записать корень уравнения $2^x = 3$:

$$x = \log_2 3.$$

Равенства $a^x = b$ и $x = \log_a b$, в которых число a положительно и не равно единице, число b положительно, а число x может быть любым, выражают одно и то же соотношение между числами a , b и x . Подставив в первое равенство выра-

жение x из второго, получим основное логарифмическое тождество.

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b$$

Понятие логарифма в методическом пособии



З а д а н и е 2. Решите уравнение:

а) $2^x = 64$; в) $5^x = \frac{\sqrt[3]{5}}{125}$; д) $7^x = -12$.

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$; г) $4^x = 0$;

После проверки ученикам предлагается ответить на вопрос, какое из заданий показалось им наиболее трудным. Вероятный ответ: 2 (в), так как в нем нужно было приводить дробь к степени числа 5. Затем школьникам предлагается высказать мнение о сравнительной с заданием 2 (в) трудности уравнения $2^x = 3$. На первый взгляд кажется, что это уравнение проще, однако представить 3 в виде степени числа 2 школьникам не удается.

Дальше изучение нового материала проводится в соответствии с учебником. При этом в зависимости

от уровня класса рассматривается или не рассматривается дополнительный материал о невозможности представления 3 в виде 2^r , где $r = \frac{m}{n}$.

После этого диалог с классом можно строить примерно так:

— Как вы думаете, имеет ли уравнение $2^x = 3$ корень? Ответ обоснуйте. [Если построить график функции $y = 2^x$ и провести прямую $y = 3$, то они пересекутся в одной точке, значит, уравнение имеет один корень.]

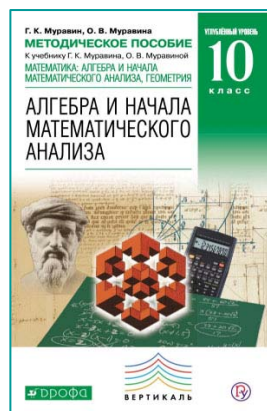
— Что можно сказать о корне уравнения $a^x = b$, где $a > 0$ и $a \neq 1$? При всех ли значениях b оно имеет корни?

Затем вводится определение логарифма числа b по основанию a и записывается основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$. При этом выписывание равенства происходит синхронно с повторным чтением определения теперь уже в обратном, по сравнению с учебником, порядке.

Говорим	Пишем
Логарифмом числа b по основанию a называется	$\log_a b$
Показатель степени, в которую нужно возвести число a	$a^{\log_a b}$
Чтобы получить число b	$a^{\log_a b} = b$

Теперь можно записать корень уравнения $2^x = 3$: $x = \log_2 3$ и предложить школьникам серию самостоятельных работ из заданий № 175—177, например:

С1: № 175 (1, б), 176 (1, а—е). С2: № 176 (1, ж—л), 177 (1, 2). Между работами устно выполняются задания из № 175.



Упражнения на отработку определения логарифма



Упражнения

175. Пользуясь определением логарифма, найдите:

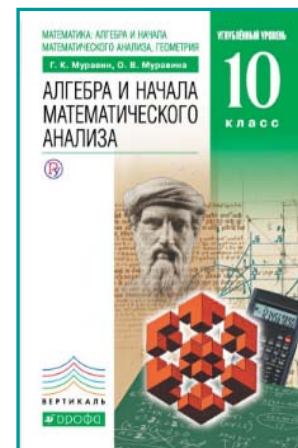
- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1) а) $\log_2 4$; | 2) а) $\log_5 25$; |
| б) $\log_3 81$; | б) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$; |
| в) $\log_{0,5} 0,125$; | в) $\log_4 64$; |
| г) $\log_3 \frac{1}{27}$; | г) $\log_{0,25} 16$; |
| д) $\log_{0,5} 8$; | д) $\log_3 \frac{1}{81}$; |
| е) $\log_4 \sqrt{2}$; | е) $\log_{27} \sqrt{3}$; |
| ж) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27}$; | ж) $\log_{\sqrt[3]{2}} 0,125$. |

176. Запишите в виде логарифма с основанием:

- 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 4; 5) $\frac{1}{27}$; 6) $x + 1$
числа: а) 1; б) 2; в) 3; г) 0; д) -1;
е) -2; ж) -3; з) 0,5; и) $\frac{1}{3}$; к) -0,5; л) $\frac{2}{3}$.

177. Решите уравнение:

- | | |
|-----------------------|---------------------------------|
| 1) $\log_x 32 = 5$; | 3) $\log_x \sqrt{5} = 3$; |
| 2) $\log_x 27 = -3$; | 4) $\log_x \sqrt[3]{49} = -2$. |



Логарифмическая функция

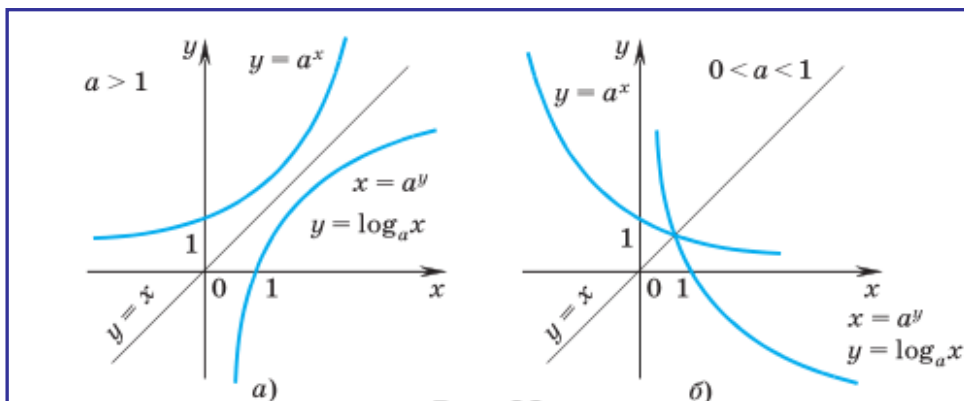


Рис. 62

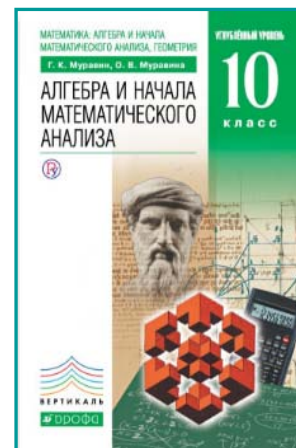
Выразим x из равенства $y = \log_a x$, получим $x = a^y$. Последнее равенство задаёт функцию $x = a^y$, график которой симметричен графику показательной функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$ (рис. 62, а, б).

Показательная функция $x = a^y$ является монотонной, и, значит, разные значения y соответствуют разным значениям x , но это говорит о том, что $y = \log_a x$, в свою очередь, является функцией x .

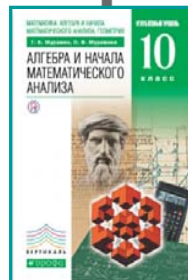
Показательная функция $y = a^x$ и логарифмическая функция $y = \log_a x$ являются взаимно обратными. Сравнивая их графики, можно отметить некоторые основные свойства логарифмической функции.

Свойства функции $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

1. Функция $y = \log_a x$ определена и непрерывна на множестве положительных чисел.
2. Область значений функции $y = \log_a x$ — множество действительных чисел.
3. При $0 < a < 1$ функция $y = \log_a x$ является убывающей; при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ является возрастающей.
4. График функции $y = \log_a x$ проходит через точку $(1; 0)$.
5. Ось ординат — вертикальная асимптота графика функции $y = \log_a x$.



Рассмотрим несколько примеров, в которых используются свойства логарифмической функции.



✓ **Пример 1.** Решить уравнение $\log_2(2^x - 7) = 3 - x$.

Решение 1. По определению логарифма имеем:

$$2^{3-x} = 2^x - 7.$$

Далее: $2^x - \frac{8}{2^x} - 7 = 0$. Поскольку $2^x \neq 0$, получаем:

$$(2^x)^2 - 7 \cdot 2^x - 8 = 0.$$

Будем рассматривать полученное уравнение как квадратное относительно 2^x и найдём его положительный корень, поскольку $2^x > 0$, то $2^x = 8$. Далее имеем: $2^x = 2^3$, $x = 3$.

Ответ: 3.

Решение 2. Левая часть уравнения задаёт возрастающую функцию $y = \log_2(2^x - 7)$. Действительно, при увеличении значения x соответственно увеличиваются значения 2^x , $2^x - 7$ и $\log_2(2^x - 7)$. Правая же часть уравнения задаёт убывающую функцию $y = 3 - x$. Значит, данное уравнение либо не имеет корней, либо имеет единственный корень. Нетрудно подобрать корень данного уравнения — число 3.

✓ **Пример 2.** Решить неравенство $\log_{x+2}(5-x) > 1$.

Решение. Найдём множество значений переменной x , при которых все входящие в данное неравенство выражения имеют смысл — область допустимых значений переменной неравенства (обычно используется сокращение ОДЗ). Одновременно должны выполняться следующие условия: основание логарифма и выражение, стоящее под знаком логарифма, положительны, а основание логарифма, кроме того, отличается от 1. Следовательно, ОДЗ состоит из решений системы

$$\begin{cases} 5-x > 0, \\ x+2 > 0, \\ x+2 \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 5, \\ x > -2, \\ x \neq -1. \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } (-2; -1) \cup (-1; 5).$$

Для любого значения x из ОДЗ правую часть данного неравенства можно представить в виде логарифма с основанием $x+2$:

$$\log_{x+2}(5-x) > \log_{x+2}(x+2).$$

Основание $x+2$ логарифмов может быть как больше, так и меньше 1. В первом случае большему логарифму соответствует большее значение стоящего под его знаком выражения, а во втором — меньшее. Следовательно, чтобы перейти от неравенства логарифмов к неравенству выражений, стоящих под их знаками, нужно рассмотреть два случая:

1) основание логарифма больше 1 (знак неравенства не изменяется);

2) основание логарифма меньше 1 (знак неравенства меняется на противоположный).

$$\text{Случай 1. } \begin{cases} x+2 > 1, \\ 5-x > x+2; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1, \\ 2x < 3; \end{cases} \quad -1 < x < 1,5.$$

Найденные значения x входят в ОДЗ и, соответственно, в множество решений неравенства.

$$\text{Случай 2. } \begin{cases} x+2 < 1, \\ 5-x < x+2; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1, \\ x > 1,5; \end{cases} \quad \text{нет решений.}$$

Ответ: $-1 < x < 1,5$.

✓ **Пример 3.** Решить неравенство $\log_3 \log_{0,5}(2x+1) > 1$.

Решение. Запишем обе части неравенства в виде логарифмов с одинаковым основанием 3:

$$\log_3 \log_{0,5}(2x+1) > 1, \quad \log_3 \log_{0,5}(2x+1) > \log_3 3.$$

Логарифмическая функция с основанием 3 возрастает, значит, $\log_{0,5}(2x+1) > 3$. Понятно, что в этом случае значения выражения $\log_{0,5}(2x+1)$, стоящего под знаком внешнего логарифма, положительны. Запишем обе части неравенства в виде логарифмов с одинаковым основанием 0,5:

$$\log_{0,5}(2x+1) > \log_{0,5} 0,5^3.$$

Логарифмическая функция с основанием 0,5 убывает; учитывая, что под знаком логарифма должно быть положительное число, имеем:

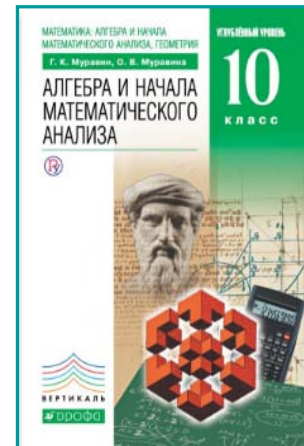
$$\begin{cases} 2x+1 < 0,5^3, \\ 2x+1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < 2x+1 < \frac{1}{8}, \\ -1 < 2x < -\frac{7}{8}, \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} < x < -\frac{7}{16}. \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{1}{2} < x < -\frac{7}{16}$.



Решение логарифмических уравнений и неравенств на основе свойств логарифмической функции

Примечание. Освобождаясь от внешнего логарифма, имеющего основание 3, мы сослались на возрастание соответствующей логарифмической функции, т. е. на то, что большему значению логарифма соответствует большее значение выражения, стоящего под его знаком. Однако следует иметь в виду, что если функцию $y = \log_3 \log_{0,5} (2x + 1)$ считать логарифмической, то её аргумент не переменная x , а всё выражение $\log_{0,5} (2x + 1)$. Если же всё-таки рассматривать x как аргумент функции $y = \log_3 \log_{0,5} (2x + 1)$, то эта функция окажется убывающей, так как при увеличении значения x увеличивается значение выражения $2x + 1$, уменьшается значение выражения $\log_{0,5} (2x + 1)$ и, соответственно, уменьшается значение самой функции.



178. Решите уравнение¹:

- 1) $\log_2(x+3) = 2$; 3) $\bigcirc \log_{\sqrt{3}}(x^2 - 3x - 7) = 2$;
 2) $\log_{0,6}(x-5) = -2$; 4) $\bigcirc \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(x^2 + 5x + 2) = -6$;
 5) $\bigcirc \log_{\frac{2}{3}}(x+1) - \log_3(x+1) - 2 = 0$;
 6) $\bigcirc \log_{0,5}^2(2x-1) + 3 \log_{0,5}(2x-1) + 2 = 0$.

179. Решите уравнение, пользуясь определением логарифма:

- 1) $2^x = 5$; 3) $5^{x+1} = 2$;
 2) $0,5^x = 7$; 4) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 3$.

180. Решите неравенство:

- 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 3$; 3) $\bigcirc (3 - \sqrt{3})^x > 6$;
 2) $\sqrt{3^x} < 16$; 4) $\bigcirc (\sqrt{15} - 3)^x \leq 6$.

181. В одной системе координат постройте графики функций.

1) $y = \log_2 x$ и $y = \log_3 x$.

Используя графики, сравните числа:

- а) $\log_2 5$ и $\log_3 5$; в) $\log_2(5 - \sqrt{17})$ и $\log_3(5 - \sqrt{17})$;
 б) $\log_2 0,9$ и $\log_3 0,9$; г) $\log_2(\sqrt{2} - 1)$ и $\log_3(\sqrt{2} - 1)$.

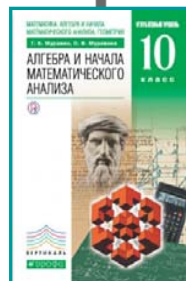
2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Используя графики, сравните числа:

- а) $\log_{\frac{1}{2}} 4$ и $\log_{\frac{1}{3}} 4$;
 б) $\log_{\frac{1}{2}} 0,8$ и $\log_{\frac{1}{3}} 0,8$;
 в) $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{17} - 4)$ и $\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{17} - 4)$;
 г) $\log_{\frac{1}{2}}(3 - \sqrt{2})$ и $\log_{\frac{1}{3}}(3 - \sqrt{2})$.

182. 1) $\bigcirc$ В одной системе координат изобразите схематически графики функций $y = a^x$ и $y = b^x$:

- а) при $a > b > 1$; б) при $0 < b < a < 1$.



2) $\bigcirc$ В этой же системе постройте графики обратных им функций $y = \log_a x$ и $y = \log_b x$.

3) $\bigcirc$ Используя графики, решите неравенство $\log_a x < \log_b x$.

4) $\bullet$ Сформулируйте правило сравнения логарифмов одного и того же числа.

183. Сравните:

1) $\log_7 \frac{6}{7}$, $\log_8 \frac{7}{8}$ и $\log_8 \frac{6}{7}$; 2) $\log_7 \frac{8}{7}$, $\log_8 \frac{9}{8}$ и $\log_8 \frac{8}{7}$.

184. Найдите область определения выражения:

- 1) $\log_5(7x^2 + 10x + 3)$; 5) $\bigcirc \log_{x+2}(7x^2 + 10x + 3)$;
 2) $\log_5(7 + 10x - 17x^2)$; 6) $\bigcirc \log_{4x+3}(7 + 10x - 17x^2)$;
 3) $\log_{3-2x}(2x + 3)$; 7) $\bigcirc \log_{3x-2} \frac{2x-1}{3-x}$;
 4) $\log_{3-2x}(7 - 3x)$; 8) $\bigcirc \log_{2-\frac{x}{3}} \frac{3x-1}{4-x}$.

185. Решите уравнение:

- 1) $25^x - 8 \cdot 5^x + 15 = 0$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x - 7 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 6 = 0$;
 2) $2^x + 10 \cdot 2^{-x} - 7 = 0$; 4) $2 \cdot (0,1)^x + 10^{x+1} - 21 = 0$;
 5) $\bullet 4^x - 6^{x+1} + 5 \cdot 9^x = 0$;
 6) $3 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0$;
 7) $2^{x+1} - 3 \cdot 2^x + 5 \cdot 2^{x-1} = 15$;
 8) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3} - 2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{x-1} - 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x = 10$.

186. Решите уравнение:

1) $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$; 2) $\log_4(4^{-x} + 3) = x + 1$.

187. Найдите все значения a , при которых уравнение $\log_2(4^x - a) - x = 0$ имеет:

- 1) единственный корень; 2) два корня.

188. Решите неравенство:

- 1) $\log_5(x+2) > 2$; 5) $\bigcirc \log_{\sqrt[3]{16}}(x^2 - 3x + 4) < 1,5$;
 2) $\log_{0,5}(x-2) < -2$; 6) $\bigcirc \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 5x - 6) > 6$;
 3) $\log_{\sqrt{3}}(x+2) < 4$; 7) $\bullet \log_{x-5}(x+2) > 1$;
 4) $\log_{\sqrt[3]{0,1}}(1-x) > 6$; 8) $\bullet \log_{x+1}(x-2) < -1$.

¹ Принято обозначение $\log_a^n b = (\log_a b)^n$.

$0,5^x > 4$; $0,5^x > 0,5^{-2}$. В силу убывания показательной функции с основанием $0,5$ имеем $x < -2$.

$$180. 4) (\sqrt{15} - 3)^x \leq 6, (\sqrt{15} - 3)^x \leq (\sqrt{15} - 3)^{\log_{(\sqrt{15}-3)} 6}.$$

Поскольку показательная функция с основанием $\sqrt{15} - 3$ убывает ($3 < \sqrt{15} < 4$, значит, $0 < \sqrt{15} - 3 < 1$), имеем: $x \geq \log_{(\sqrt{15}-3)} 6$.

$$184. 8) \log_{2-\frac{x}{3}} \frac{3x-1}{4-x}. \text{ Область определения составляют}$$

решения системы

$$\begin{cases} 2 - \frac{x}{3} > 0, \\ 2 - \frac{x}{3} \neq 1, \\ \frac{3x-1}{4-x} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 6, \\ x \neq 3, \\ \frac{3x-1}{4-x} > 0. \end{cases}$$

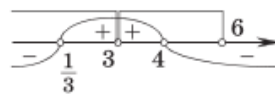


Рис. 127

Используем метод интервалов (рис. 127).

О т в е т: $\frac{1}{3} < x < 3$; $3 < x < 4$.

$$185. 5) 4^x - 6^{x+1} + 5 \cdot 9^x = 0, \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 5 = 0,$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} = 1, \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2} = 5, x_1 = 0, x_2 = \log_{\frac{2}{3}} 5.$$

188. 7) Рассмотрим два случая: а) $0 < x - 5 < 1$, $5 < x < 6$: $0 < x + 2 < x - 5$ — нет решений; б) $x - 5 > 1$, $x > 6$: $x + 2 > x - 5$ — все числа, удовлетворяющие условию случая, т. е. $x > 6$. 8) Поскольку значения выражения $x - 2$, стоящего под знаком логарифма, положительны, то $x > 2$. При этом основание $x + 1$ логарифма больше 1. Имеем:

$$\begin{cases} x > 2, \\ \log_{x+1}(x-2) < \log_{x+1} \frac{1}{x+1}, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ x-2 < \frac{1}{x+1}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 2, \\ (x-2)(x+1) < 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ x^2 - x - 3 < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2, \\ \frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}, \end{cases}$$

$$2 < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

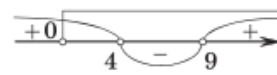


Рис. 128

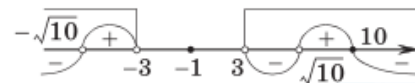


Рис. 129

190. 2) Выражения, стоящие в числителе и в знаменателе дроби, существуют при $x > 0$ и обращаются в нуль при $x = 4$ и $x = 9$. Отметим это на координатной прямой и проведём линию знаков (рис. 128). О т в е т: $0 < x < 4$, $x > 9$. 5) Выражения, стоящие в числителе и в знаменателе дроби, существуют при $x > 3$ и при $x < -3$. Знаменатель обращается в нуль при $x = \pm\sqrt{10}$, числитель — при $x = 10$ и $x = -1$. Отметим это на координатной прямой и проведём линию знаков (рис. 129). О т в е т: $-\sqrt{10} < x < -3$, $\sqrt{10} < x \leq 10$.

$$191. 4) \log_{x+4} \frac{x^2-1}{3} < \log_{x+4} 1. \text{ Рассмотрим два случая:}$$

а) $0 < x + 4 < 1$ и б) $x + 4 > 1$. а) $-4 < x < -3$: $\frac{x^2-1}{3} > 1$, $x^2 > 4$, $x > 2$ или $x < -2$. С учётом условия а) имеем $-4 < x < -3$; б) $x > -3$: $0 < \frac{x^2-1}{3} < 1$, $1 < x^2 < 4$, $1 < x < 2$ или $-2 < x < -1$.

При всех этих значениях условие б) выполняется. Объединяем результаты а) и б): $-4 < x < -3$, $-2 < x < -1$, $1 < x < 2$; 6) $\log_{x-2}(x+10) < \log_{x-2}(x-2)^2$. а) $0 < x - 2 < 1$, $2 < x < 3$. При этом $x + 10 > x^2 - 4x + 4$, $x^2 - 5x - 6 < 0$, $-1 < x < 6$. С учётом условия а) имеем: $2 < x < 3$; б) $x - 2 > 1$, $x > 3$. При этом $0 < x + 10 < x^2 - 4x + 4$,

$$\begin{cases} x + 10 > 0, \\ x^2 - 5x - 6 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -10, \\ x < -1 \text{ или } x > 6. \end{cases}$$

С учётом условия б) имеем: $x > 6$. Объединяя результаты а) и б), получаем О т в е т: $2 < x < 3$, $x > 6$. 7) $\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < \log_{2x}(2x)$. а) $0 < 2x < 1$, $0 < x < 0,5$. При этом:

$$x^2 - 5x + 6 > 2x > 0,$$

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 6 > 0, \\ 2x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 1 \text{ или } x > 6, \\ x > 0; \end{cases} \quad 0 < x < 1 \text{ или } x > 6.$$

С учётом условия а) получаем $0 < x < 0,5$. б) $2x > 1$, $x > 0,5$. При этом $0 < x^2 - 5x + 6 < 2x$,

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 - 7x + 6 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 2 \text{ или } x > 3, \\ 1 < x < 6; \end{cases} \quad 1 < x < 2 \text{ или } 3 < x < 6.$$

Решение логарифмических уравнений и неравенств на основе свойств логарифмической функции

После проверки последней работы можно предложить школьникам проанализировать уравнения № 185. Ученики должны соотнести уравнения данного номера с уравнениями, вошедшими в таблицу видов показательных уравнений. В процессе обсуждения уравнений учитель может фиксировать на доске некоторые важные моменты. Так, например, в восьмом уравнении степень с основанием $\frac{1}{3}$ следует привести к основанию $\frac{1}{9}$ и только потом выносить множитель за скобки. На доске можно записать:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{9}\right)^x \cdot 27.$$

Уравнения 2, 4 и 5 сводятся к квадратным с помощью умножения на степень, причем в последних двух ученики встречаются со степенями, основания которых взаимно обратны. Так, например, умножая уравнение 7 на $(0,1)^x$, получим:

$$2 \cdot (0,1)^{2x} + 10 - 21 \cdot (0,1)^x = 0.$$

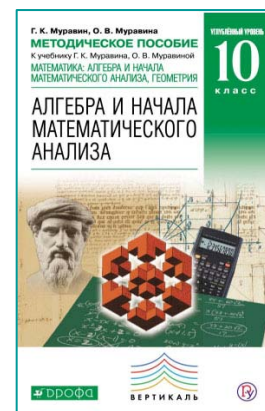
Новый для школьников тип уравнений представляет задание 6. Это так называемое *однородное* показательное уравнение. Представив 6^{x+1} , как $6 \cdot 2^x \cdot 3^x$, получаем уравнение $(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x \cdot 3^x + 5 \cdot (3^x)^2 = 0$, левая часть которого является *однородным* многочленом *второй степени* (многочлен, все члены которого имеют вторую степень) относительно 2^x и 3^x .

Учителю, вероятно, придется показать, что такое уравнение сводится к квадратному делением на квадрат одной из переменных. В данном случае, в связи с положительностью значений 3^x это не может привести к потере корней.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 6\left(\frac{2}{3}\right)^x + 5 = 0, \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2 \text{ или } \left(\frac{2}{3}\right)^x = 3, \\ x = \log_{\frac{2}{3}} 2 \text{ или } x = \log_{\frac{2}{3}} 3.$$

После обсуждения это уравнение заносится учениками в таблицу.

Уравнение	Метод решения	Образец решения
$4^x - 6 \cdot 2^x \cdot 3^x + 5 \cdot 3^x = 0$	Однородное показательное уравнение второй степени делением на 3^x сводится к квадратному	$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 6\left(\frac{2}{3}\right)^x + 5 = 0$



189. Выполните эскизы графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, решите:

1) уравнение $f(x) = g(x)$; 2) неравенство $f(x) < g(x)$, где:

a) $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = 5 - x^2$;

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $g(x) = \sqrt{x-2} - 2$.

190. Решите неравенство, используя метод интервалов:

1) $\frac{\log_5 x - 2}{2 - \log_6 x} > 0$;

4) $\frac{7x^2 - 10x + 3}{\log_{0,9} x - 2} \leq 0$;

2) $\frac{\log_{0,5} x + 2}{2 - \log_3 x} < 0$;

5) $\frac{x^2 - 9x - 10}{\log_{0,9} (x^2 - 9)} \geq 0$;

3) $\frac{\log_{0,4} x - 2}{3x^2 - 10x + 7} > 0$;

6) $\frac{\log_5 (9 - x^2)}{x^2 - 3x - 4} < 0$.

191. Решите неравенство:

1) $\log_{x-3} (7-x) > 0$;

7) $\log_{2x} (x^2 - 5x + 6) < 1$;

2) $\log_{7-x} (x-3) > 0$;

8) $\log_{x-1} (x^2 - 6x + 9) < 1$;

3) $\log_{x-3} (7-x) > 1$;

9) $\log_{x^2 - 6x + 9} (x-1) \leq 1$;

4) $\log_{x+4} \frac{x^2 - 1}{3} < 0$;

10) $\log_{x^2 + 2} (3x + 6) \leq 1$;

5) $\log_{\frac{x^2 - 1}{3}} (x+4) > 0$;

11) $\log_{x^2 + 3x - 4} (x+4) > 0$;

6) $\log_{x-2} (x+10) < 2$;

12) $\log_{x+4} (x^2 + 3x - 4) < 0$.

192. Решите неравенство:

1) $\log_2 \log_{\frac{1}{3}} (x-1) > 0$;

3) $\log_{0,2} \log_2 (2x+3) < -1$;

2) $\log_{0,6} \log_{0,5} (x+1) > 0$;

4) $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 (2x-1) < -1$;

5) $\log_{0,5} \log_3 \frac{x-2}{x-4} > 0$;

6) $\log_3 \log_{0,2} \log_{32} \frac{x-1}{x+5} > 0$.

Решение логарифмических уравнений и неравенств на основе свойств логарифмической функции

192. 2) $\log_{0,6} \log_{0,5} (x+1) > \log_{0,6} 1$. Поскольку логарифмические функции с основаниями 0,6 и 0,5 убывают, а выражение под знаком логарифма может принимать лишь положительные значения, имеем:

$$0 < \log_{0,5} (x+1) < 1; \log_{0,5} 1 < \log_{0,5} (x+1) < \log_{0,5} 0,5;$$

$$1 > x+1 > 0,5; -0,5 < x < 0. 3) \log_{0,2} \log_2 (2x+3) < \log_{0,2} 5.$$

В силу убывания логарифмической функции с основанием 0,2 имеем: $\log_2 (2x+3) > 5$; $\log_2 (2x+3) > \log_2 32$. Поскольку логарифмическая функция с основанием 2 возрастает, имеем: $2x+3 > 32$; $x > 14,5$. 6) Поскольку логарифмические функции с основаниями 3 и 32 возрастают, а с основанием 0,2 убывают, имеем:

$$\log_3 \log_{0,2} \log_{32} \frac{x-1}{x+5} > \log_3 1; \log_{0,2} \log_{32} \frac{x-1}{x+5} > \log_{0,2} 0,2;$$

$$0 < \log_{32} \frac{x-1}{x+5} < \frac{1}{5}; \log_{32} 1 < \log_{32} \frac{x-1}{x+5} < \log_{32} 2; 1 < \frac{x-1}{x+5} < 2;$$

$$\begin{cases} \frac{6}{x+5} < 0, \\ \frac{x+11}{x+5} > 0, \end{cases} x < -11.$$

Уравнение из первой части ЕГЭ профильного уровня, в котором используется определение логарифма

Изредка могут встретиться логарифмы в первой части варианта.

5. Решите уравнение $\log_3(x+1)^2 + \log_3|x+1| = 6$.

Если корней несколько, укажите наименьший из них.

Решение. Решаем квадратное относительно $\log_3|x+1|$ уравнение.

Его корни 2 и -3.

$\log_3|x+1|=2$, $|x+1|=9$, $\underline{x} = -10$ – это наименьший из корней.

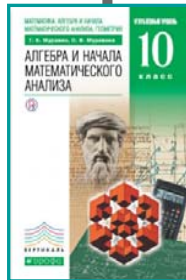
Ответ: -10.

3. В чём отличие свойств логарифмических функций с основаниями большими 1 и меньшими 1?

4. Решите: 1) уравнение $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) = -1$;

2) неравенство $\frac{\log_3 x - 2}{5x + 1} \leq 0$.

5. Какие два случая надо рассмотреть при решении неравенства $\log_x(7 - x) > 0$? Решите это неравенство.



11. Свойства логарифмов

В предыдущем пункте вы научились переходить от показательной формы записи равенств $a^x = b$ к логарифмической $x = \log_a b$ и обратно. Связь этих двух форм записи соотношения между числами a , b и x позволяет получить свойства логарифмов, основываясь на известных свойствах степеней.

Рассмотрим, например, произведение степеней с одинаковым основанием: $a^x a^y$. Пусть $a^x = b$ и $a^y = c$. Перейдём к логарифмической форме: $x = \log_a b$ и $y = \log_a c$, тогда $bc = a^{\log_a b} \cdot a^{\log_a c} = a^{\log_a b + \log_a c}$. От показательной формы равенства $bc = a^{\log_a b + \log_a c}$ перейдём к логарифмической форме:

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c.$$

Заметим, что в левой части формулы **числа b и c** могут быть отрицательными. Тогда формула будет выглядеть так:

$$\log_a(bc) = \log_a |b| + \log_a |c|.$$

Аналогично можно получить ещё два свойства для логарифмов частного и степени.

Свойства логарифмов

логарифм произведения	$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c $
логарифм частного	$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c $
логарифм степени	$\log_a b^p = p \log_a b $

Последнее свойство даёт возможность вывести важную формулу, с помощью которой можно выразить логарифм с одним основанием через логарифм с другим основанием.

Пусть $\log_a b = x$. Перейдём к показательной форме $a^x = b$. Прологарифмируем это равенство по основанию c , т. е. найдём логарифмы с основанием c обеих частей этого равенства: $\log_c a^x = \log_c b$. Применяя к левой части свойство логарифма степени, получим $x \log_c a = \log_c b$ или $x = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, откуда $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Формула перехода логарифма от одного основания к другому

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Полезно запомнить частный случай формулы перехода, когда одно из оснований является степенью другого:

$$\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b.$$

Примечание. Все рассмотренные свойства и формула перехода «работают», конечно, только когда все входящие в них выражения имеют смысл.

Рассмотрим несколько примеров уравнений и неравенств, в решении которых применяются свойства логарифмов.

✓ Пример 1. Решить уравнение

$$\log_2 x = 3 - 4 \log_2 \sqrt{3} + 3 \log_2 3.$$

Решение. Используя свойства логарифма произведения, частного и степени «справа налево», представим правую часть равенства в виде логарифма с основанием 2:

$$\begin{aligned} 3 - 4 \log_2 \sqrt{3} + 3 \log_2 3 &= \log_2 2^3 - \log_2 (\sqrt{3})^4 + \log_2 3^3 = \\ &= \log_2 \frac{2^3 \cdot 3^3}{(\sqrt{3})^4} = \log_2 \frac{8 \cdot 3^3}{3^2} = \log_2 (8 \cdot 3) = \log_2 24. \end{aligned}$$

Мы пришли к равенству $\log_2 x = \log_2 24$. **Потенцируя** это равенство, т. е. находя число по известному его логарифму, получим $x = 24$.

Ответ: 24.

✓ **Пример 2.** Решить уравнение $\log_3 \frac{x-2}{x+2} + \log_3 (x^2 - 4) = 4$.

Решение. Выражения, стоящие под знаками логарифмов, положительны при $x < -2$ и при $x > 2$. Этим условием определяется ОДЗ данного уравнения. Для всех значений x из ОДЗ к левой части уравнения можно применить свойство логарифма произведения:

$$\begin{aligned} \log_3 \frac{x-2}{x+2} + \log_3 (x^2 - 4) &= \log_3 \left(\frac{x-2}{x+2} (x^2 - 4) \right) = \\ &= \log_3 \frac{(x-2)(x-2)(x+2)}{x+2} = \log_3 (x-2)^2. \end{aligned}$$

По определению логарифма от равенства $\log_3 (x-2)^2 = 4$ приходим к равенству $(x-2)^2 = 3^4$.

Далее имеем $x-2 = \pm 9$, $x_1 = 11$, $x_2 = -7$. Оба найденных числа входят в ОДЗ, а значит, являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $-7; 11$.

Примечание 1. В левой части уравнения $\log_3 (x-2)^2 = 4$ можно было воспользоваться свойством логарифма степени: $\log_3 (x-2)^2 = 2 \log_3 |x-2|$ (модуль необходимо поставить, чтобы не потерять корни, при которых выражение $x-2$ принимает отрицательные значения). Вообще, полезно иметь в виду, что

$$\log_a b^{2n} = 2n \log_a |b|, \text{ где } n \text{ — целое число.}$$

Примечание 2. Свойствами логарифмов в преобразованиях выражений с переменными следует пользоваться осторожно, поскольку они могут изменить область допустимых значений переменных. Так, например, применив в левой части рассмотренного уравнения свойства логарифмов частного и произведения, мы получили бы уравнение

$$\begin{aligned} \log_3 (x-2) - \log_3 (x+2) + \log_3 (x-2) + \log_3 (x+2) &= 4, \\ 2 \log_3 (x-2) &= 4, \end{aligned}$$

ОДЗ которого $x > 2$ является лишь частью ОДЗ исходного уравнения. Продолжая решение, получаем:

$$\log_3 (x-2) = 2, \quad x-2 = 9, \quad x = 11.$$

При таком решении корень -7 оказался «съеден» уменьшением или, как говорят математики, *сужением* ОДЗ. Понятно, что потерю корней нельзя обнаружить, проверяя оставшиеся корни. При решении уравнений желательно *избегать сужения области допустимых значений*.

✓ **Пример 3.** Решить уравнение $2 \log_x 5 - 3 \log_5 x = 1$.

Решение. Приведём логарифмы левой части уравнения к одному основанию:

$$\log_x 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 x} = \frac{1}{\log_5 x}, \quad \frac{2}{\log_5 x} - 3 \log_5 x = 1,$$

поскольку $x \neq 1$, $\log_5 x \neq 0$ и умножение уравнения на $\log_5 x$ не нарушает равносильность преобразования

$$3 \log_5^2 x + \log_5 x - 2 = 0.$$

Решая полученное уравнение как квадратное относительно $\log_5 x$, получаем:

$$\log_5 x_1 = -1, \quad x_1 = \frac{1}{5}; \quad \log_5 x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = \sqrt[3]{25}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}; \sqrt[3]{25}$.

Упражнения

193. 1) Из каких свойств степеней получаются формулы:

а) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$; б) $\log_a b^p = p \log_a b$?

2) ● Выведите эти формулы.

194. Вычислите значение выражения:

1) $\log_6 2 + \log_6 3$; 3) $\log_{\sqrt{3}} 12 - \log_{\sqrt{3}} 4$;

2) $\log_{\frac{1}{15}} 25 + \log_{\frac{1}{15}} 9$; 4) $\log_2 12 + \log_{0,5} 3$;

5) ● $\log_5 10 + \log_{\sqrt{5}} 100 - \log_{\sqrt[3]{5}} 0,1 + \log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} 16$;

$$6) \bullet \log_3 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 5 \cdot \log_{25} 27;$$

$$7) \bullet \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9;$$

$$8) * \log_{\sqrt{2}-1} (\sqrt{3} - \sqrt[4]{8}) - \log_{\sqrt{2}+1} (\sqrt{3} + \sqrt[4]{8}).$$

195. Зная, что $\log_6 2 = a$, выразите через a выражение:

$$1) \log_6 16; \quad 4) \log_{\sqrt[4]{216}} 0,125; \quad 7) \bullet \log_3 2;$$

$$2) \log_{\sqrt{6}} 2; \quad 5) \circ \log_2 6; \quad 8) \bullet \log_2 3;$$

$$3) \log_{\sqrt[5]{36}} 8; \quad 6) \circ \log_6 3; \quad 9) * \log_{48} 54.$$

196. $\circ$ Найдите:

$$1) \lg 56, \text{ зная, что } \lg 2 = a \text{ и } \log_2 7 = b;$$

$$2) \log_{30} 8, \text{ зная, что } \lg 5 = a \text{ и } \lg 3 = b.$$

197. $\circ$ Найдите число a , зная, что:

$$1) \log_3 a = 3 + 2 \log_{\sqrt{3}} 7 - \frac{1}{2} \log_9 16 - 4 \log_3 7;$$

$$2) \log_2 a = \log_4 7 + 2 \log_{\sqrt{2}} 3 + 0,5 \log_{0,5} 7 - 2.$$

198. $\bullet$ Найдите натуральное число n такое, что:

$$1) 3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^8 \cdot \dots \cdot 3^{3n-1} = 81^{10};$$

$$2) \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_n (n+1) = 10.$$

199. $\bullet$ Не вычисляя значений логарифмов, докажите, что

$$2 < \log_3 2 + \log_2 3 < 3.$$

200. $\bullet$ Найдите наименьшее значение выражения

$$|\log_x 7 + \log_7 x|.$$

201. $\bullet$ Сравните числа:

$$1) \log_7 8 \text{ и } \log_8 9;$$

$$2) \log_7 6 \text{ и } \log_8 7.$$

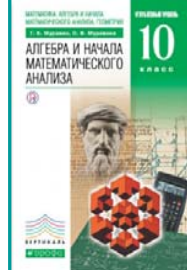
202. При решении следующих уравнений называйте свойства логарифмов, которые вы используете в преобразованиях, и подумайте, изменяют ли выполняемые преобразования ОДЗ (и если да, то как):

$$1) \log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11;$$

$$2) \log_5 (3x-2) + \log_5 (x-7) = 2 + \log_5 2;$$

$$3) \log_2 (4 \cdot 3^x - 6) - \log_2 (9^x - 6) = 1;$$

$$4) \log_{\sqrt{5}} (4^x - 6) - \log_{\sqrt{5}} (2^x - 2) = 2;$$



$$5) \log_x 9 + \log_{x^2} 729 = 10;$$

$$6) \circ \log_{10} x + \log_{\sqrt{10}} x + \log_{\sqrt[3]{10}} x + \dots + \log_{\sqrt[10]{10}} x = 5,5;$$

$$7) \circ \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\sqrt[4]{3}} x + \log_{\sqrt[6]{3}} x + \dots + \log_{\sqrt[16]{3}} x = 36;$$

$$8) \circ \lg (5^x + x - 20) = x - x \lg 2;$$

$$9) \circ 3 \log_5 2 + 2 - x = \log_5 (3^x - 5^{2-x});$$

$$10) \circ \log_3 (81^x + 3^{2x}) = 3 \log_{27} 90;$$

$$11) \circ \log_{1-x} 3 - \log_{1-x} 2 - 0,5 = 0;$$

$$12) \circ \log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0;$$

$$13) \circ 2 \log_x 27 - 3 \log_{27} x = 1;$$

$$14) \circ \log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2;$$

$$15) \bullet \log_3 x \cdot \log_9 x \cdot \log_{27} x \cdot \log_{81} x = \frac{2}{3};$$

$$16) \bullet 3x - \log_6 8^x = \log_6 (3^{3x} + x^2 - 9);$$

$$17) \bullet \log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3;$$

$$18) \bullet \log_x (9x^2) \cdot \log_x^2 x = 4.$$

203. Решите уравнение, логарифмируя обе его части:

$$1) x^{\lg x} = 10\,000; \quad 7) x^{\frac{\lg x + 5}{3}} = 10^{5 + \lg x};$$

$$2) x^{\log_2 x + 2} = 8; \quad 8) 10^{2x+1} = 7^x;$$

$$3) x^{\log_3 x - 4} = \frac{1}{27}; \quad 9) 2^x = 3^{x-2};$$

$$4) x^{1 - \lg x} = 0,01; \quad 10) \circ 5^{x+1} = 0,2 \cdot 3^{2x+1};$$

$$5) x^{\log_3 3x} = 9; \quad 11) \bullet x^{\sqrt[n]{x}} = (\sqrt[n]{x})^x \text{ при } x > 0;$$

$$6) x^{\log_2 x} = 4x; \quad 12) \bullet x^{\log_9 (x+3)} = 5^{\log_3 x}.$$

204. $\bullet$ Решите устно уравнение

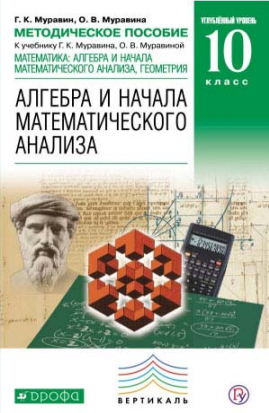
$$2^{\log_3 x^2} \cdot 5^{\log_3 x} = 400.$$

205. 1) Сравните выражения $a^{\log_b c}$ и $c^{\log_b a}$.

2) На основании сформулированного вывода решите уравнение:

$$a) 5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5};$$

$$б) 25^{\lg x} = 5 + 4x^{\lg 5}.$$



Решение логарифмических уравнений и неравенств на основе свойств логарифмов

Свойства	Краткая формулировка свойства
$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c $	Логарифм произведения равен сумме логарифмов
$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c $	Логарифм частного равен разности логарифмов
$\log_a b^p = p \log_a b $	Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$	Переход к другому основанию логарифма
--	---------------------------------------

$\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b$	Вынесение показателя степени основания
---------------------------------------	--

Ученикам предлагается проанализировать задания № 194 (1—5) на предмет возможности использования формул логарифмов. В этом им могут помочь следующие вопросы: одинаковые ли основания логарифмов в задании? С какой частью таблицы будете работать? Какую формулу из таблицы примените? Что в результате получите? Запишите вычисления.

Ученик должен прочитать краткую формулировку соответствующей формулы, назвать получившееся выражение и сказать, чему равно его значение.

Затем фронтально выполняются задания 1 и 2 из № 195, задания 3 и 4 предлагаются школьникам для самостоятельной работы.

Решение.

$$\text{№ 195 (3). } \log_{\sqrt[5]{36}} 8 = \log_{6^{\frac{2}{5}}} 2^3 = 3 \cdot \frac{5}{2} \log_6 2 = 7,5a;$$

$$\begin{aligned} \text{№ 195 (4). } \log_{\sqrt[4]{216}} 0,125 &= \log_{6^{\frac{3}{4}}} 2^{-3} = \\ &= -3 \cdot \frac{4}{3} \log_6 2 = -4a. \end{aligned}$$

Решение логарифмических уравнений и неравенств на основе свойств логарифмов



206. Решите уравнение:

1) $2\lg x^2 - \lg^2(-x) = 4$;

2) $3\lg x^2 - \lg^2(-x) = 9$.

207. Решите неравенство:

1) $\log_{\pi}(x+27) - \log_{\pi}(16-2x) < \log_{\pi} x$;

2) $\log_{\sqrt{3}-1}(2x+3) + \log_{\sqrt{3}-1}(4-x) < \log_{\sqrt{3}-1}(2-3x)$;

3) $\log_{\pi-3}(2-7x) - \log_{\pi-3}(2-3x) > \log_{\pi-3}(x+4)$;

4) $\log_3(3^x-1) \cdot \log_{\frac{1}{3}}\left(3^{x-2} - \frac{1}{9}\right) > -3$;

5) $\log_3(4^x+1) + \log_{4^x+1} 3 > 2,5$;

6) $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x \leq 0$;

7) $\log_x(x+1) < \log_{\frac{1}{x}}(2-x)$;

8) $\log_2^2(-\log_2 x) + \log_2(\log_2^2 x) \geq 3$;

9) $\log_x \log_2(4^x-12) \leq 1$;

10) $\log_{0,5} \log_2 \log_{x-1} 9 > 0$;

11) $\log_3 \log_{x^2} \log_{x^2} x^4 > 0$;

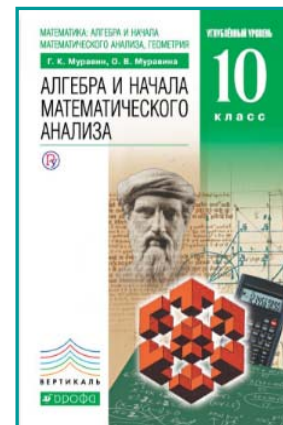
12) $\frac{(2x-1)^2}{8 \cdot 7^x - 4^{x \log_2 7} - 7} \leq 0$;

13) $\frac{81^x - 12 \cdot 25^{x \log_3 7} + 27}{(4x-3)^4} \leq 0$.

208. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 25^x - 30 \cdot 5^x + 125 \geq 0, \\ \log_x(x-1) \cdot \log_x(x+1) \leq 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 \log_{25} x \geq \log_{25} x^3 + x \log_5 x, \\ 5^x + 5^{-x} \geq \frac{17}{4}; \end{cases}$



Затем можно разобрать с классом решение № 207 (4).

Поиск решения неравенства.

$$\log_3(3^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{3}}\left(3^{x-2} - \frac{1}{9}\right) > -3.$$

— С чего начнете решение неравенства? [С приведения логарифмов к одному основанию.]

— Давайте приведем неравенство к логарифмам с основанием 3.

— Какое свойство логарифмов примените?

$$\left[\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b.\right]$$

— Как примените это свойство?

$$\left[\log_{3^{-1}}\left(3^{x-2} - \frac{1}{9}\right) = -\log_3\left(3^{x-2} - \frac{1}{9}\right).\right]$$

$$-\log_3(3^x - 1) \cdot \log_3\left(3^{x-2} - \frac{1}{9}\right) > -3.$$

— Как дальше предлагаете решать неравенство? [Умножим неравенство на -1 , при этом знак неравенства изменится на противоположный.]

$$\log_3(3^x - 1) \cdot \log_3\left(3^{x-2} - \frac{1}{9}\right) < 3.$$

— Как преобразовать второй логарифм? [Нужно представить $3^{x-2} = \frac{3^x}{9}$ и вынести общий множитель $\frac{1}{9}$ за скобку.]

$$\log_3(3^x - 1) \cdot \log_3\left(\frac{1}{9}(3^x - 1)\right) < 3.$$

— Какое свойство примените для преобразования второго логарифма? [Логарифм произведения.]

$$\log_3(3^x - 1) \cdot \left(\log_3 \frac{1}{9} + \log_3(3^x - 1)\right) < 3,$$

$$\log_3(3^x - 1) \cdot (\log_3(3^x - 1) - 2) < 3,$$

$$\log_3^2(3^x - 1) - 2\log_3(3^x - 1) - 3 < 0.$$

— Какое неравенство получилось? [Квадратное неравенство относительно $\log_3(3^x - 1)$.]

— Сделайте замену переменных: $y = \log_3(3^x - 1)$ и решите квадратное неравенство

$$y^2 - 2y - 3 < 0, -1 < y < 3.$$

— Запишите логарифмическое неравенство относительно x . Меняются ли знаки неравенства при переходе от логарифмов к аргументам?

$$-1 < \log_3(3^x - 1) < 3, \frac{1}{3} < 3^x - 1 < 27.$$

— Решите показательное неравенство. Меняются ли знаки неравенства при переходе от показателей степени к основанию? Нужно ли делать проверку? Нужно ли искать ОДЗ?

$$\frac{4}{3} < 3^x < 28, \log_3 \frac{4}{3} < x < \log_3 28.$$

Записи ведутся учителем на доске в результате обсуждения с классом каждого шага. Полезно предложить школьникам сравнить решение на доске с решением, помещенным в учебнике. При этом задать следующие вопросы.

1. К какому основанию приводятся логарифмы?
2. Изменилось ли логарифмическое неравенство после приведения к одному основанию?
3. Изменилось ли квадратное неравенство относительно логарифма?
4. Изменилось ли его решение?
5. Изменился ли ответ?
6. Какой вывод можно сделать?

Четвертый урок можно провести как урок-практикум. После традиционного обсуждения домашней работы предложить школьникам заранее записанные на доске уравнения.

Решите уравнение:

$$1) 0,5 \log_x \frac{1}{25} + 1 = \frac{2}{3};$$

$$2) (2 - \log_3 x) \log_3 0,4 = \log_3^2 2 - \log_3^2 5;$$

$$3) \log_4 \log_3 \log_2 x = 0,5;$$

$$4) \frac{\log_4(2x^2 - 4x + 1)}{\log_4(6x - 11)} = 1;$$

$$5) \log_{3-4x}(1 - 3x - x^2) = \log_{3-4x}(x^2 + 2x - 2);$$

$$6) \log_{x^2+3x+1}(3 - 4x) = \log_{4-2x-x^2}(3 - 4x);$$

$$7) 1 \log_5(7x - 10) = 2 \log_5 x;$$

$$8) \log_{x+20}(2x - \sqrt{x+20}) = 0,5;$$

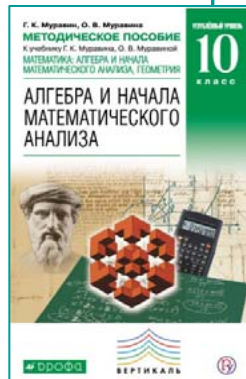
$$9) \log_{\frac{2}{3}}(x - 1) + \log_{\frac{2}{3}} x = \log_6 2 + \log_6 18;$$

$$10) \log_2^2 x + 2 \log_2 x = 3;$$

$$11) \log_{1,2}(x - 5) = \frac{1}{2} \log_{1,2}(x + 1).$$

Можно дополнить список и другими уравнениями.

Ученик поднимает руку, выбирает уравнение из списка и рассказывает план его решения. После этого учитель может предложить ему или другому ученику решить данное уравнение на доске, на своем месте или на первой парте. Все уравнения должны быть задействованы. В ходе проверки решения полезно обсудить следующие вопросы.



1. Какими свойствами логарифмов вы воспользовались в ходе решения?

2. Появились ли в ходе решения посторонние корни? Объясните причину их появления.

3. Нужно ли делать проверку после нахождения корней?

4. Какие условия нужно учитывать, решая логарифмическое уравнение, если неизвестное находится: а) в основании логарифма; б) под знаком логарифма?

После завершения работы ученики класса задают выступающим вопросы и высказывают свои замечания и предложения.

После этого обсуждается № 205. Доказательство равенства $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ фиксируется на доске, а уравнение б) решается школьниками самостоятельно.

Затем рассматривается № 206 (1). В этом примере x может принимать только отрицательные значения, так как $-x > 0$. Поэтому уравнение переписывается в виде $\lg^2(-x) - 4\lg(-x) + 4 = 0$, откуда: $\lg(-x) = 2$, $-x = 100$, $x = -100$.

При подведении итогов урока полезно сформулировать план решения логарифмических уравнений.

1. Привести к логарифмам с одним основанием.

2. Применить определение логарифма или свойства логарифмов.

3. Если нужно, сделать замену переменных и свести уравнение к квадратному.

4. Решить простейшее логарифмическое уравнение.

5. Найти ОДЗ уравнения или сделать проверку.

Домашнее задание. Проанализировать задания № 202—206, используя разделы «Советы» и «Решения» учебника. Сформулировать вопросы по решениям.

Логарифмические неравенства на ЕГЭ профильного уровня



15. Решите неравенство $\log_2(x+1) > \log_{x+1} 16$.

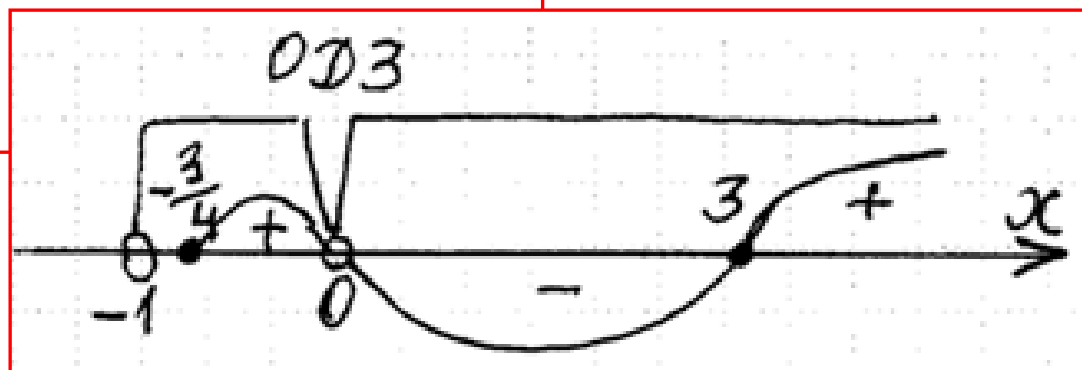
Решение. ОДЗ: $x > -1, x \neq 0$.

$$\log_2(x+1) > \frac{\log_2 16}{\log_2(x+1)}, \frac{\log_2^2(x+1) - 4}{\log_2(x+1)} > 0,$$

$$\frac{(\log_2(x+1) - 2)(\log_2(x+1) + 2)}{\log_2(x+1)} > 0.$$

Нули числителя: 3; $-\frac{3}{4}$, нуль знаменателя 0.

Ответ: $\left(-\frac{3}{4}; 0\right) \cup (3; 0)$.



Логарифмические неравенства на ЕГЭ профильного уровня



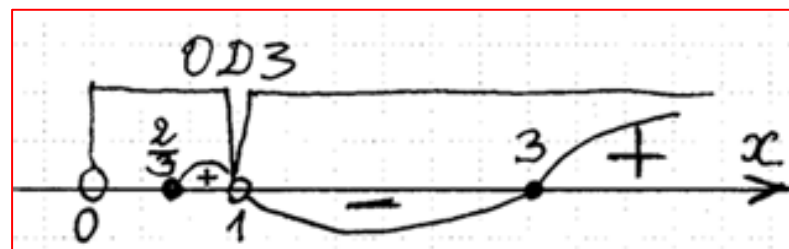
15. Решите неравенство $\log_x \left(x + \frac{1}{3} \right) \leq \log_{\sqrt{2x+3}} \left(x + \frac{1}{3} \right)$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$. Перейдем к логарифмам по основанию 10:

$$\frac{\lg \left(x + \frac{1}{3} \right)}{\lg x} \leq \frac{\lg \left(x + \frac{1}{3} \right)}{\lg \sqrt{2x+3}}; \frac{\lg \left(x + \frac{1}{3} \right) (\lg \sqrt{2x+3} - \lg x)}{\lg x \cdot \lg \sqrt{2x+3}} \geq 0;$$

Умножим числитель и знаменатель на 2, чтобы уйти от радикала:

$$\frac{\lg \left(x + \frac{1}{3} \right) \left(\lg \frac{2x+3}{x^2} \right)}{\lg x \cdot \lg(2x+3)} \geq 0.$$



Нули числителя: $\frac{2}{3}$, 3, с учетом положительности x , нуль знаменателя 1.

Ответ. $\left[\frac{2}{3}; 1 \right) \cup [3; +\infty)$.

Логарифмическое уравнение с параметром на ЕГЭ профильного уровня



18. Найдите все значения a , для которых при любом положительном b уравнение $a \log_{\left(\frac{1}{x}-2\right)} 4 = \log_2 \left(\frac{1}{x}-2\right) - b = 0$ имеет хотя бы одно решение, меньшее $\frac{1}{3}$.

Решение. Найдём ОДЗ:
$$\begin{cases} \frac{1}{x}-2 > 0 \\ \frac{1}{x}-2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-2x}{x} > 0 \\ \frac{1}{x} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ x \neq \frac{1}{3} \end{cases} \quad |$$

Стандартно приводим логарифмы к одному основанию

$$\frac{2a}{\log_2 \left(\frac{1}{x}-2\right)} = \log_2 \left(\frac{1}{x}-2\right) - b, \quad \log_2^2 \left(\frac{1}{x}-2\right) - b \log_2 \left(\frac{1}{x}-2\right) - 2a = 0$$

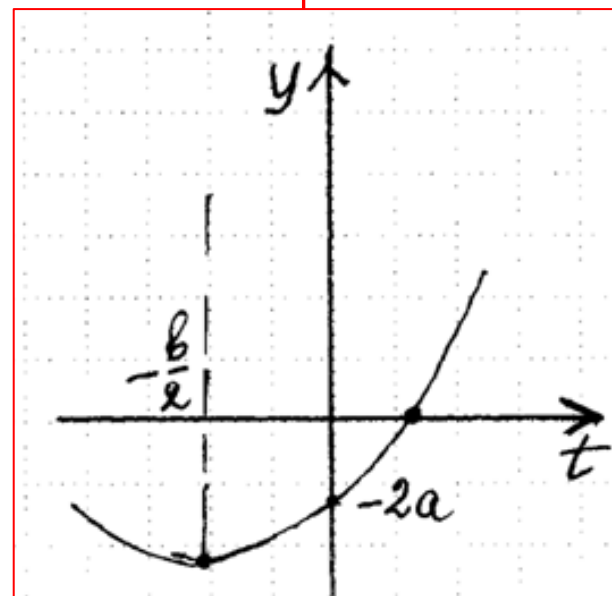
Получили квадратное уравнение относительно $\log_2 \left(\frac{1}{x}-2\right)$.

Оно должно иметь корень при $x < \frac{1}{3}$. $\frac{1}{x} > 3$, $\frac{1}{x}-2 > 1$, $\log_2 \left(\frac{1}{x}-2\right) > 0$

Обозначим, $\log_2 \left(\frac{1}{x}-2\right) = t$ и рассмотрим квадратичную функцию $y = t^2 - bt - 2a$.

Ветви ее графика направлены вверх, а вершина, поскольку $b > 0$, расположена в левой координатной полуплоскости. Правая ветвь параболы пересекает ось абсцисс правее $t=0$, значит при $t=0$, $y < 0$. Получаем $-2a < 0$, $a > 0$.

Ответ: $a > 0$



Комплексные задания с логарифмами в тригонометрии

269. Найдите все углы φ из промежутка $[0; 2\pi]$, для которых верно равенство:

1) $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$;

4) $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $\operatorname{ctg} \varphi = \sqrt{3}$;

5) $\lg \operatorname{tg} \varphi = \lg \sin \varphi - \lg \cos \varphi$;

3) $\operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{3}$;

6) $\lg \operatorname{ctg} \varphi = \lg \cos \varphi - \lg \sin \varphi$.

270. Укажите все углы φ , для которых не имеет смысла выражение:

1) $\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}$;

3) $\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi - 1}$;

5) $\lg \operatorname{tg} \varphi$;

2) $\frac{1}{\operatorname{ctg} \varphi}$;

4) $\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi + 1}$;

6) $\lg \operatorname{ctg} \varphi$.



Контрольные вопросы и задания

1. Как преобразовать разность косинусов в произведение?

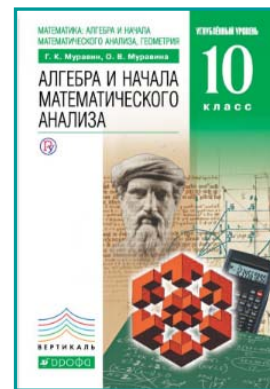
2. Выведите формулу $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$.

3. Вычислите:

а) $\cos 78^\circ - \cos 42^\circ$;

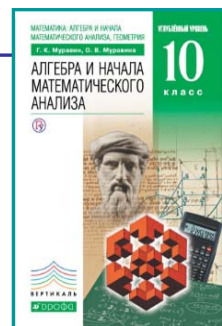
б) $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$;

в) $\log_{\frac{1}{2}} \sin 70^\circ + \log_{\frac{1}{2}} \sin 50^\circ + \log_{\frac{1}{2}} \sin 10^\circ$.



Комплексные задания с логарифмами

в разделе «Повторение»



524. Является ли равносильным преобразование, связанное с заменой выражения а) выражением б)?

Если преобразование неравносильно, укажите причину неравносильности. Запишите дополнительные условия, выполнение которых следует проверить, чтобы избежать появления посторонних решений, или какие случаи следует дополнительно рассмотреть, чтобы не потерять решения.

- | | |
|---------------------------------|----------------------------|
| 11) а) $2 \lg f(x)$; | б) $\lg f^2(x)$; |
| 12) а) $\lg f^3(x)$; | б) $3 \lg f(x)$; |
| 13) а) $\ln(f(x) \cdot g(x))$; | б) $\ln f(x) + \ln g(x)$. |

525. Является ли равносильным преобразование уравнения а) в уравнение б)?

Если преобразование неравносильно, укажите причину неравносильности. Запишите дополнительные условия,

выполнение которых следует проверить, чтобы избежать появления посторонних решений, или случаи, которые следует дополнительно рассмотреть, чтобы не потерять решения.

- 4) а) $\log_{7-x}(x^3 + 9) = \log_{7-x}((x+3)(x-1)^2)$;
 б) $x^3 + 9 = (x+3)(x-1)^2$;
- 5) а) $|\sin x| \cos x = \sin^2 x$; б) $\cos x = \sin x$;
- 6) а) $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$;
 б) $\log_{\cos x} \sin x + \frac{1}{\log_{\cos x} \sin x} = 2$;
- 7) а) $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin |x|}$; б) $\operatorname{tg}^2 |x| = \frac{1 - \cos |x|}{1 - \sin |x|}$;
- 8) а) $2 \sin 2x + \cos 2x + 1 = 0$;
 б) $\frac{4 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 1 = 0$.

Завершите решения уравнений 1), 2), 4)—8).

536. Обоснуйте следующие равносильности:

- $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$
- $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x); \end{cases}$
- $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x); \end{cases}$
- $\log_{x-3} f(x) > \log_{x-3} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 4, \\ 0 < f(x) < g(x), \\ x > 4, \\ f(x) > g(x) > 0; \end{cases}$
- $\lg(f(x) \cdot g(x)) = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg f(x) + \lg g(x) = 5, \\ \lg(-f(x)) + \lg(-g(x)) = 5; \end{cases}$
- $\log_{g(x)} f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (f(x) - 1)(g(x) - 1) \geq 0, \\ x \in \text{ОДЗ}; \end{cases}$
- $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0, \\ h(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ h(x) = 0, \\ g(x) = 0, \\ h(x) = 0. \end{cases}$

537. 1) Обоснуйте равносильность

$$\log_{g(x)} f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (f(x) - 1)(g(x) - 1) > 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

2) Используйте её в решении неравенств 5 и 11 из № 191.

538. Запишите, чему равносильно неравенство:

- $\log_{g(x)} f(x) < 0$ и решите с помощью этой равносильности неравенства 4 и 12 из № 191;

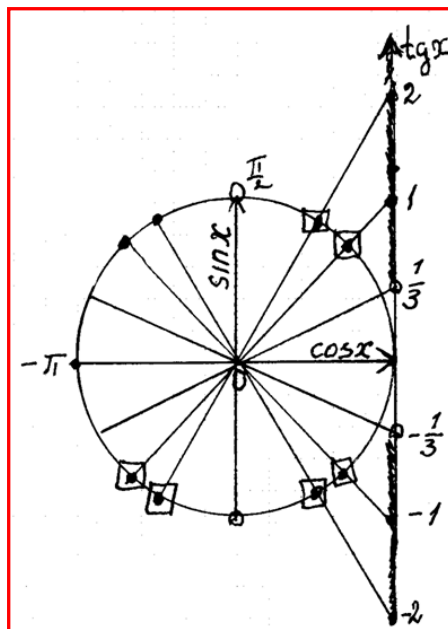
Комплексные задания с логарифмами на ЕГЭ профильного уровня

13. а) Решите уравнение $\log_2(3|\sin x| - |\cos x|) + \log_2|\cos x| = 0$;

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. а) $(3|\sin x| - |\cos x|)|\cos x| = 1$; $\operatorname{tg}^2 x - 3|\operatorname{tg} x| + 2 = 0$; $|\operatorname{tg} x| = 1$ или $|\operatorname{tg} x| = 2$

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{4} + \pi n$, $\pm \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{4}$; $\pm \frac{\pi}{4}$; $\pm \operatorname{arctg} 2$; $\operatorname{arctg} 2 - \pi$.



Исторический материал



В предыдущем пункте был поставлен вопрос о том, как вычислять значения логарифмов. Проще всего значение логарифма можно найти с помощью инженерного калькулятора. Как правило, калькуляторы позволяют непосредственно находить значения логарифмов на выбор по одному из оснований 10 или $e \approx 2,7$ (более близкое знакомство с числом e ожидает вас в следующем классе).

Десятичные логарифмы (логарифмы с основанием 10) широко применялись в вычислительной практике в докомпьютерный период, а логарифмы с основанием e , так называемые **натуральные логарифмы**, используются в различных научных расчётах. Широкое распространение логарифмов с основаниями 10 и e дало им право на специальные обозначения:

$$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a.$$

На инженерном калькуляторе для вычисления значения десятичного логарифма имеется клавиша «log», для натурального логарифма — клавиша «ln». А для вычисления логарифмов с другими основаниями есть формула перехода.

Пусть, например, нужно найти значение $\lg 23,5$. Набираем число 23,5 и нажимаем клавишу «log». Дисплей калькулято-

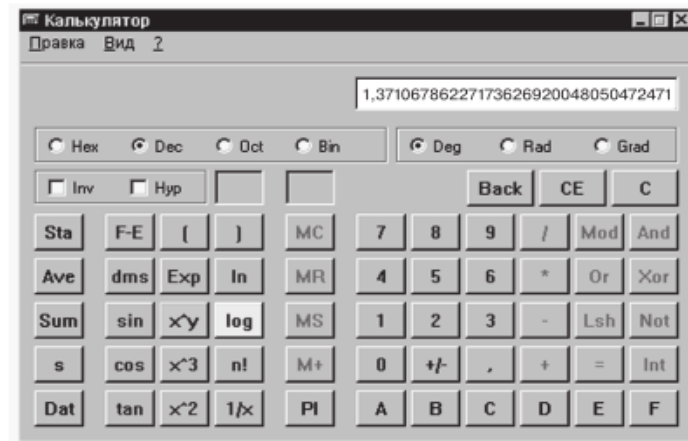


Рис. 63

ра покажет число 1,37106786227173626920048050472471 (рис. 63), которое округляется с нужной точностью.

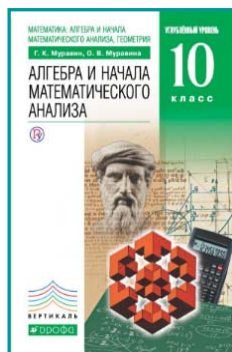
Логарифмы, как средство для упрощения вычислений, были изобретены в начале XVII в. Титанический труд швейцарца И. Бюрги, шотландца Д. Непера, англичанина Г. Бригса и голландца А. Влакка, составивших многозначные логарифмические таблицы, более 300 лет помогал людям выполнять различные вычисления. «Открытие логарифмов, — как сказал знаменитый французский математик, физик и астроном Пьер Лаплас, — удлинит человеческую жизнь, если оценивать её не числом прожитых лет, а количеством сделанной работы».

Генри Бригс составил 14-значные логарифмические таблицы. С принципом их использования можно познакомиться на примере *двузначной таблицы десятичных логарифмов*, рассмотренной на с. 100.

В этой таблице с двумя входами указаны значения десятичных логарифмов чисел от 1 до 9,9. Пусть, например, нужно найти $\lg 6,4$. Значение этого логарифма находим на пересечении строки 6 и столбца 0,4. Оно равно $\lg 6,4 \approx 0,81$.

Вычислим корень уравнения $2^x = 3$, с которого в предыдущем пункте был начат разговор о логарифмах:

$$x = \log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2} \approx \frac{0,48}{0,30} = 1,6.$$



Исторический материал в учебнике



	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1	0,00	0,04	0,08	0,11	0,15	0,18	0,20	0,23	0,26	0,28
2	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40	0,41	0,43	0,45	0,46
3	0,48	0,49	0,51	0,52	0,53	0,54	0,56	0,57	0,58	0,59
4	0,60	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65	0,66	0,67	0,68	0,69
5	0,70	0,71	0,72	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,76	0,77
6	0,78	0,79	0,79	0,80	0,81	0,81	0,82	0,83	0,83	0,84
7	0,85	0,85	0,86	0,86	0,87	0,88	0,88	0,89	0,89	0,90
8	0,90	0,91	0,91	0,92	0,92	0,93	0,93	0,94	0,94	0,95
9	0,95	0,96	0,96	0,97	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99	1,00

Не слишком большая точность, но ведь и таблица двузначная.

В таблице нет значений логарифмов чисел, больших 9,9 и меньших 1. Однако таблицу можно использовать и для них. Так, например,

$$\lg 438 = \lg (4,38 \cdot 100) = \lg 4,38 + \lg 100 \approx \lg 4,4 + 2 \approx 0,64 + 2 = 2,64 \approx 2,6.$$

$$\lg 0,078 = \lg (7,8 \cdot 10^{-2}) = \lg 7,8 + \lg 10^{-2} \approx 0,89 - 2 = -1,11 \approx -1,1.$$

Примечание. Заметим, что в обоих случаях число, стоявшее под знаком логарифма, представлялось в стандартном виде: $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$ и n — целое. При этом сам логарифм представлялся в виде суммы своей дробной и целой частей:

$$\lg (a \cdot 10^n) = \lg a + n.$$

Дробную часть десятичного логарифма называют *мантиссой*, а целую — *характеристикой*.

Покажем теперь, как использовались логарифмы в вычислении значений выражений.

Пример 4. Вычислить приближённо $\frac{0,63^2}{0,57^5 \cdot \sqrt{23}}$.

Решение. Обозначим буквой x данное выражение:
 $x = \frac{0,63^2}{0,57^5 \cdot \sqrt{23}}$ и прологарифмируем полученное равенство по основанию 10:

$$\begin{aligned} \lg x &= \lg \frac{0,63^2}{0,57^5 \cdot \sqrt{23}} = \lg 0,63^2 - \lg (0,57^5 \cdot \sqrt{23}) = \\ &= 2 \lg 0,63 - \left(5 \lg 0,57 + \frac{1}{2} \lg 23 \right) = 2 \lg 0,63 - 5 \lg 0,57 - \frac{1}{2} \lg 23. \end{aligned}$$

Найдём значения логарифмов:

$$\begin{aligned} \lg 0,63 &\approx 0,80 - 1 = -0,20, \quad \lg 0,57 \approx 0,76 - 1 = -0,24, \\ \lg 23 &\approx 0,36 + 1 = 1,36 \end{aligned}$$

и подставим их в полученное выражение

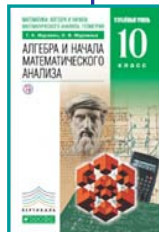
$$\begin{aligned} \lg x &\approx 2 \cdot (-0,20) - 5 \cdot (-0,24) - \frac{1}{2} \cdot 1,36 \approx \\ &\approx -0,40 + 1,20 - 0,68 = 0,12. \end{aligned}$$

Наиболее близкие из значений, имеющих в таблице 0,11 и 0,15, соответствуют $\lg 1,3$ и $\lg 1,4$, значит,

$$\lg 1,3 < \lg x < \lg 1,4 \text{ и } 1,3 < x < 1,4.$$

С помощью двузначной таблицы и нельзя было получить более чем две значащие цифры, однако все вычисления были устными. Проверая результат с помощью калькулятора, находим $x \approx 1,375$.

Ответ: $\approx 1,375$.



209. 1) С помощью двузначной таблицы логарифмов найдите приближённые значения выражений:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{7,2^{0,4}}{\sqrt{3,9}}; \quad \text{в) } \frac{0,043^3 \sqrt[3]{78}}{12}; \quad \text{д) } \frac{0,63^2}{0,83^5 \sqrt{13}}; \\ \text{б) } \frac{4,8^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{5,4}^{-3}}; \quad \text{г) } \frac{\sqrt[3]{441}}{0,78^5 \sqrt{81}}; \quad \text{е) } 14^{0,85} - \frac{\sqrt[5]{58}}{\sqrt[7]{0,67}}. \end{aligned}$$

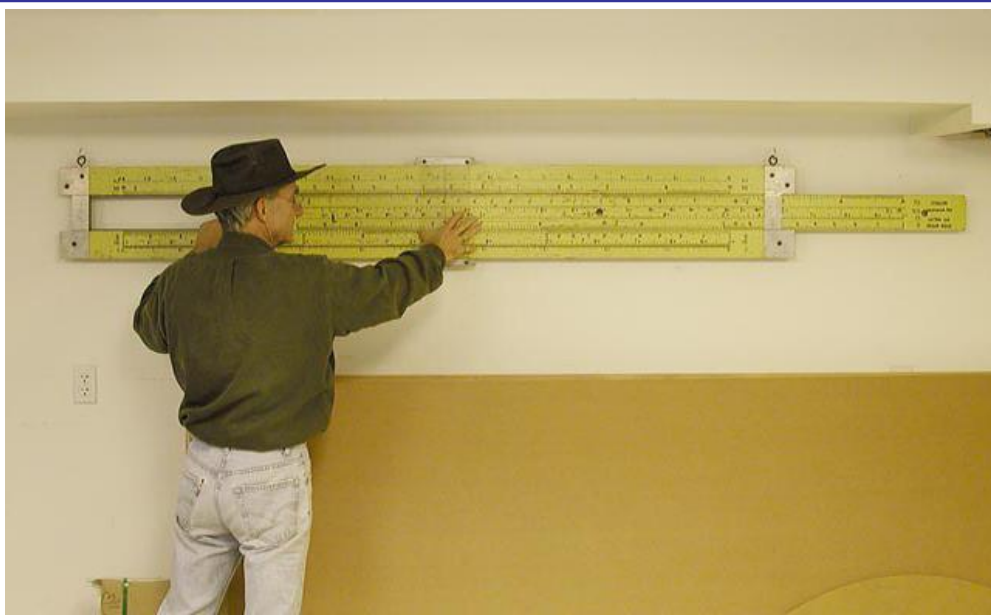
2) Найдите с помощью калькулятора значения этих выражений с четырьмя верными значащими (кроме нулей в начале записи числа) цифрами.

Исторический материал на уроке

Логарифмы, как средство для упрощения вычислений, были изобретены в начале XVII в. Собственно упрощение достигается за счёт замены умножения чисел сложением, а деления - вычитанием их логарифмов.

На этом основано действие логарифмической линейки – главного вычислительного инструмента учёных и инженеров до конца прошлого века.

На подвижной и неподвижной шкалах линейки нанесены логарифмы чисел. Сдвигая шкалу, складываем логарифмы.



История развития логарифмов



Титанический труд швейцарца И. Бюрги, шотландца Д. Непера, англичанина Г. Бригса и голландца А. Влакка, составивших многозначные логарифмические таблицы, более 300 лет помогал людям выполнять различные вычисления. *«Открытие логарифмов, — как сказал знаменитый французский математик, физик и астроном Пьер Лаплас, — удлинило человеческую жизнь, если оценивать её не числом прожитых лет, а количеством сделанной работы».* Собственно поэтому мы о них сейчас и вспоминаем из чувства благодарности.

Генри Бригс составил 14-значные логарифмические таблицы. Таблицы В.М.Брадиса, которыми пользовались школьники России до эпохи калькуляторов и компьютеров, были 4-значными.



Г.Бригс (1561-1630)

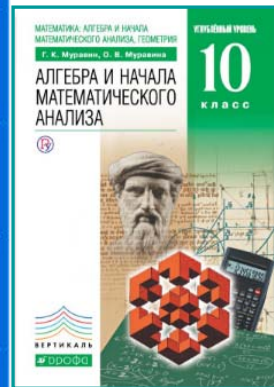


В.М.Брадис (1890-1975)

Двузначная таблица десятичных логарифмов



	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1	0,00	0,04	0,08	0,11	0,15	0,18	0,20	0,23	0,26	0,28
2	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40	0,41	0,43	0,45	0,46
3	0,48	0,49	0,51	0,52	0,53	0,54	0,56	0,57	0,58	0,59
4	0,60	0,61	0,62	0,63	0,64	0,65	0,66	0,67	0,68	0,69
5	0,70	0,71	0,72	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,76	0,77
6	0,78	0,79	0,79	0,80	0,81	0,81	0,82	0,83	0,83	0,84
7	0,85	0,85	0,86	0,86	0,87	0,88	0,88	0,89	0,89	0,90
8	0,90	0,91	0,91	0,92	0,92	0,93	0,93	0,94	0,94	0,95
9	0,95	0,96	0,96	0,97	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99	1,00



Финансовая задача 1. Эмигрант Петров, покинувший Россию в 1917 г., положил в Нью-Йоркский банк 1 доллар под 10% годовых с условием закрыть вклад в 2018 году. Сколько денег было на вкладе Петрова в 2018 г.?

Решение.

$$1, 1,1, 1,1^2, \dots, 1,1^{100}.$$

$$1,1^{100} = A, \lg(1,1^{100}) = 100 \lg 1,1 \approx 100 \cdot 0,04 = 4.$$

$$\lg A = 4, \quad A = 10^4 = 10\,000 \text{ (дол.)}.$$

Ответ: 10 000 долларов.

Финансовая задача 2. Наследники Петрова решили не снимать, а пролонгировать (продлить) вклад по той же ставке, пока на нем не окажется 2 миллиона долларов. Сколько лет им предстоит ожидать этого?

Решение.

$$10^4 \cdot 1,1^n = 2 \cdot 10^6, \quad 10^4 \cdot 1,1^n = 2 \cdot 10^6,$$

$$1,1^n = 200, \quad n \lg 1,1 = \lg 2 + \lg 100,$$

$$n = \frac{2,3}{0,04} = \frac{230}{4} \approx 58 \text{ (л.)}$$

Ответ: 58 лет.



корпорация

российский
учебник

Спасибо за внимание!

**Муравин Георгий Константинович,
Муравина Ольга Викторовна,
E-mail: olgamuravina@gmail.com
Авторский сайт: muravins.ru**