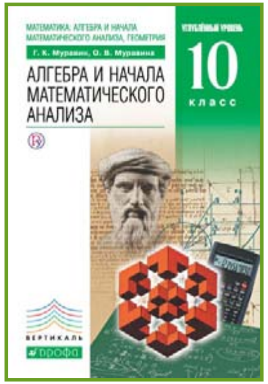
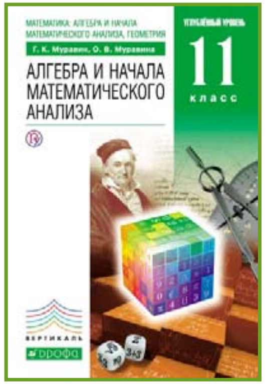
корпорация российский учебник

LECTA

«Методика изучения тригонометрических уравнений и неравенств в старшей школе»

Г.К.Муравин, кандидат педагогических наук, почетный работник образования, ветеран труда, автор УМК по математике для 1–11 классов
О.В.Муравина, кандидат педагогических наук, доцент, зав. кафедрой начального образования Института развития образовательных технологий, автор УМК по математике для 1–11 классов





ПЛАН ВЕБИНАРА

1. Особенности изучения тригонометрических уравнений и неравенств в УМК.
2. Виды тригонометрических уравнений и неравенств и методы их решения.
3. Тригонометрические уравнения в ЕГЭ.

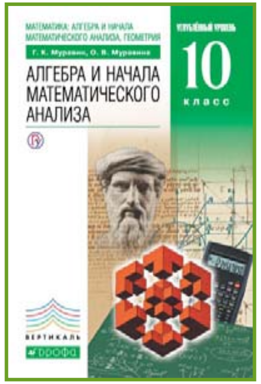
УМК ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ 10-11 КЛАССОВ

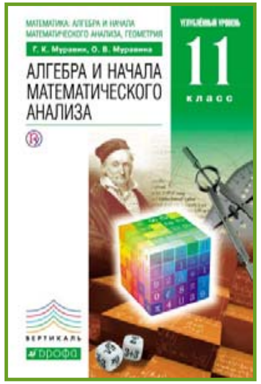
корпорация российский учебник

LECTA

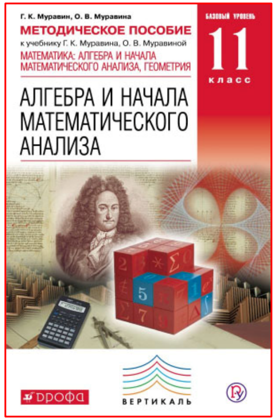
Рабочие программы

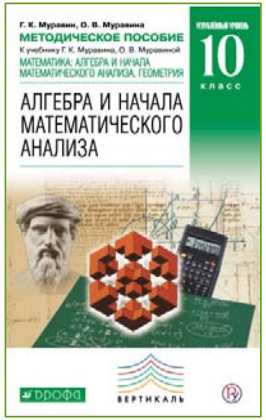
Учебники





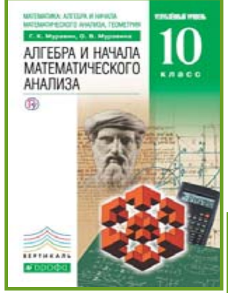
Методические пособия





Приложение

К приказу Министерства просвещения
Российской Федерации
от «28» декабря 2018 г. № 345



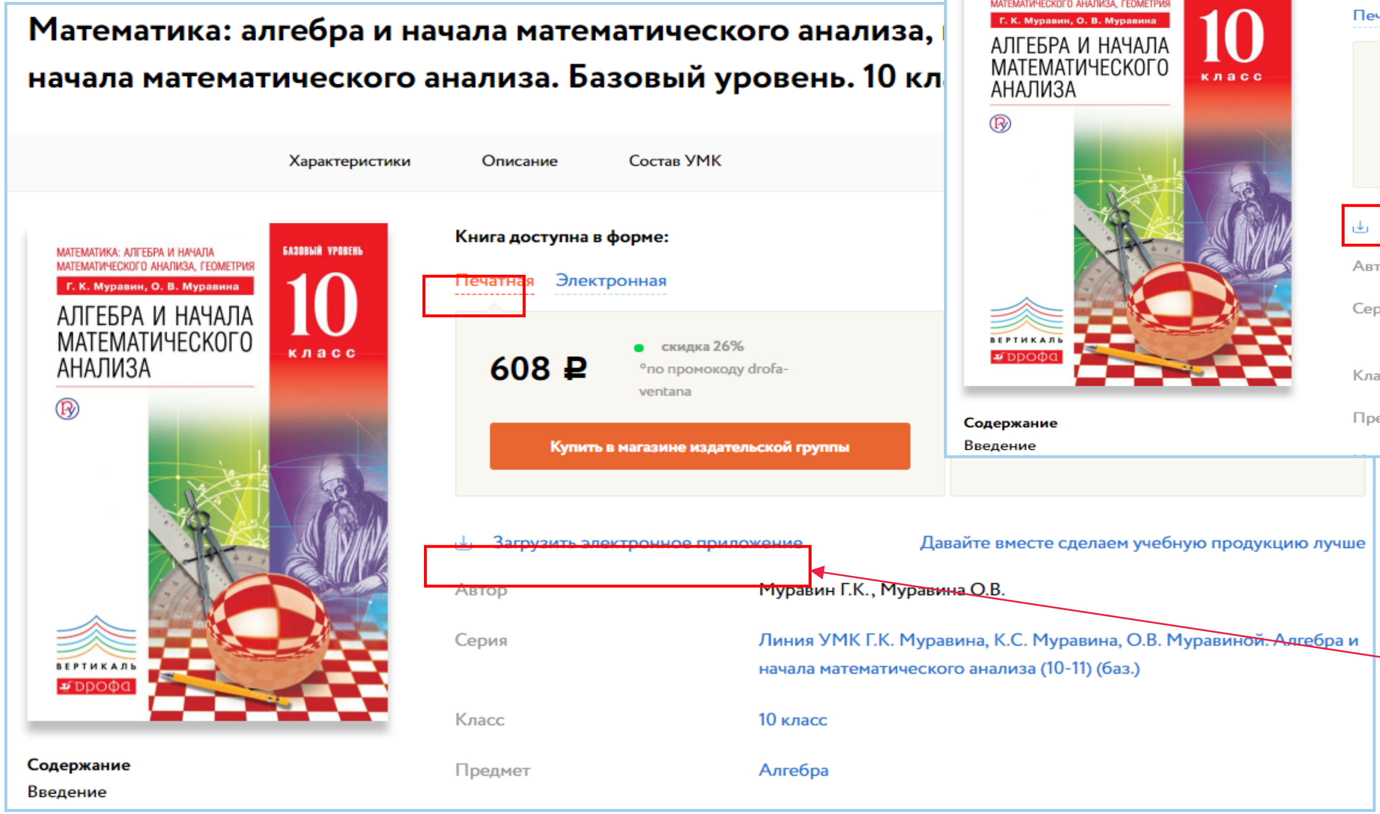
Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования

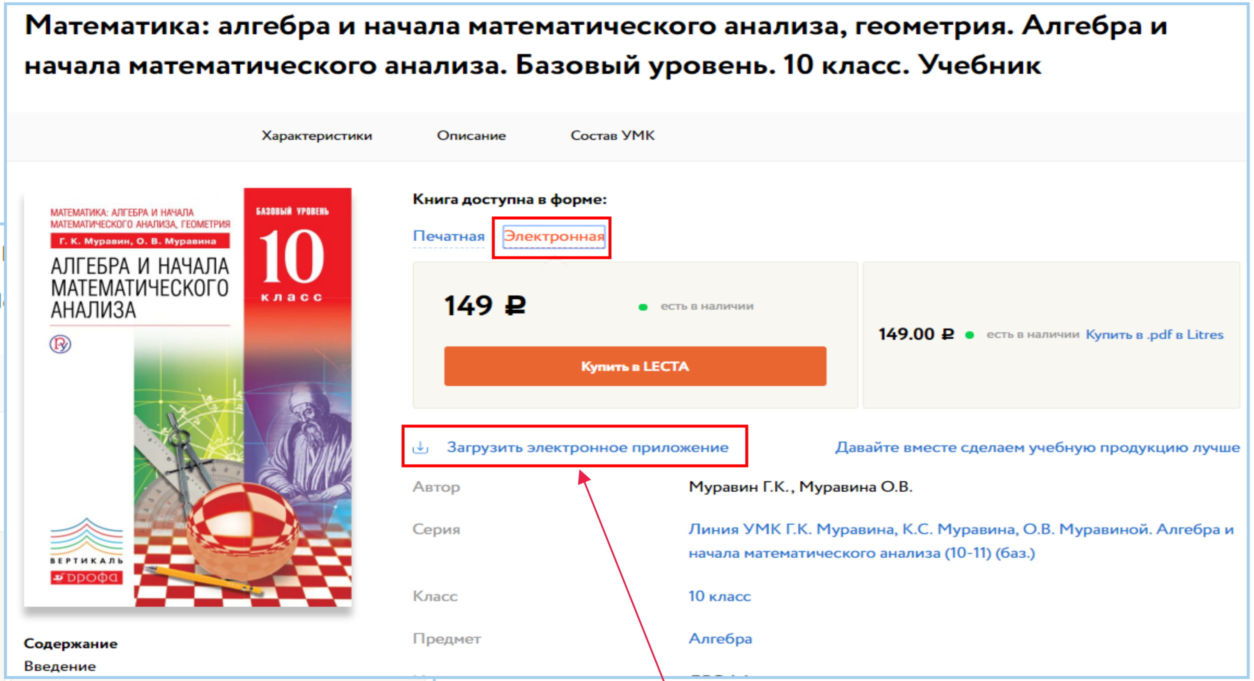
1.3.4.	Математика и информатика (предметная область)				
1.3.4.1	Математика (базовый уровень) (учебный предмет)				
1.3.4.1.10.1	Муравин Г.К., Муравина О.В.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень)	10	ООО «ДРОФА»	http://www.drofa.ru/75/
1.3.4.1.10.2	Муравин Г.К., Муравина О.В.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень)	11	ООО «ДРОФА»	http://www.drofa.ru/75/
1.3.4.2.	Математика (углублённый уровень) (учебный предмет)				
1.3.4.2.2.1	Муравин Г.К., Муравина О.В.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (углублённый уровень)	10	ООО «ДРОФА»	http://www.drofa.ru/73/
1.3.4.2.2.2	Муравин Г.К., Муравина О.В.	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (углублённый уровень)	11	ООО «ДРОФА»	http://www.drofa.ru/73/

rosuchebnik.ru

корпорация российский учебник

LECTA

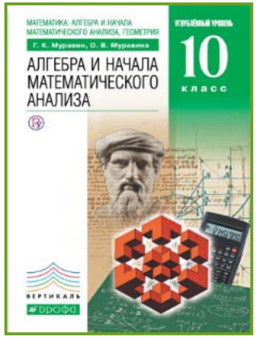




Электронные приложения

корпорация российский учебник

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНИКОВ

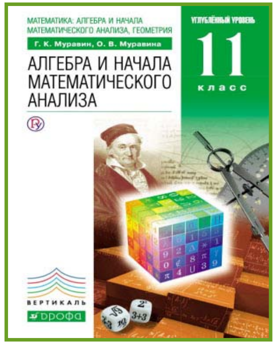


Содержание материала учебника в 10 классе

Глава 1. Функции и графики
Глава 2. Степени и корни
Глава 3. Показательная и логарифмическая функции
Глава 4. Тригонометрические функции
Глава 5. Вероятность и комбинаторика
Глава 6. Повторение

Содержание материала учебника в 11 классе

Глава 1. Непрерывность и пределы функции
Глава 2. Производная функции
Глава 3. Техника дифференцирования
Глава 4. Интеграл и первообразная
Глава 5. Уравнения, неравенства и их системы
Глава 6. Вероятность и статистика
Глава 7. Комплексные числа



СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНИКОВ

Оглавление

Глава 1. Функции и графики

1. Понятие функции 7
2. Прямая, гипербола, парабола и окружность 15
3. Непрерывность и монотонность функций 24
4. Квадратичная и дробно-линейная функции. Преобразование графиков 35

Глава 2. Степени и корни

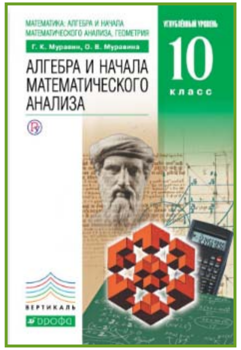
5. Степенная функция $y = x^n$ при натуральном n 46
6. Понятие корня n-й степени 51
7. Свойства арифметических корней 61
8. Степень с рациональным показателем 67

Глава 3. Показательная и логарифмическая функции

9. Функция $y = a^x$ 76
10. Понятие логарифма 86
11. Свойства логарифмов 95

Глава 4. Тригонометрические функции и их свойства

12. Угол поворота 106
13. Радианная мера угла 110
14. Синус и косинус любого угла 115



15. Тангенс и котангенс любого угла 122
16. Простейшие тригонометрические уравнения . . 128
17. Формулы приведения 136
18. Свойства и график функции $y = \sin x$ 144
19. Свойства и график функции $y = \cos x$ 151
20. Свойства и графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ 157
21. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента 165
22. Синус и косинус суммы и разности двух углов 171
23. Тангенс суммы и тангенс разности двух углов 177
24. Тригонометрические функции двойного угла 182
25. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму. Обратное преобразование 188
26. Решение тригонометрических уравнений 194

Глава 5. Элементы теории вероятностей и комбинаторики

27. Понятие о вероятности 203
28. Вычисление числа вариантов 208

Глава 6. Повторение

29. Функции и графики 217
30. Уравнения и неравенства 232

Домашние контрольные работы 241

Ответы 248

Советы 270

Решения 280

Основные формулы 311

Предметный указатель 315

Список дополнительной литературы и интернет-ресурсов 317

РАБОЧИЕ ПРОГРАММЫ

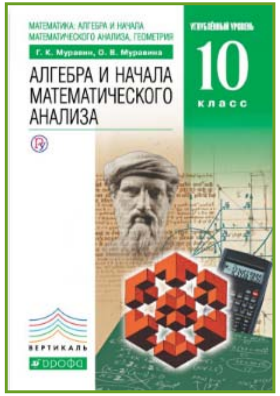
СОДЕРЖАНИЕ

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 10—11 классы

Пояснительная записка 3
Общая характеристика учебного предмета 7
Место предмета в учебном плане 9
Личностные, метапредметные и предметные результаты освоения учебного предмета 9
Содержание учебного предмета 11
Тематическое планирование 15
10 класс 15
11 класс 25
Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение образовательного процесса 33

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10—11 классы

Пояснительная записка 38
Общая характеристика учебного предмета 42
Место предмета в учебном плане 44
Личностные, метапредметные и предметные результаты освоения учебного предмета 44
Содержание учебного предмета 47
Тематическое планирование 51
10 класс 51
11 класс 63
Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение образовательного процесса 72



ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Содержание материала учебника	Количество часов	Характеристика основных видов учебной деятельности учащихся
Глава 4. Тригонометрические функции	**42**	
12. Угол поворота Общий вид угла поворота. Положительное и отрицательное направления поворота угла	1	Решать практические задачи: на нахождение угловой скорости вращения барабана стиральной машины; сравнения угла поворота часов; направление вращения колес велосипеда. Записывать общий вид угла поворота. Пользоваться транспортиром для построения конечных точек поворота
13. Радианная мера угла История измерения углов и единиц их измерения. Радиан. Линейная и угловая скорости	2	Переводить углы из градусной меры в радианную и из радианной в градусную. Выполнять задания на построение углов поворота. Решать практические задачи с морским компасом, со скоростью вращения Зем… электродвигателя. Объяснят… ния метро», «радиальная пла…
14. Синус и косинус любого угла Понятия синуса, косинуса угла в прямоугольном треугольнике, произвольного угла. Табличные значения синуса и косинуса острых углов	3	Формулировать определени… ного угла. Определять коорд… ходится угол поворота. Опре… произвольных углов поворо… синуса и косинуса некоторы… ды тригонометрических ура… значения синуса и косинуса…

Глава 4. Тригонометрические функции	**50**	
12. Угол поворота Общий вид угла поворота. Положительное и отрицательное направления поворота угла	1	Решать практические задачи: на нахождение угловой скорости вращения барабана стиральной машины; сравнения угла поворота часов; направление вращения колес велосипеда. Записывать общий вид угла поворота. Пользоваться транспортиром для построения конечных точек поворота
13. Радианная мера угла История измерения углов и единиц их измерения. Радиан. Линейная и угловая скорости	2	Переводить углы из градусной меры в радианную и из радианной в градусную. Выполнять задания на построение углов поворота. Решать практические задачи с морским компасом, со скоростью вращения Земли, со скоростью вращения электродвигателя. Объяснять смысл фраз «радиальная линия метро», «радиальная планировка города»
14. Синус и косинус любого угла Понятия синуса, косинуса угла в прямоугольном треугольнике, произвольного угла. Табличные значения синуса и косинуса некоторых острых углов	3	Формулировать определения синуса, косинуса произвольного угла. Находить углы, синусы или косинусы которых известны. Определять координатную четверть, в которой находится угол поворота. Определять знаки синуса и косинуса произвольных углов поворота. Заполнять таблицы значений синуса и косинуса некоторых углов. Решать простейшие виды тригонометрических уравнений. Сравнивать значения синуса и косинуса некоторых видов углов. Обнаруживать закономерности и продолжать их
15. Тангенс и котангенс любого угла Понятия тангенса и котангенса лю-	3	Формулировать определения тангенса и котангенса произвольного угла. Определять знаки тангенса и котангенса произвольных углов поворота. Заполнять таблицы значений

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Содержание материала учебника	Количество часов	Характеристика основных видов учебной деятельности учащихся
24. Тригонометрические функции двойного угла Синус, косинус, тангенс двойного угла	2	Записывать формулы тригонометрических функций двойного угла. Применять их для вычисления значений выражений, решения уравнений и неравенств и доказательства тождеств
25. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму. Обратное преобразование Тождественные преобразования тригонометрических выражений	3	Записывать формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и преобразования суммы в произведение. Применять их для вычисления значений выражений, упрощения выражений, решения уравнений и доказательства тождеств
26. Решение тригонометрических уравнений Уравнения, сводимые к квадратным; однородные тригонометрические уравнения; уравнения, сводимые к однородным уравнениям, и др.	4	Решать тригонометрические урав... Находить корни на промежутке. Р... ские уравнения графически с при... программ
Проект «Различные типы тригонометрических уравнений и методы их решения»		Искать, отбирать, анализировать, ... сифицировать информацию. Испо... точники информации для работы
Зачет или контрольная работа № 5	1	Контролировать и оценивать свою ... на следующий этап обучения

22. Синус и косинус суммы и разности двух углов Формулы синуса и косинуса суммы и разности двух углов	4	Доказывать формулы синуса и косинуса суммы и разности двух углов. Применять их для вычисления значений выражений, решения уравнений и неравенств и доказательства тождеств
23. Тангенс суммы и тангенс разности двух углов Формулы тангенса суммы и разности двух углов	3	Доказывать формулы тангенса суммы и разности двух углов. Применять их для вычисления значений выражений, решения уравнений и неравенств и доказательства тождеств
24. Тригонометрические функции двойного угла Синус, косинус, тангенс двойного угла	3	Доказывать формулы тригонометрических функций двойного угла. Применять их для вычисления значений выражений, решения уравнений и неравенств и доказательства тождеств
25. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму. Обратное преобразование Тождественные преобразования тригонометрических выражений	5	Доказывать формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и преобразования суммы в произведение. Применять их для вычисления значений выражений, упрощения выражений, решения уравнений и доказательства тождеств
26. Решение тригонометрических уравнений Уравнения, сводимые к квадратным; однородные тригонометрические уравнения; уравнения, сводимые к однородным уравнениям, и др.	6	Решать тригонометрические уравнения изученных видов. Доказывать, что уравнения не имеют корней; находить корни на промежутке; находить наименьший или наибольший корень; решать уравнения с параметром аналитически и графически с применением компьютерных программ

14. Синус и косинус любого угла

Пример 2. Найти приближённо углы, косинусы которых равны 0,8.

Решение. Косинус — это абсцисса соответствующей точки единичной окружности. Все точки с абсциссами, равными 0,8, принадлежат прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку $C(0{,}8;\ 0)$ (рис. 75). Эта прямая пересекает единичную окружность в двух точках: P_{α° и P_{β°, симметричных относительно оси абсцисс.

С помощью транспортира находим, что угол α° приближённо равен 37°. Значит, общий вид углов поворота с конечной точкой P_{α°:

$$\alpha^\circ \approx 37^\circ + 360^\circ n,\ \text{где } n \text{ — любое целое число.}$$

В силу симметрии относительно оси абсцисс точка P_{β° — конечная точка поворота на угол -37°. Значит, для неё общий вид углов поворота:

$$\beta^\circ \approx -37^\circ + 360^\circ n,\ \text{где } n \text{ — любое целое число.}$$

Ответ: $37^\circ + 360^\circ n$, $-37^\circ + 360^\circ n$, где n — любое целое число.

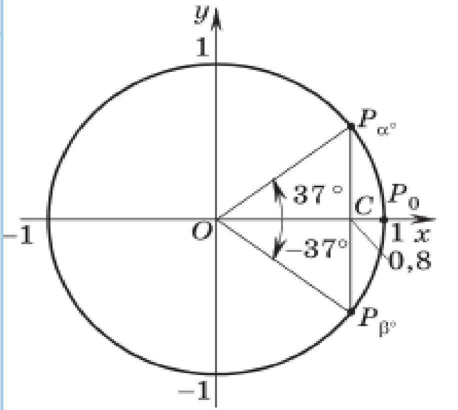


Рис. 75

Пример 3. Найти углы, синусы которых равны 0,5.

Решение. Синус — это ордината соответствующей точки единичной окружности. Все точки с ординатами, равными 0,5, принадлежат прямой, параллельной оси абсцисс и проходящей через точку $D(0;\ 0{,}5)$ (рис. 76).

Эта прямая пересекает единичную окружность в двух точках: P_φ и $P_{\pi-\varphi}$, симметричных относительно оси ординат.

В прямоугольном треугольнике OKP_φ катет KP_φ равен половине гипотенузы OP_φ, значит, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Общий вид углов поворота с конечной точкой P_φ:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n,$$

где n — любое целое число.

Общий вид углов поворота с конечной точкой $P_{\pi-\varphi}$:

$$\pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$$

где n — любое целое число.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, где n — любое целое число.

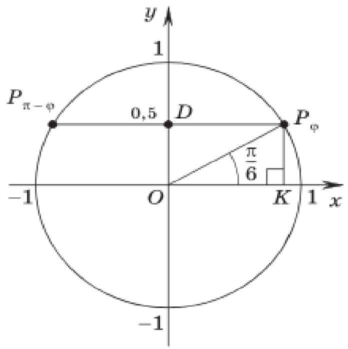


Рис. 76

246. Для каких углов от 0° до 360°:

1) синус равен косинусу;
2) синус противоположен косинусу;
3) синус и косинус имеют равные модули;
4) синус больше косинуса;
5) синус меньше косинуса?

15. Тангенс и котангенс любого угла

Пример 2. Найти общий вид углов, тангенс которых равен $-1{,}2$.

Решение. Отметим на оси тангенсов точку C с ординатой, равной $-1{,}2$, и проведём прямую OC. Прямая OC пересекает единичную окружность в точках P_{α° и P_{β° — концах одного и того же диаметра (рис. 80). Углы, соответствующие этим точкам, отличаются друг от друга на целое число полуоборотов, т. е. на $180^\circ n$ (n — целое число). С помощью транспортира находим, что угол $P_{\alpha^\circ}OP_0$ равен -50°. Значит, общий вид углов, тангенс которых равен $-1{,}2$, следующий: $-50^\circ + 180^\circ n$ (n — целое число).

Ответ: $-50^\circ + 180^\circ n,\ n \in Z$.

По синусу и косинусу углов 30°, 45° и 60° легко найти их тангенсы и котангенсы. Например,

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

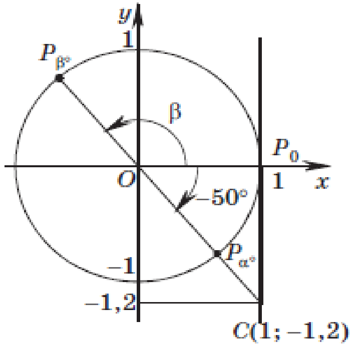


Рис. 80

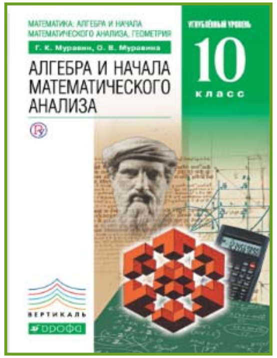
Перечисленные углы довольно часто встречаются в разных задачах, поэтому полезно запомнить значения тангенса и котангенса этих углов.

α°	30°	45°	60°
φ рад	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{tg}\varphi$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\varphi$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

260. Найдите общий вид углов, тангенс которых равен:
1) 1,3; 2) 0,7; 3) –0,4; 4) –1,7.

269. Найдите все углы φ из промежутка $[0;\ 2\pi]$, для которых верно равенство:

1) $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}$;
2) $\operatorname{ctg}\varphi = \sqrt{3}$;
3) $\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3}$;
4) $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
5) $\lg \operatorname{tg}\varphi = \lg \sin\varphi - \lg\cos\varphi$;
6) $\lg \operatorname{ctg}\varphi = \lg\cos\varphi - \lg\sin\varphi$.



16. Простейшие тригонометрические уравнения

Из рисунка 81 видно, что уравнение $\sin\varphi = a$ при $-1 < a < 1$ имеет две серии корней.

$\sin\varphi = a$,
1) $\varphi = \arcsin a + 2\pi n$,
2) $\varphi = \pi - \arcsin a + 2\pi n$,
n — любое целое число.

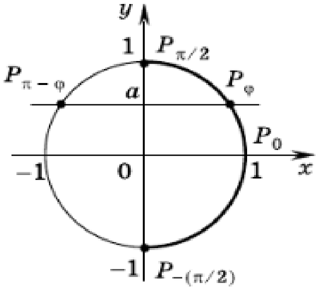
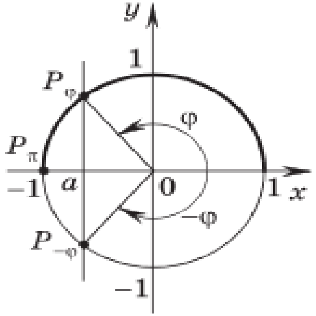


Рис. 81

Обозначения: $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$, $\operatorname{arcctg} a$.
Мы не рекомендуем торопиться с введением объединенной формулы.
Две серии корней значительно удобнее записывать, особенно, когда нужно отбирать корни на интервале.

$\cos\varphi = a$,
$\varphi_1 = \arccos a + 2\pi n$,
$\varphi_2 = -\arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$.



$\operatorname{tg}\varphi = a$,
$\varphi = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in Z$,

$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2}$,

т. е. $\operatorname{arctg} a$ — угол из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a,

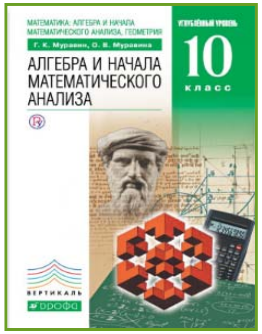
$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$.

$\operatorname{ctg}\varphi = a$,
$\varphi = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in Z$,

$0 < \operatorname{arcctg} a < \pi$,

т. е. $\operatorname{arcctg} a$ — угол из промежутка $(0;\ \pi)$, котангенс которого равен a,

$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$.

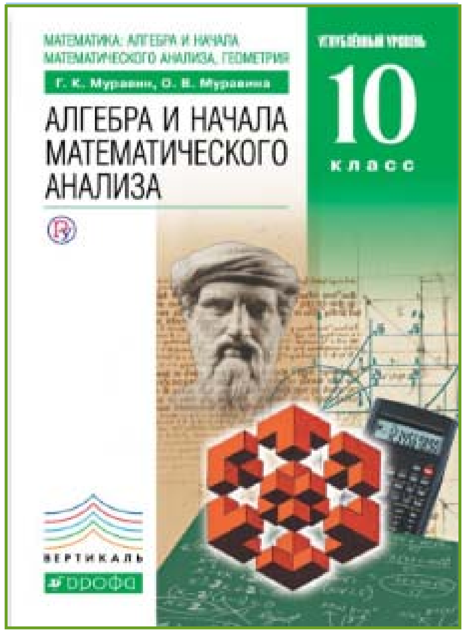


корпорация российский учебник

LECTA

16. Простейшие тригонометрические уравнения

Наиболее часто тригонометрические уравнения сводятся к квадратным.



288. Решите уравнение:

1) $4\sin^2 x + 5\sin x + 1 = 0$; 2) $3\cos^2 x + 2\cos x - 5 = 0$.

288. 1) $4\sin^2 x + 5\sin x + 1 = 0$. Решим это уравнение как квадратное относительно $\sin x$: $\sin x = -1$ и $\sin x = -\frac{1}{4}$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = -\arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n$, $x = \pi + \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n$, n — любое целое число.

В обоих случаях следует решать квадратные уравнения от вспомогательной переменной на области значений синуса или косинуса (заметим, как полезно проверять 1 и -1).

17. Формулы приведения

Формулы приведения являются тождествами, т. е. они верны для любых допустимых значений φ. Анализируя полученную таблицу, можно заметить, что:

1) *знак в правой части формулы совпадает со знаком приводимой функции в соответствующей четверти, если считать φ острым углом;*

2) *название меняют только функции углов* $\frac{\pi}{2} \pm \varphi$ и $\frac{3\pi}{2} \pm \varphi$ ($90° \pm \alpha°$ и $270° \pm \alpha°$).

α	$\varphi + 2\pi n$	$-\varphi$	$\pi - \varphi$	$\pi + \varphi$
$\sin\alpha$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$
$\cos\alpha$	$\cos\varphi$	$\cos\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\cos\varphi$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$

α	$\frac{\pi}{2} - \varphi$	$\frac{\pi}{2} + \varphi$	$\frac{3\pi}{2} - \varphi$	$\frac{3\pi}{2} + \varphi$
$\sin\alpha$	$\cos\varphi$	$\cos\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\cos\varphi$
$\cos\alpha$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$\sin\varphi$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$

«Лошадиное» правило

298. Решите уравнение на промежутке $[0; 2\pi]$:

1) $2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2}$;

2) $2\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$;

3) $\operatorname{tg}(\pi + x) = 1$;

4) $3\operatorname{ctg}(2\pi - x) = \sqrt{3}$.

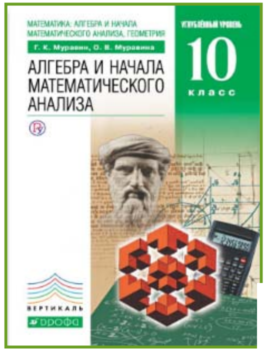
299. Решите уравнение:

1) $2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2} = 0$;

2) $\cos(2\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2}$;

3) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\frac{\pi}{4}$;

4) $3\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{3} = 0$.



18. Свойства и график функции $y = \sin x$

Простейшие тригонометрические неравенства решаются либо по графику, либо на окружности.
При решении тригонометрического неравенства на окружности важно не перепутать, какую точку указывать первой.

304. 1) Постройте график функции $y = \sin x$ и выделите цветным карандашом те его точки, ординаты которых:
а) положительны; б) отрицательны.
2) ○ На каких промежутках функция $y = \sin x$ принимает положительные и на каких — отрицательные значения?

305. 1) Постройте одну волну синусоиды $y = \sin x$ на промежутке от 0 до 2π, взяв за единицу 2,5 см. Выделите карандашами разных цветов точки графика, ординаты которых:

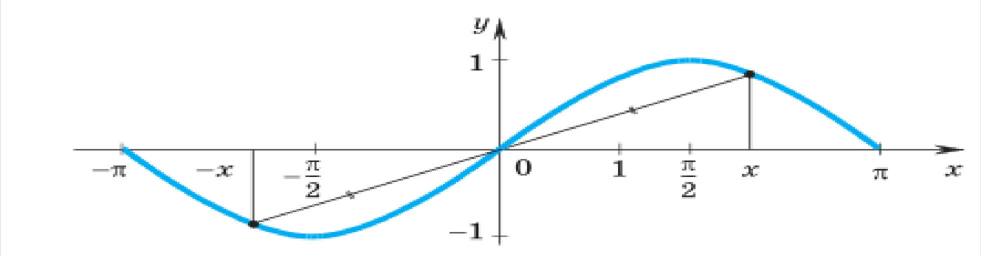
а) равны: $0;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2};$

б) больше: $\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2};$ в) меньше: $-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}.$

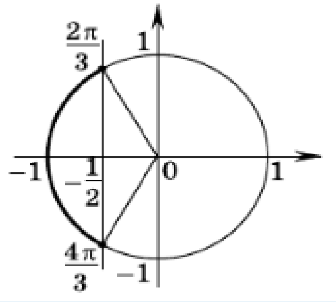
2) ● Запишите абсциссы выделенных точек.

306.○ Решите неравенство:

1) $\sin x < 1$;
2) $\sin x > -1$;
3) $\sin x > \sqrt{2}$;
4) $\sin x < -\sqrt{3}$.



$\cos x > -\frac{1}{2}$



$\cos x \le -\frac{1}{2}$

корпорация российский учебник

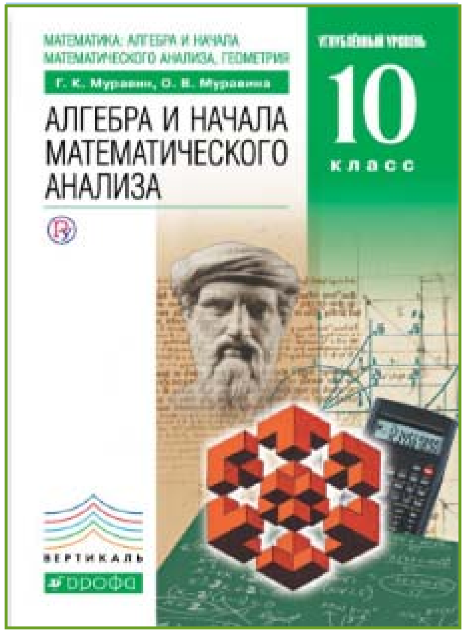
LECTA

18. Свойства и график функции $y = \sin x$

315. При каких значениях a функция

$$y = \sin^2 2x + 6 \sin 2x + a$$

принимает только положительные значения?

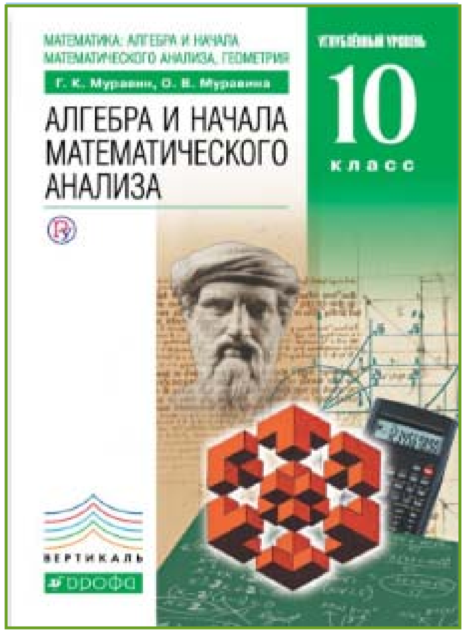


Неравенство с параметром

315. Решением будут те и только те значения a, при которых функция $t = z^2 + 6z + a$ принимает только положительные значения на промежутке $[-1; 1]$ ($z = \sin 2x$). Абсцисса вершины параболы $t = z^2 + 6z + a$ равна -3. Для выполнения требования задачи достаточно, чтобы значение функции t в точке $z = -1$ было положительным: $(-1)^2 + 6(-1) + a > 0$, $a > 5$.

корпорация российский учебник

LECTA



19. Свойства и график функции $y = \cos x$

Задачу построения графика функции $y = \cos x$ можно свести к построению графика функции $y = \sin x$. Действительно, поскольку $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, график функции $y = \cos x$ можно получить из графика функции $y = \sin x$ сдвигом последнего вдоль оси абсцисс влево на $\frac{\pi}{2}$ (рис. 98).

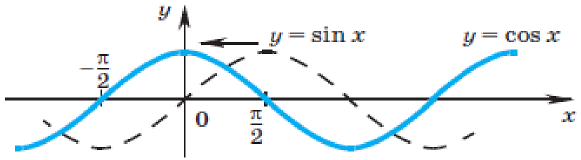


Рис. 98

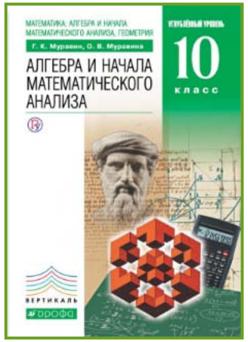
323. Решите неравенство:

1) $\cos x < 1$;
2) $\cos x > -1$;
3) $\cos x < -\sqrt{2}$;
4) $\cos x > \sqrt{3}$.

333. Решите неравенство:

1) $2\sin 2x - 1 \geqslant 0$;
2) $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \leqslant -1$;
3) $\sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$;
4) $-2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) < \sqrt{2}$.

333. 1) $\sin 2x \geqslant \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant 2x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{12} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{12} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \leqslant -\frac{1}{2}$. По формулам приведения $\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 3x$, $\cos 3x \leqslant -\frac{1}{2}$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \leqslant 3x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$, $\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.



20. Свойства и графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$

Область определения функции $y = \operatorname{tg} x$ включает в себя все числа, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$. Как и при построении синусоиды, сначала постараемся получить график функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

В левом конце этого промежутка тангенс равен нулю, а при приближении к правому концу значения тангенса не-

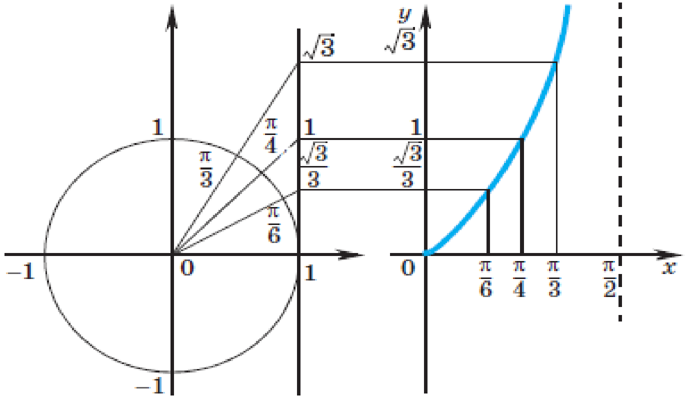


Рис. 102

337. 1) Постройте график функции $y = \operatorname{tg} x$ и выделите разными цветами те точки графика, ординаты которых:

а) равны 1, больше 1, меньше 1;

б) равны −2, больше −2, меньше −2.

2) Запишите абсциссы выделенных точек.

338. 1) Постройте график функции $y = \operatorname{ctg} x$ и выделите разными цветами те точки графика, ординаты которых:

а) равны 1, больше 1, меньше 1;

б) равны −3, больше −3, меньше −3.

2) Запишите абсциссы выделенных точек.

339. Решите графически неравенство:

1) $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x \leqslant -1$; 5) $\operatorname{tg} x > 3$;

2) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $\operatorname{ctg} x \leqslant -3$.

346. Найдите корни уравнения:

1) $\operatorname{tg} x = 1$ на промежутке:

а) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$; в) $(2\pi; 4\pi)$;

2) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ на промежутке:

а) $(0; \pi)$; б) $(\pi; 2\pi)$; в) $(2\pi; 4\pi)$;

3) $\operatorname{tg} x = 2$ на промежутке:

а) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$; в) $(2\pi; 4\pi)$.

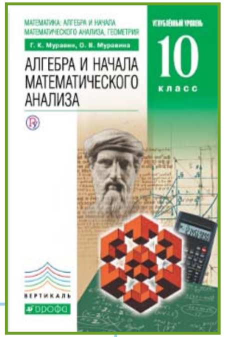
347. При каких значениях x выполняется равенство:

1) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$;

2) $\operatorname{tg} x = -\operatorname{ctg} x$;

3) $|\operatorname{tg} x| = |\operatorname{ctg} x|$?

корпорация российский учебник



21. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

Равенства $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$ и $\operatorname{ctg} \varphi = \dfrac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$ выражают соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента φ. С их помощью, зная синус и косинус некоторого угла, можно найти его тангенс и котангенс. Из этих равенств легко получить, что тангенс и котангенс связаны между собой следующим равенством.

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{ctg} \varphi = 1$$

Познакомимся с некоторыми другими зависимостями между тригонометрическими функциями.

Уравнение единичной окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = 1$ связывает абсциссу и ординату любой точки этой окружности.

Основное тригонометрическое тождество

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

Пример 1. Упростить выражение $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$.

Решение.

$$(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha) =$$
$$= 1 - \sin^2 a = \cos^2 a + \sin^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a.$$

Здесь мы заменили единицу суммой квадратов синуса и косинуса.

$$1 - \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi \qquad 1 - \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi$$

Эти равенства, которые получены из основного тригонометрического тождества, также являются тождествами.

Разделив почленно основное тригонометрическое тождество на $\cos^2 \varphi$, получим:

$$\frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}, \text{ т. е. } 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}.$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

Аналогично, делением основного тригонометрического тождества на $\sin^2 \varphi$ получаем следующую формулу.

$$\operatorname{ctg}^2 \varphi + 1 = \frac{1}{\sin^2 \varphi}$$

Зависимости между тригонометрическими функциями позволяют по значению одной из функций находить значения остальных тригонометрических функций при том же значении аргумента.

21. Зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

корпорация российский учебник

LECTA

358. Решите уравнение:

1) $(\sin x + \cos x)^2 - 1 = 0$;

2) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin x \cos x$;

3) $8 \sin^2 x - 18 \sin x + 7 = 0$;

4) $4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0$;

5) $(\sin x + 1)^2 = \sin^2 x + 1$;

6) $\cos^2 x + \cos x = -\sin^2 x$;

7) $3 \sin x = 2 \cos^2 x$;

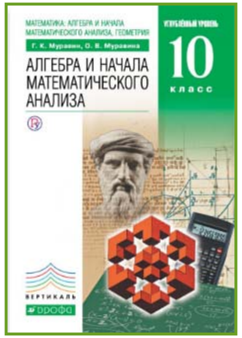
8) $3 \cos x = -2 \sin x$;

9)* $\sin x + \cos x = 1{,}4$;

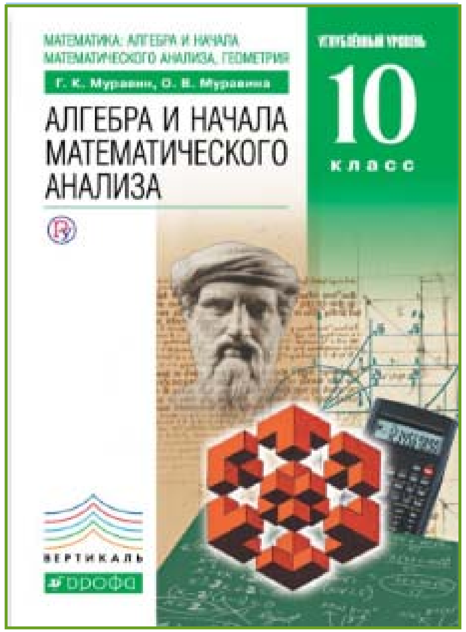
10)* $\sin x - \cos x = \dfrac{7}{13}$.

358. 9) Возведём уравнение в квадрат и после упрощения получим: $\sin x \cdot \cos x = \frac{12}{25}$. По теореме, обратной теореме Виета, $\sin x$ и $\cos x$ — корни квадратного уравнения $z^2 - \frac{7}{5}z + \frac{12}{25} = 0$, $z_1 = \frac{3}{5}$, $z_2 = \frac{4}{5}$. Один из корней — косинус, а другой — синус, или наоборот. Имеем: $\cos x = \frac{3}{5}$ или $\cos x = \frac{4}{5}$.

Ответ: $\pm\arccos \frac{3}{5} + 2\pi n, \pm\arccos \frac{4}{5} + 2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$.



корпорация российский учебник
LECTA



22. Синус и косинус суммы и разности двух углов

Формула косинуса суммы
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

Формула косинуса разности
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

Формула синуса разности
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

Формула синуса суммы
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

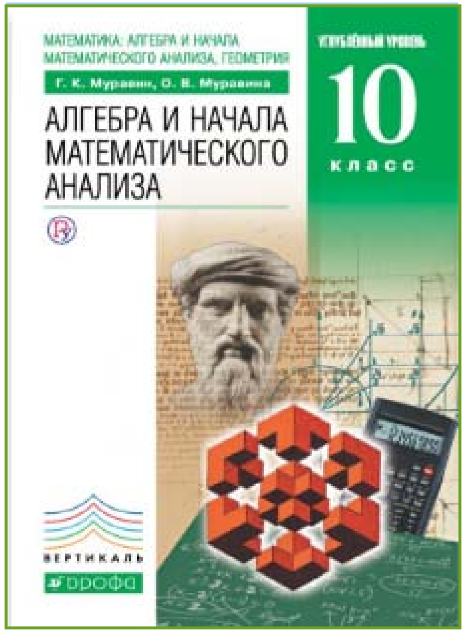
381. Решите уравнение:

1) $\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=0$;
2) $\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=1$;
3) $\cos 3x\cos\frac{\pi}{6}+0{,}5=\sin 3x\sin\frac{\pi}{6}$;
4) $\sin\frac{3\pi}{2}\cos 2x=\cos\frac{3\pi}{2}\sin 2x-1$.

23. Тангенс суммы и тангенс разности двух углов

корпорация российский учебник

LECTA



Формула тангенса суммы

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Формула тангенса разности

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

392. Решите уравнение:

1) $\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x}{1-\operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x}=\sqrt{3}$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} 3x\operatorname{tg} x}=-1$;

3) $\operatorname{tg} x+4\operatorname{ctg} x=4$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\operatorname{tg} x}=0$;

5) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}+\operatorname{tg} 2x}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\operatorname{tg} 2x}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

6) $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-6=0$.

корпорация российский учебник

LECTA

24. Тригонометрические функции двойного угла

Формула тангенса двойного угла

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

Пример 2. Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$.

Решение. $\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{5}{8}$,

$$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x = \frac{5}{2},$$

$$2 + 2\cos^2 2x = \frac{5}{2}.$$

Понизим степень ещё раз:

$$2 + 1 + \cos 4x = \frac{5}{2},\ \cos 4x = \frac{5}{2} - 3,\ \cos 4x = -\frac{1}{2}.$$

$$4x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ 4x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z},$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$.

405. Решите уравнение, применяя формулы двойного аргумента:

1) $2\sin x\cos x = 1$;

2) $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$;

3) $4\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} - \sqrt{3} = 0$;

4) $\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} - 1 = 0$.

406. Решите уравнение, понижая его степень с помощью формул:

1) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$;

2)* $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$.

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

корпорация российский учебник

LECTA

25. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму. Обратное преобразование

Основные формулы

Переход от суммы к произведению

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

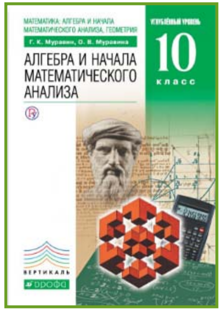
$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Переход от произведения к сумме

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta))$$



Пример 3. Решить уравнение $\sin x - \cos 3x = 0$.

Решение 1. Среди формул перехода от суммы или разности к произведению нет соответствующей формулы, поэтому с помощью формулы приведения заменим $\sin x$ на $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos 3x = 0,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0.$$

Произведение в левой части уравнения равно нулю, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0 \text{ или } \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0;$$

$$\frac{\pi}{4} + x = \pi n \text{ или } \frac{\pi}{4} - 2x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

$$x = \pi n - \frac{\pi}{4} \text{ или } x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\pi n - \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Решение 2. Можно было воспользоваться *условием равенства синуса и косинуса*, заметив, что $\sin\alpha = \cos\beta$ только в двух случаях:

1) $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 111).

Тогда

1) $4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

2) $-2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

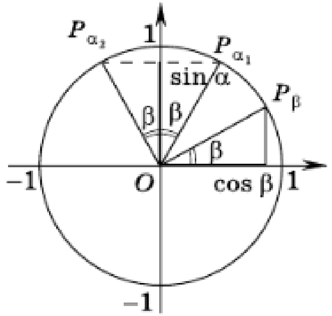
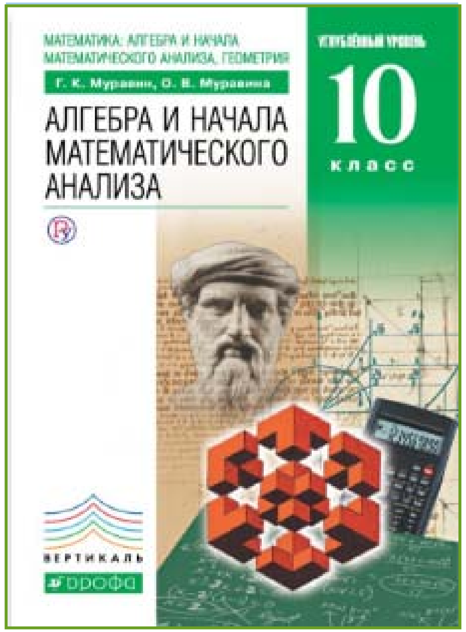


Рис. 111

корпорация российский учебник

LECTA



25. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму. Обратное преобразование

422. Решите уравнение, используя формулы суммы и разности тригонометрических функций:

1) $\sin x + \sin 3x = 0$; 3) $\sin 5x = \sin x$;

2) $\cos 4x + \cos x = 0$; 4) $\sin 3x = \cos 2x - \cos x$;

5) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2}$;

6) $\sin(x + \alpha) + \sin(x - \alpha) = \cos\alpha$ $(\cos\alpha \neq 0)$.

423. Решите уравнение, используя разложение на множители (сгруппируйте члены, к которым будет применяться формула суммы или разности):

1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;

2) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$;

3) $\cos x - \sin 3x = \cos 5x$;

4) $\cos(x - \alpha) - \cos(x + \alpha) = \sin\alpha$.

428. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

1) $y = \sin 2x$ и $y = \sin 4x$; 2) $y = \cos 7x$ и $y = \cos 3x$.

429. На промежутке $[-\pi; \pi]$ найдите все решения уравнения:

1) $\sin x + \sin 3x = 0$; 2) $\cos 3x + \cos x = 0$.

По мере изучения нового материала он применялся к решению уравнений и неравенств. В последнем пункте все встречавшиеся типы объединяются и повторяются. При этом главное внимание уделяется отнесению уравнений к тому или иному типу и разработке плана его решения.

428. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:
1) $y = \sin 2x$ и $y = \sin 4x$; 2) $y = \cos 7x$ и $y = \cos 3x$.

429. На промежутке $[-\pi; \pi]$ найдите все решения уравнения:
1) $\sin x + \sin 3x = 0$; 2) $\cos 3x + \cos x = 0$.

Контрольные вопросы и задания

1. Как преобразовать разность косинусов в произведение?

2. Выведите формулу $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$.

3. Вычислите:
а) $\cos 78° - \cos 42°$; б) $\sin 75° \sin 15°$;
в) $\log_{\frac{1}{2}} \sin 70° + \log_{\frac{1}{2}} \sin 50° + \log_{\frac{1}{2}} \sin 10°$.

26. Решение тригонометрических уравнений

В предыдущих пунктах вы уже встречались с тригонометрическими уравнениями. В большинстве случаев исходное уравнение в процессе решения сводится к простейшим тригонометрическим уравнениям. Однако для тригонометрических уравнений не существует единого метода решения. В каждом конкретном случае успех зависит от знания тригонометрических формул и от умения выбрать из них нужные. При этом обилие различных формул иногда делает этот выбор довольно трудным.

Рассмотрим несколько основных типов тригонометрических уравнений.

Уравнения, сводящиеся к квадратным

Пример 1. Решить уравнение $2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0$.

Решение. С помощью основного тригонометрического тождества это уравнение можно свести к квадратному относительно $\sin x$:

$$2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0,\ 2(1 - \sin^2 x) + 3 \sin x = 0,$$
$$2 - 2 \sin^2 x + 3 \sin x = 0,\ 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0.$$

Введём новую переменную $y = \sin x$, тогда уравнение примет вид: $2y^2 - 3y - 2 = 0$.

Корни этого уравнения $y_1 = 2$, $y_2 = -0{,}5$.

Возвращаемся к переменной x и получаем простейшие тригонометрические уравнения:

1) $\sin x = 2$ — это уравнение не имеет корней, так как $\sin x < 2$ при любом значении x;

2) $\sin x = -0{,}5$, $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Сравнивая серии корней

$$x_1 = \arcsin a + 2\pi n \text{ и } x_2 = -\arcsin a + \pi(2n + 1)$$

уравнения $\sin x = a$ при $0 < |a| < 1$, можно заметить, что знак «минус» появляется перед арксинусом, когда прибавляется нечётное число π. А при прибавлении чётного числа π арксинус берётся со знаком «плюс». Такое чередование знаков арксинуса можно обеспечить, домножив его на выражение $(-1)^n$.

Получится объединённая формула

$$\boldsymbol{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \text{ где } n \text{ — любое целое число.}}$$

Применяя эту формулу к рассмотренному в примере 1 уравнению, получим:

$$(-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n = (-1)^n \cdot (-1) \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,$$
$$x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

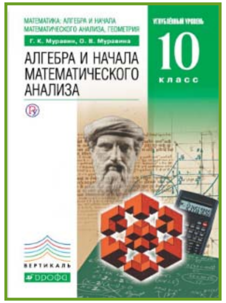
Ещё проще можно объединить серии корней уравнения

$$\cos x = a,\ x_1 = \arccos a + 2\pi n \text{ и } x_2 = -\arccos a + 2\pi n$$

при $0 < |a| < 1$:

$$\boldsymbol{x = \pm\arccos a + 2\pi n, \text{ где } n \text{ — любое целое число.}}$$

Объединённые формулы корней позволяют записывать ответы более компактно, однако в некоторых случаях, например при отборе корней, принадлежащих некоторому числовому промежутку, удобнее работать с каждой серией корней отдельно.



Однородные тригонометрические уравнения

Пример 2. Решить уравнение

$$2\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0.$$

Решение. Рассмотрим два случая:

1) $\cos x = 0$ и 2) $\cos x \neq 0$.

Случай 1. Если $\cos x = 0$, то уравнение принимает вид $2\sin^2 x = 0$, откуда $\sin x = 0$. Но это равенство не удовлетворяет условию $\cos x = 0$, так как ни при каком x косинус и синус одновременно в нуль не обращаются.

Случай 2. Если $\cos x \neq 0$, то можно разделить уравнение на $\cos^2 x$ и получить $2\,\mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\, x - 5 = 0$.

Вводя новую переменную $y = \mathrm{tg}\, x$, получаем квадратное уравнение $2y^2 - 3y - 5 = 0$.

Корни этого уравнения $y_1 = -1$, $y_2 = 2{,}5$.

Возвращаемся к переменной x.

$$\mathrm{tg}\, x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\mathrm{tg}\, x = 2{,}5,$$

$$x = \mathrm{arctg}\, 2{,}5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $\mathrm{arctg}\, 2{,}5 + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Примечание. Обозначив в исходном уравнении $\sin x$ буквой u, а $\cos x$ буквой v, получим уравнение вида $au^2 + buv + cv^2 = 0$.

> Уравнение, левая часть которого — многочлен, каждый член которого имеет вторую степень, а правая — нуль, называют **однородным уравнением второй степени** относительно переменных u и v.

Делением на v^2 такое уравнение сводится к квадратному относительно $\frac{u}{v}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$5\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x - 3 = 0.$$

Решение. Данное уравнение можно свести к однородному тригонометрическому уравнению второй степени относительно $\sin x$ и $\cos x$. Представим с помощью основного тригонометрического тождества число 3 как $3\sin^2 x + 3\cos^2 x$:

$$5\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x - 3\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0.$$

Приведя подобные члены, получим уравнение

$$2\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0$$

из примера 2.

Пример 4. Решить уравнение

$$3\sin 2x + 7\cos 2x + 3 = 0.$$

Решение. Это уравнение тоже можно свести к однородному. Применяя формулы синуса и косинуса двойного угла и основное тригонометрическое тождество, получим:

$$6\sin x\cos x + 7(\cos^2 x - \sin^2 x) + 3(\cos^2 x + \sin^2 x) = 0,$$
$$6\sin x\cos x + 10\cos^2 x - 4\sin^2 x = 0,$$
$$2\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0.$$

Снова пришли к однородному уравнению второй степени, рассмотренному в примере 2.

Примечание. В этом примере сами аргументы синуса и косинуса наталкивали на мысль о применении формул двойного угла. Но точно так же можно решить и уравнение $3\sin x + 7\cos x + 3 = 0$, если рассматривать x как двойной угол: $x = 2 \cdot \frac{x}{2}$.

В рассмотренных примерах были тригонометрические функции одного аргумента. Если же аргументы разные, то уравнение стараются или привести к одному аргументу, или свести его к виду $f(x) \cdot g(x) = 0$.

Пример 5. Решить уравнение $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$.

Решение. Применим в левой части уравнения формулу разности квадратов:

$$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x,$$
$$(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin 2x,$$
$$-\cos 2x = \sin 2x.$$

Отметим на единичной окружности углы, синус и косинус которых противоположны (рис. 112).

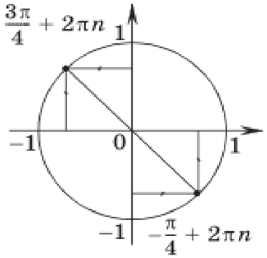
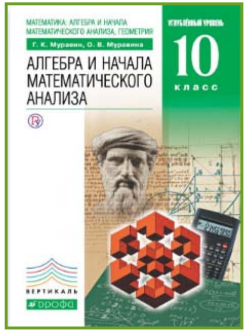


Рис. 112



Имеем: $2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Примечание 1. Можно было, конечно, отнестись к уравнению $-\cos 2x = \sin 2x$ как к однородному уравнению первой степени и рассмотреть два случая:

1) если $\cos 2x = 0$, то $\sin 2x = 0$ (эти два равенства не могут быть верными одновременно);

2) если $\cos 2x \neq 0$, то, разделив обе части на $\cos 2x$, получим: $\operatorname{tg} 2x = -1$, $2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ и $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Примечание 2. Запишем уравнение $-\cos 2x = \sin 2x$ в виде $\sin 2x + \cos 2x = 0$ и преобразуем его левую часть, вводя ***вспомогательный угол***. Для этого умножим обе части уравнения на $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и воспользуемся тем, что $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x = \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x + \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Получим:

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0,\ 2x + \frac{\pi}{4} = \pi n,$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ \text{где } n \in \boldsymbol{Z}.$$

▼ Приём введения вспомогательного угла всегда позволяет заменить синусом или косинусом выражение $a \sin x + b \cos x$. Для этого надо добиться, чтобы коэффициенты синуса и косинуса являлись соответственно косинусом и синусом некоторого угла, т. е. чтобы сумма их квадратов оказалась равной 1:

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x\right) =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\,(\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x) = \sqrt{a^2 + b^2}\,\sin (x + \varphi),$$

где $\varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Введение вспомогательного угла особенно удобно, когда вспомогательный угол табличный, т. е. равен $\pm\frac{\pi}{6}$, $\pm\frac{\pi}{4}$ и т. п.

Например, при решении уравнения $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$ имеем: $\sqrt{1 + 3} = 2$,

$$\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \cos \frac{\pi}{3} \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},\ x + \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$x_1 = 2\pi n,\ x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ \text{где } n \in \boldsymbol{Z}. \ \triangle$$

Пример 6. Решить уравнение $\sin x + \sin 3x = 4 \cos^2 x$.

Решение. Перенесём все члены в левую часть и преобразуем её:

$$\sin x + \sin 3x - 4 \cos^2 x = 2 \sin 2x \cos x - 4 \cos^2 x =$$
$$= 2 \cos x\,(\sin 2x - 2 \cos x) = 2 \cos x\,(2 \sin x \cos x - 2 \cos x) =$$
$$= 4 \cos^2 x\,(\sin x - 1).$$

Уравнение приобрело вид: $4 \cos^2 x\,(\sin x - 1) = 0$.

Поскольку левая часть уравнения имеет смысл при всех значениях x, получаем два случая: $\cos x = 0$ или $\sin x - 1 = 0$,

$$\sin x = 1;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n \text{ или } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \text{где } n \in \boldsymbol{Z}.$$

Поскольку вторая серия корней полностью содержится в первой, её в ответе не указываем.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

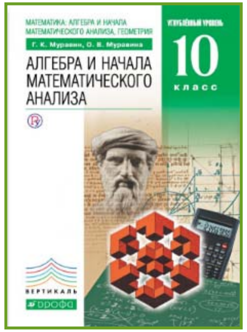
Упражнения

430. Решите уравнение:

1) $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$;
2) $\cos^2 x + \cos x = -\sin^2 x$;
3) $(\sin x - \cos x)^2 - 1 = 0$;
4) $\sin^2 x - 6 \sin x = 0$.

431. 1) Решите уравнение, сведя его к квадратному:

а) $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$;
б) $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$;
в) $6 - \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^2 x$;
г) $2 \operatorname{tg} x - 5 \operatorname{ctg} x = 3$;
д) $\cos x - \sin^2 x = 1$;



е) $\sin x = 5 + \cos^2 x$;

ж) $2\cos^2 x + 4 = -\sin x$;

з) $8\cos^4 x - 6\sin^2 x + 1 = 0$.

2) Выделите особенности уравнений, сводящихся к квадратным.

432. 1) Решите однородное уравнение:

а) $\sin x + \cos x = 0$;

б) $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x = 0$;

в) $\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$;

г) $\sin^2 x\cos^2 x - 3\cos^4 x = 0$.

2) Выделите особенности данных уравнений.

3) Какими ещё способами можно решить данные уравнения?

433. 1) Решите уравнение, сведя его к однородному:

а) $6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2$;

б) $3\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 3\cos^2 x - 2 = 0$.

2) Чем отличаются эти уравнения от однородных уравнений?

434. 1) Используя формулы, решите уравнение:

а) $\cos^2 x - \sin^2 x = -1$; в) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1$;

б) $\cos^4 x - \sin^4 x = 1$; г) $\cos^6 x + \sin^6 x = 1$.

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

2) Какие уравнения решаются с помощью формул понижения степени?

435. 1) Решите уравнение с помощью разложения на множители:

а) $(\cos x - 1)^2 = \cos^2 x - 1$;

б) $\cos x - \cos 2x = 1$;

в) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;

г) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

2) Укажите, в каком задании при разложении на множители использовались: способ группировки, вынесение за скобки, формулы сокращённого умножения.

436. Используя условия равенства одноимённых функций, решите уравнение:

1) $\sin 4x = \sin 7x$;

2) $\cos 4x - \cos 5x = 0$;

3) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 5x$;

4) $\operatorname{ctg} 5x - \operatorname{ctg} x = 0$;

5) $\sin\left(6x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$;

6) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{x}{2}$.

$\sin\alpha = \sin\beta$: $\alpha = \beta + 2\pi n$ или $\alpha = -\beta + (2n+1)\pi$, $n \in Z$;

$\cos\alpha = \cos\beta$: $\alpha = \pm\beta + 2\pi n$, $n \in Z$;

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$: $\alpha = \beta + \pi n$, $n \in Z$

437. Запишите условия, при которых выполняются равенства $\sin\alpha = \cos\beta$ и $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$. Используя полученные условия, решите уравнение:

1) $\sin 3x = \cos 4x$; 2) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} 5x$.

438. Докажите, что если $x^2 + y^2 = 1$, то существует такое число φ, что одновременно $\sin\varphi = x$ и $\cos\varphi = y$.

439. Докажите, что не имеет корней уравнение

$$(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 4x = 2.$$

440. Определите, если возможно, тип уравнения. Составьте план решения и выполните его.

1) $\sin^2 2x + 2\cos^2 2x = \frac{7}{4}$;

2) $3\cos^2 x + 4\sin x = 4$;

3) $\sin 2x - \sin x = 2\cos x - 1$;

4) $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x = 0$;

5) $\cos^2(45° + x°) - \cos^2(45° - x°) = -1$;

6) $\sin^3 x\cos x - \sin x\cos^3 x = \frac{1}{4}$;

7) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$;

8) $\cos 3x = \cos 5x$;

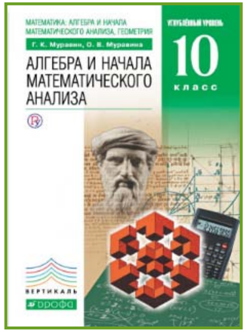
9) $\sin^2 x - 10\sin x\cos x + 21\cos^2 x = 0$;

10) $1 + \cos 3x + \cos 7x + \cos 10x = 0$;

11) $2\sin^2 x = 4 - 5\cos x$;

12) $7\sin^2 x = 8\sin x\cos x - \cos^2 x$;

13) $\sin 2x\cos 3x + \cos 2x\sin 3x = 1$;



14) $3 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 2$;

15) $\sin (x + \pi) = \cos \left(\frac{3\pi}{2} + x \right)$;

16) $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$;

17) $\cos^4 2x - \sin^4 2x = \frac{1}{2}$;

18) $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$.

441. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$4 \sin 3x \sin x - 2 \cos 2x + 1 = 0.$$

442. Найдите на отрезке $[-\pi; \pi]$ все корни уравнения

$$\cos 2x + \sin^2 x = \cos x.$$

443. Найдите на отрезке $[-\pi; \pi]$ все корни уравнения

$$\frac{2\cos^2 x + \cos x}{2\cos x + 7\sin^2 x} = -\frac{1}{2}.$$

444. Найдите все решения уравнения:

1) $\sin 2x + \cos x + 2 \sin x = -1$, удовлетворяющие условию $0 < x < 5$;

2) $\sqrt{3} \sin x + 2 \cos x = \sqrt{3} + \sin 2x$, удовлетворяющие условию $0 < x < 2$.

445. При каких значениях a наибольшее значение функции $y = a \sin x + \cos x$ равно 5?

446. Решите уравнение:

1) $4^{\sin x} = 2$;

2) $5 + 2^{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot 4^{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2}\cos x}}$;

3) $81^{(\sin 2x - 1)\cos 3x} - 9^{(\sin x - \cos x)^2} = 0$;

4)* $\operatorname{ctg} 2^x = \operatorname{tg} 2^x + 2 \operatorname{tg} 2^{x+1}$.

! Контрольные вопросы и задания

1. Какие способы решения тригонометрических уравнений вы знаете?
2. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0$;

б) $6 \sin^2 x - \cos x = 5$;

в) $\sin^2 x - \sin 2x = 0$;

г) $\sqrt{3} \cos^2 x - \sin x \cos x = 0$.

26. Решение тригонометрических уравнений

441. $4 \sin 3x \sin x - 2 \cos 2x + 1 = 0$. Поскольку $2 \sin 3x \cdot \sin x = \cos 2x - \cos 4x$, имеем $2 \cos 2x - 2 \cos 4x - 2 \cos 2x + 1 = 0$; $2 \cos 4x - 1 = 0$; $\cos 4x = \frac{1}{2}$, $4x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. Искомый корень уравнения $x = \frac{\pi}{12}$.

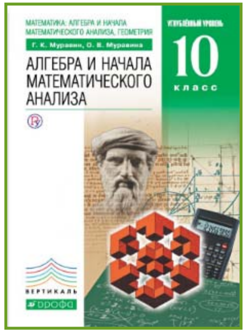
443. $\frac{2\cos^2 x + \cos x}{2\cos x + 7\sin^2 x} = -\frac{1}{2}$;

$\frac{4\cos^2 x + 2 \cos x + 2 \cos x + 7 \sin^2 x}{2(2 \cos x + 7 \sin^2 x)} = 0$,

$4 \cos^2 x + 4 \cos x + 7 - 7 \cos^2 x = 0$, $3 \cos^2 x - 4 \cos x - 7 = 0$, $\cos x = -1$. На отрезке $[-\pi; \pi]$ $\cos x = -1$ при $x = \pm\pi$. Эти значения не обращают знаменатель в нуль.

444. 2) $\sqrt{3} \sin x + 2 \cos x = \sqrt{3} + 2 \sin x \cos x$;
$\sqrt{3} + 2 \sin x \cdot \cos x - 2 \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$;
$\sqrt{3}(1 - \sin x) - 2 \cos x(1 - \sin x) = 0$; $(1 - \sin x)(\sqrt{3} - 2 \cos x) = 0$;
$\sin x = 1$ или $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ или $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
Из множества решений выбираем те, которые удовлетворяют условию $0 < x < 2$: $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{6}$.

446. 2) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2} \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos (x - \sin x)}{\sqrt{2} \cos x} = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{tg} x)$. $5 + 2^{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot 4^{\frac{1}{2}(1 - \operatorname{tg} x)}$; $5 + 2^{\operatorname{tg} x} = 3 \cdot 2^{1 - \operatorname{tg} x}$; $2^{\operatorname{tg} x} - 6 \cdot 2^{-\operatorname{tg} x} + 5 = 0$. Обозначим $2^{\operatorname{tg} x} = y$ и найдём положительный корень уравнения $y - \frac{6}{y} + 5 = 0$; $y^2 + 5y - 6 = 0$; $y = 1$. Вернёмся к переменной x: $2^{\operatorname{tg} x} = 1$; $\operatorname{tg} x = 0$; $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$; 4) пусть $2^x = y$, где $y > 0$, тогда $\frac{1}{\operatorname{tg} y} - \operatorname{tg} y = 2 \operatorname{tg} 2y$; $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 y}{\operatorname{tg} y} = 2 \operatorname{tg} 2y$; $\operatorname{ctg} 2y = \operatorname{tg} 2y$; $2y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, где, поскольку значения y



26. Решение тригонометрических уравнений (5 ч)

На первом уроке рассматривается решение тригонометрических уравнений сведением к квадратному уравнению и разложением на множители.

Начинается урок с самостоятельной работы по вариантам под копирку с целью повторения решения разных видов уравнений, изученных ранее.

Самостоятельная работа

Вариант 1	Вариант 2
1. Решите уравнение на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$:	
а) $\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\operatorname{tg} x = 2$	а) $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\operatorname{ctg} x = 3$
2. Решите уравнение:	
а) $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$; б) $\cos 3x \cos 6x =$ $= \cos 4x \cos 7x$	а) $\cos 5x + \cos 7x =$ $= -\cos 6x$; б) $\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$

Ответы к самостоятельной работе

Вариант 1. 1. а) $\frac{5\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}$; б) $\pi + \operatorname{arctg} 2$.

2. а) $\frac{\pi n}{2}, 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbf{Z}$; б) $\frac{\pi n}{10}, \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbf{Z}$.

В начале второго урока проводится устная работа.

Составьте план решения уравнения:

1) $\sin x \cos x = -\frac{1}{4}$;

2) $\sin x - \cos x = 0$;

3) $\cos^2 x + \cos x = 0$;

4) $3\cos^2 x + \cos x - 4 = 0$;

5) $8\cos^2 x + 6\sin x - 3 = 0$;

6) $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin \frac{\pi}{2}$.

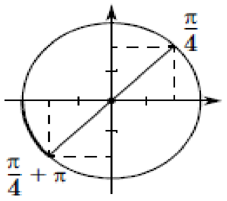


Рис. 21

В случаях 1), 6) используются формулы двойного аргумента, в случае 3) уравнение лучше решать разложением на множители. Уравнение 4) — квадратное относительно $\cos x$, а уравнение 5) сводится к квадратному относительно $\sin x$.

Возможно, что составление плана решения уравнения 2) вызовет у школьников затруднения. Это уравнение можно решить разными способами.

Способ 1. Можно воспользоваться графическими соображениями и отметить на тригонометрическом круге (рис. 21) углы, синусы и косинусы которых равны. Это $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}$.

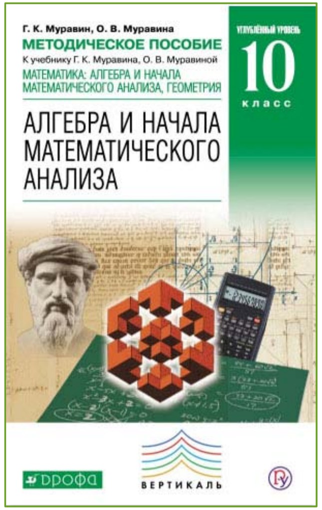
Способ 2. Можно использовать преобразование суммы синусов или косинусов в произведение:

$$\sin x - \cos x = 0, \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0,$$

$$2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} = 0, \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

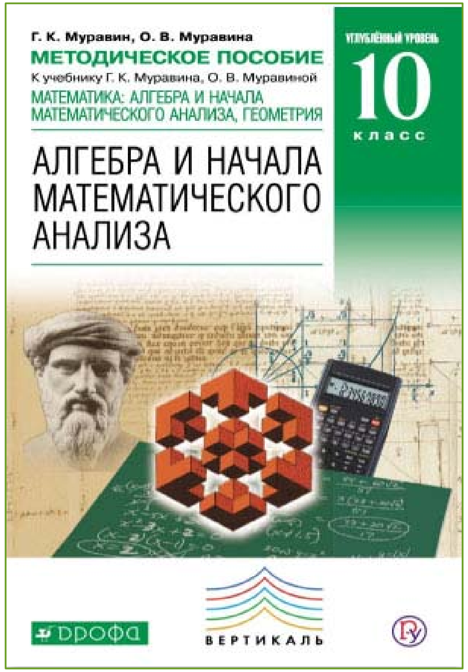
$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Способ 3. Решение уравнения делением на $\cos x$, не забыв, конечно, рассмотреть два случая: 1) $\cos x = 0$, $\sin x = 0$, что не соответствует условию случая; 2) $\cos x \neq 0$, $\operatorname{tg} x - 1 = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$.



корпорация российский учебник

LECTA



Ученики самостоятельно выполняют № 434 (в) и дополнительные уравнения, которые также решаются с использованием формул понижения степени.

Решите уравнение:

1) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 1{,}5$;

2) $\cos^2 x + 3\sin^2 x = 2$.

Решение.

1) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 1{,}5$,

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{3}{2},$$

$\cos 4x + (\cos 2x + \cos 6x) = 0$,

$\cos 4x + 2\cos 4x \cos 2x = 0$,

$$2\cos 4x\left(\cos 2x + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$\cos 4x = 0 \text{ или } \cos 2x = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z,\ \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$;

2) $\cos^2 x + 3\sin^2 x = 2$,

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{3-3\cos 2x}{2} = 2,\ 4 - 2\cos 2x = 4,$$

$$\cos 2x = 0,\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.$$

30. Уравнения и неравенства

524. Является ли равносильным преобразование, связанное с заменой выражения а) выражением б)?
Если преобразование неравносильно, укажите причину неравносильности. Запишите дополнительные условия, выполнение которых следует проверить, чтобы избежать появления посторонних решений, или какие случаи следует дополнительно рассмотреть, чтобы не потерять решения.

1) а) $\dfrac{x^2-1}{x+1}$; б) $x-1$;

2) а) $x-1$; б) $\dfrac{x^2-1}{x+1}$;

3) а) $x+1$; б) $\sqrt{x^2+1+2x}$;

4) а) $\sqrt{x^2+1+2x}$; б) $x+1$;

5) а) $\sqrt{x^2+1+2x}$; б) $|x+1|$;

6) а) $\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; б) $\dfrac{\operatorname{tg} x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg} x}$;

7) а) $\sqrt{1-\sin^2 x}$; б) $\cos x$;

8) а) $1+\operatorname{tg}^2 x$; б) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$;

525. Является ли равносильным преобразование уравнения а) в уравнение б)?
Если преобразование неравносильно, укажите причину неравносильности. Запишите дополнительные условия, выполнение которых следует проверить, чтобы избежать появления посторонних решений, или случаи, которые следует дополнительно рассмотреть, чтобы не потерять решения.

1) а) $\sqrt{3x^2+2x-1}=2x-1$; б) $x^2-6x+2=0$;

2) а) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=4$;
б) $2x+3+x-2+2\sqrt{2x+3}\cdot\sqrt{x-2}=16$;

3) а) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=4$;
б) $2x+3+x-2+2\sqrt{(2x+3)(x-2)}=16$;

4) а) $\log_{7-x}(x^3+9)=\log_{7-x}((x+3)(x-1)^2)$;
б) $x^3+9=(x+3)(x-1)^2$;

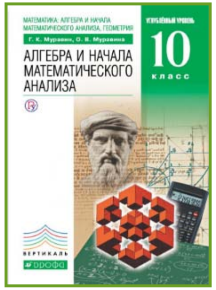
5) а) $|\sin x|\cos x=\sin^2 x$; б) $\cos x=\sin x$;

6) а) $\log_{\cos x}\sin x+\log_{\sin x}\cos x=2$;
б) $\log_{\cos x}\sin x+\dfrac{1}{\log_{\cos x}\sin x}=2$;

7) а) $\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1-\cos x}{1-\sin|x|}$; б) $\operatorname{tg}^2|x|=\dfrac{1-\cos|x|}{1-\sin|x|}$;

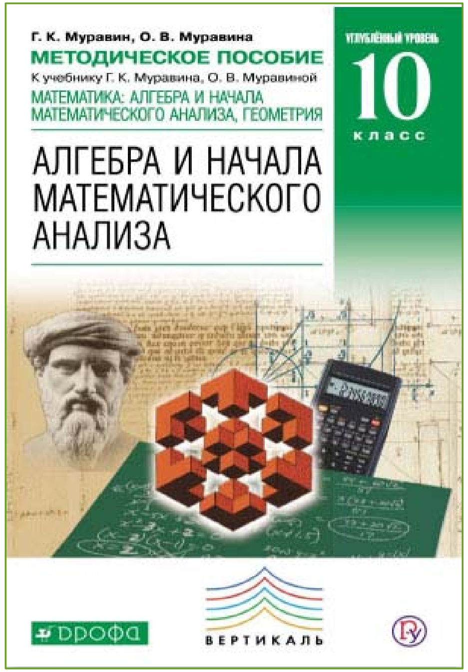
8) а) $2\sin 2x+\cos 2x+1=0$;
б) $\dfrac{4\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}+\dfrac{1-\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}+1=0$.

Завершите решения уравнений 1), 2), 4)—8).



корпорация российский учебник

LECTA



Затем обсуждается и решается № 525 (5).

№ 525 (5). Решение. Здесь следует рассмотреть два случая: 1) $\sin x = 0$; 2) $\sin x \neq 0$.

1) $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$;

2) $\sin x \neq 0$, $\cos x = |\sin x|$, $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: πn; $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Полезно рассмотреть оформление решения с помощью символов:

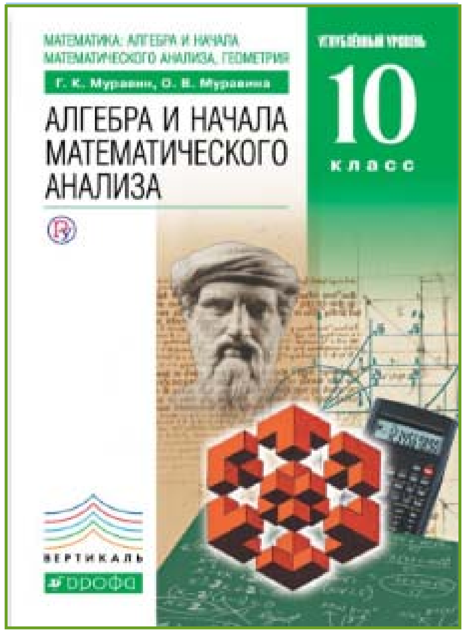
$$|\sin x|\cos x = \sin^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x = |\sin x| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi n, \\ x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbf{Z}.$$

При решении № 530 (8), переходя ко второму неравенству, следует дополнительно потребовать выполнения условия $\cos x > 0$ (при этом синус будет отличен от 1, а его положительность будет вытекать из самого неравенства):

$$\log_{\sin x} \cos x > 1, \ \log_{\sin x} \cos x > \log_{\sin x} \sin x.$$

В силу убывания логарифмической функции с основанием, меньшим 1, имеем с учетом требования положительности выражения, стоящего под знаком логарифма: $0 < \cos x < \sin x$, $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.



30. Уравнения и неравенства

530. Является ли равносильным преобразование неравенства а) в неравенство б)? Если преобразование неравносильно, запишите дополнительные условия, которым должны удовлетворять решения второго неравенства или какие случаи следует дополнительно рассмотреть, чтобы не потерять решения:

7) а) $\lg (x - 2)^2 < \lg (x^2 - 4) - \lg (-x - 2)$;
б) $2 \lg (2 - x) < \lg (2 - x)$;

8) а) $\log_{\sin x} \cos x > 1$; б) $\cos x < \sin x$.

Завершите решение неравенств.

Пример 2. Решить уравнение
$$2 \sin 2x + \cos 2x + 1 = 0.$$

Р е ш е н и е. Выразим синус и косинус через тангенс половинного аргумента — приём, который называют *универсальной подстановкой*:

$$2 \sin 2x + \cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{4 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 1 = 0, \\ \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}, \\ 2 \sin 2x + \cos 2x + 1 = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 \operatorname{tg} x + 2 = 0, \\ \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}, \\ 0 - 1 + 1 = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\operatorname{arctg} \dfrac{1}{2} + \pi n, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array} \right.$$

О т в е т: $\dfrac{\pi}{2} + \pi n, -\operatorname{arctg} \dfrac{1}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$.

Интерактивы в ЭФУ

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определения арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса числа.
2. Вычислите $\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.
3. Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$:
   а) $\sin x-0{,}5=0$; б) $\operatorname{tg} x-1=0$.

284. Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$:

1) $\sin x=0$;
2) $\cos x-1=0$;
3) $3\operatorname{tg} x+\sqrt{3}=0$;
4) $\operatorname{ctg}^2 x-3=0$;
5) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=1$;
6) $\operatorname{ctg}(x-\pi)-1=0$;
7) $2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{2}=0$;
8) $2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x=0$.

Простейшие тригонометрические уравнения

Решите уравнение $\cos^2 x = 1$.

1 2 3 4 5

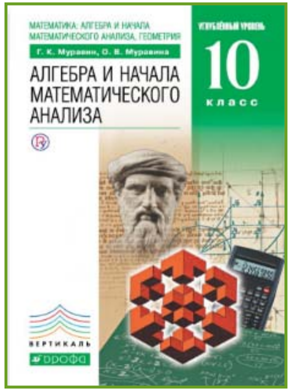
- $\pi n,\ n \in Z$
- $2\pi n,\ n \in Z$
- $\pi + 2\pi n,\ n \in Z$
- $-\pi + 2\pi n,\ n \in Z$

Решение простейших тригонометрических уравнений

Укажите корни уравнений, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

1

$\frac{\pi}{4}$	$\sin x = 1$	$\frac{2\pi}{3}$
2π	$\cos x = 1$	$\frac{5\pi}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$	$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{4}$	$\operatorname{tg} x = 1$	0
	$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	



Контрольная работа в учебниках

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА»

Вариант 1

I уровень

Укажите номер ответа, который вы считаете верным.

1. Найдите значение выражения

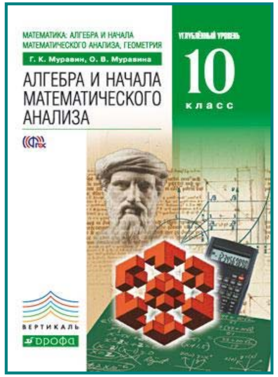
$$\frac{\sin 50^\circ \cdot \cos 5^\circ - \sin 5^\circ \cdot \cos 50^\circ}{2\cos^2 15^\circ - 1}.$$

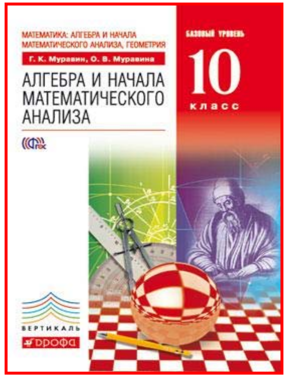
Ответы: 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

2. Упростите выражение $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{1 + \sin 2\alpha}$.

Ответы: 1) 1; 3) $\frac{1}{1 + \sin 2\alpha}$;

2) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$; 4) $1 + \sin 2\alpha$.





3. Найдите наименьший положительный корень уравнения $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$.

Ответы: 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{4}$.

4. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Ответы: 1) $-\frac{8}{17}$; 2) $\frac{2}{17}$; 3) $\frac{6}{17}$; 4) $\frac{8}{17}$.

5. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \sin^2 x$ и $y = \cos^2 x$.

Ответы: 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$;

2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

II уровень

6. Сколько корней имеет уравнение

$$\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)\sqrt{4 - x^2} = 0\ ?$$

7. Решите неравенство $\sin\frac{4x}{3} > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Найдите $\cos\alpha - \sin\alpha$, если известно, что

$\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{1}{4}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

III уровень

9. Сравните числа

$\frac{\sin 115^\circ}{16\sin 7^\circ}$ и $\cos 7^\circ \cos 14^\circ \cos 28^\circ \cos 56^\circ$.

10. Решите уравнение $2\sin^2 x = |\sin x|$.

Решение тригонометрических уравнений. ЕГЭ. Профильный уровень

13 а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

13. а) Решите уравнение $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \cdot \sin 2x = \left(\sqrt{3} - 1\right)\cos^2 x + 1$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

13. а) Решите уравнение $\sqrt{10\cos x} - \sqrt{4\cos x - \cos 2x} = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$

13. а) Решите уравнение $(\sin x + \cos x)\sqrt{2} = tgx + ctgx$

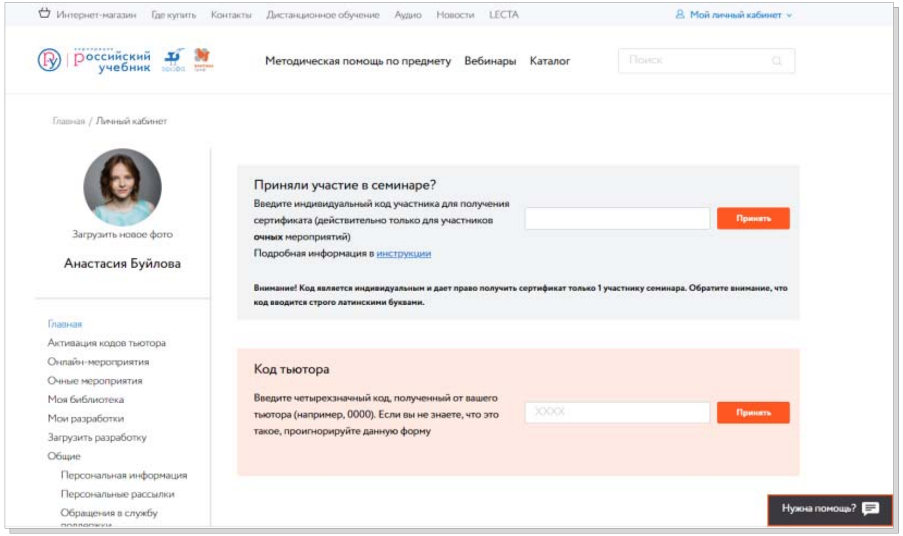
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$

13. а) Решите уравнение $\sin 2x = \sin x - 2\cos x + 1$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

РЕГИСТРИРУЙТЕСЬ НА САЙТЕ ROSUCHEBNIK.RU И ПОЛЬЗУЙТЕСЬ ПРЕИМУЩЕСТВАМИ ЛИЧНОГО КАБИНЕТА

- Регистрируйтесь на очные и онлайн-мероприятия
- Получайте сертификаты за участие в вебинарах и конференциях
- Пользуйтесь цифровой образовательной платформой LECTA
- Учитесь на курсах повышения квалификации
- Скачивайте рабочие программы, сценарии уроков и внеклассных мероприятий, готовые презентации и многое другое
- Создавайте собственные подборки интересных материалов
- Участвуйте в конкурсах, акциях и спецпроектах
- Становитесь членом экспертного сообщества
- Сохраняйте архив обращений в службу техподдержки
- Управляйте новостными рассылками



корпорация российский учебник
дрофа
вентана граф

корпорация российский учебник

Информационно-методическая поддержка

Муравин Георгий Константинович
Муравина Ольга Викторовна

E-mail: olgamuravina@gmail.com

Сайт: Muravins.ru

Хотите купить?

book 24

Официальный интернет-магазин учебной литературы
book24.ru

LECTA

Цифровая среда школы
lecta.rosuchebnik.ru

Отдел продаж
sales@rosuchebnik.ru

Хотите продолжить общение?

youtube.com/user/drofapublishing

fb.com/rosuchebnik

vk.com/ros.uchebnik

ok.ru/rosuchebnik

корпорация российский учебник

дрофа вентана граф

корпорация российский учебник

rosuchebnik.ru, росучебник.рф

Москва, Пресненская наб., д. 6, строение 2
+7 (495) 795 05 35, 795 05 45, info@rosuchebnik.ru

Нужна методическая поддержка?

Методический центр
8-800-2000-550 (звонок бесплатный)
metod@rosuchebnik.ru

Хотите купить?

book 24

Официальный интернет-магазин учебной литературы
book24.ru

LECTA

Цифровая среда школы
lecta.rosuchebnik.ru

Отдел продаж
sales@rosuchebnik.ru

Хотите продолжить общение?

youtube.com/user/drofapublishing

fb.com/rosuchebnik

vk.com/ros.uchebnik

ok.ru/rosuchebnik

корпорация российский учебник

дрофа вентана граф