корпорация российский учебник

LECTA

Решение задач с параметром в УМК А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.М. Поляков

Ким Н.А. учитель школы №875

Методы решения задач с параметрами

Математические методы решения задач с параметрами

- Аналитические методы
- Графические методы
- Логические методы

Аналитические методы

- Найти *x* и проверить условие задания
- Ввести функцию *f(t)* и записать в виде *f(P(x))=f(Q(x))*
- Ввести функцию *f(t)* и записать в виде *f(f(x))=x*
- Записать в виде *f(x)=c* , где *c=const*
- Использовать свойства функций
- Использовать производную
- Применить векторы или тригонометрию

Примеры задач, для которых полезны аналитические методы

1) Найти все значения a, при каждом из которых уравнение имеет более 1 корня

$$8x^6-(3x+5a)^3+2x^2-3x=5a$$

2) Найти все значения a, при каждом из которых уравнение имеет решение

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}}=\sin x$$

3) При всех $a>0$, решить урав-е $a\sqrt{3x-5}-\sqrt[2018]{4-x}=2a-1$

4) Найти все значения a, при каждом из которых уравнение имеет хотя бы 1 корень

$$4x-|3x-|x+a||=9|x-1|$$

5) Для каждого b найти все пары чисел (x,y), удовлетворяющие уравнению

$$b\cdot\sin 2y+\log_4\left(x\cdot\sqrt[8]{1-4x^8}\right)=b^2$$

Примеры задач, для которых полезны аналитические методы

(6) Найти наибольшее значение функции и точку x, в которой это значение достигается

$$\frac{9^x}{4^x-6^x+9^x}$$

(7) Найти наименьшее значение выражения и все пары (a, x), при которых оно достигается

$$\sqrt{106+\log_a^2\cos ax+\log_a\cos^{10}ax}+\sqrt{58+\log_a^2\sin ax+\log_a\sin^6 ax}+$$
$$+\sqrt{5+\log_a^2\operatorname{tg} ax+\log_a\operatorname{tg}^2 ax}$$

(8) Среди всех решений (x, y, z, υ) системы найти такие, при каждом из которых выражение x+z принимает наибольшее значение

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z^2+\upsilon^2=9 \\ x\cdot\upsilon+yz\geqslant 6 \end{cases}$$

Примеры задач, для которых полезны аналитические методы: пример №1

Найти все значения a, при каждом из которых уравнение имеет более одного корня

$$8x^6-(3x+5a)^3+2x^2-3x=5a$$

$$(2x^2)^3+2x^2=(3x+5a)^3+(3x+5a)$$

Введем функцию $y=f(t)=t^3+t$, возрастающую,

Тогда $f(P(x))=f(Q(x))$, где $P(x)=2x^2$, а $Q(x)=3x+5a$

равносильно $P(x)=Q(x)$, т.е. $2x^2=3x+5a \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2-3x-5a=0$ $\quad D=9+40a>0 \Rightarrow a>-\frac{9}{40}$

Ответ: $a>-\frac{9}{40}$

Примеры задач, для которых полезны аналитические методы: пример №2

Решение примера №2: Найти все значения a, при каждом из которых уравнение имеет решение

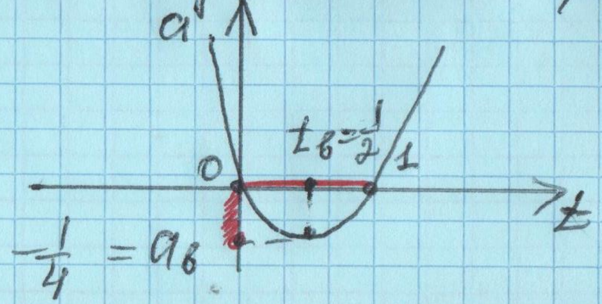
$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}}=\sin x$$

Введем функцию $y=f(t)$ и запишем уравнение в виде $f(f(x))=x$, корнями которого являются корни уравнения $f(x)=x$.

Пусть $y=f(t)=\sqrt{a+t}$ возрастающая функция, где $t=\sin x$, $t\in[-1;1]$, тогда $f(f(t))=t \Rightarrow f(t)=t$

т.е. $\sqrt{a+t}=t \Rightarrow t^2-t-a=0 \Rightarrow \begin{cases} t\geq 0 \\ t^2-t-a=0 \end{cases} \Rightarrow a=t^2-t$

При каких значениях a ур-ие $t^2-t-a=0$ имеет хотя бы 1 решение, где $t\in[0;1]$



$t_в=\frac{1}{2}$ $\quad a_в=f(t_в)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

Ответ: $a\in\left[-\frac{1}{4};0\right]$

Примеры задач, для которых полезны аналитические методы: пример №3

Решение примера №3: При всех $a>0$, решить уравнение $a\cdot\sqrt{3x-5}-\sqrt[2018]{4-x}=2a-1$

Используем свойство монотонности функции

$$\underbrace{\underbrace{a\cdot\sqrt{3x-5}}_{\uparrow}}_{\uparrow \text{ т.к. } a>0}-\underbrace{\underbrace{\sqrt[2018]{4-x}}_{\searrow}}_{\searrow}=\underbrace{2a-1}_{\text{const.}}$$

$$\underbrace{-\sqrt[2018]{4-x}}_{\nearrow}$$

По нашей схеме монотонности функций:

$\uparrow+\uparrow=\text{const}\Rightarrow$ если уравнение имеет корень, то он один. Рассмотрим О.Д.З.

$$\begin{cases}3x-5\geq 0\\4-x\geq 0\end{cases}\quad\begin{cases}x\geq\frac{5}{3}\\x\leq 4\end{cases}$$

$5/3$ 3 4 x

Проверим $x=3$

$\Rightarrow a\cdot\sqrt{9-5}-\sqrt[2018]{4-3}=2a-1\Rightarrow 2a-1=2a-1\Rightarrow\forall a>0$

Ответ: $\forall a$, $x=3$

Графические методы

- Применить теорему о расположении корней квадратного трехчлена на координатной прямой
- Использовать теорему Виета
- Изобразить графики на фазовой плоскости
- Использовать метод областей (метод интервалов на плоскости)
- Использовать преобразование графиков

Технические приемы в задачах, которые решаются графически

1. Нужный вариант ***взаимного расположения окружностей*** определяется через расстояние между их центрами.

2. Условия ***касания*** прямой и параболы, прямой и окружности, прямой и гиперболы удобно получать приравнивания к нулю дискриминант квадратного уравнения, полученного подстановкой в нелинейное уравнение кривой вместо *у* линейного выражения *у через х.*

3. Решая задачу методом областей, надо учитывать, что графиком уравнения *y=f(x)* является плоская ***кривая***, а графиком уравнения z=f(x, y) в пространстве является ***поверхность***. Считаем, что любая ***кривая имеет нулевую площадь***, а ***поверхность - нулевой объем.***

4. Для отыскания точки пересечения отрезка и другой кривой удобно заменить ***уравнение отрезка уравнением прямой***, содержащей этот отрезок.

Примеры задач, для которых полезны графические методы

Найдите a, имеет ! корень

$$ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2$$

Решение

$$\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2-ax$$

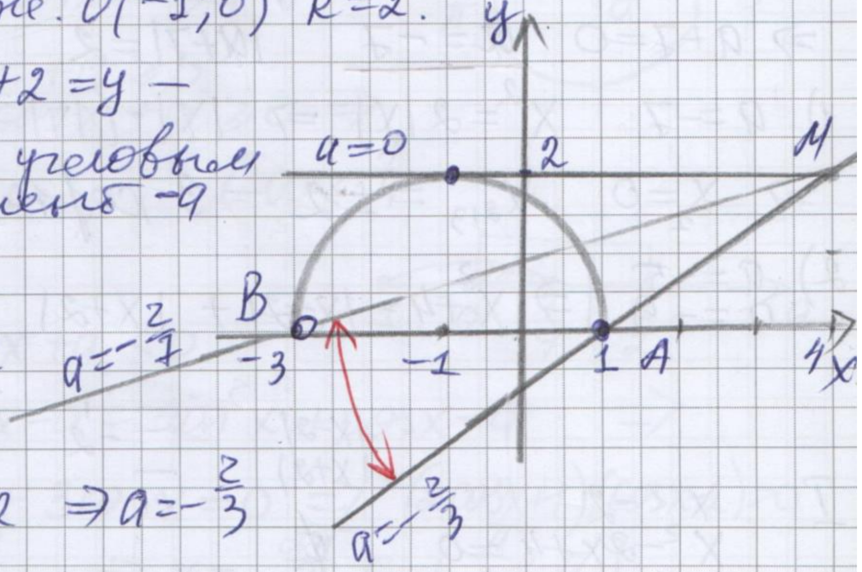
$f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$ и $g(x)=-ax+4a+2=-a(x-4)+2$

$f(x)=\sqrt{2^2-(x+1)^2}=y \Rightarrow y^2+(x+1)^2=2^2$ —

— полуокружн. $O(-1;0)$ $R=2$.

$g(x)=-a(x-4)+2=y$ —

— прямая с угловым коэффициент $-a$ и т. $M(4;2)$



$y=-a(x-4)+2$

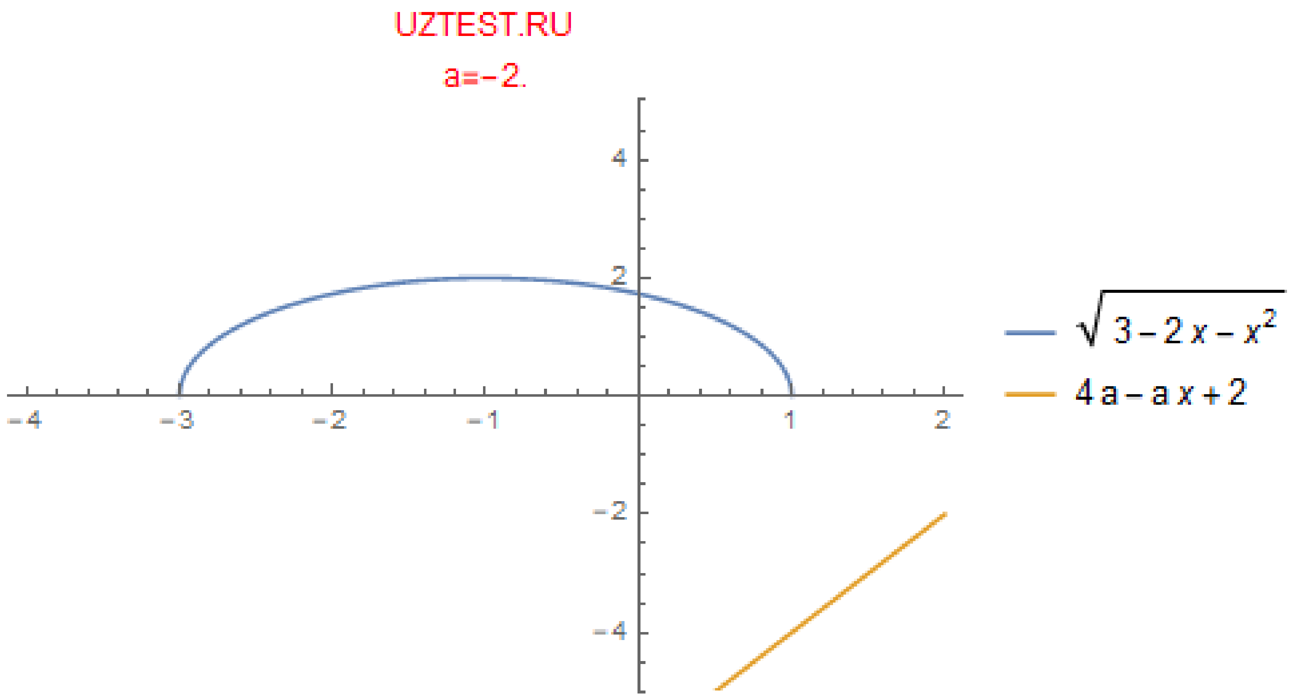
$A(1;0) \Rightarrow$

$0=-a\cdot(-3)+2 \Rightarrow a=-\frac{2}{3}$

$B(-3;0) \Rightarrow$

$0=-a\cdot(-7)+2 \Rightarrow a=-\frac{2}{7}$

Ответ: $0;\ \left[-\frac{2}{3};-\frac{2}{7}\right)$



Примеры задач, для которых полезны графические методы

Найдите значение a, при котором уравнение имеет хотя бы одно решение меньше 2.

$$|\log_{0,5} x^2 - a| - |\log_{0,5} x + 2a| = (\log_{0,5} x)^2$$

Решение. Пусть $\log_{0,5} x = t$, $0 < x < 2 \Rightarrow t > -1$

$|2t - a| - |t + 2a| = t^2$, $t > -1$

$2t = a$ $\quad t + 2a = 0 \Rightarrow a = -0,5t$

I $\;2t - a - t - 2a = t^2 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3}t$

$t_в = 0,5 \quad a_в = 1/12$

II $\;-2t + a - t - 2a = t^2 \Rightarrow a = -t^2 - 3t$

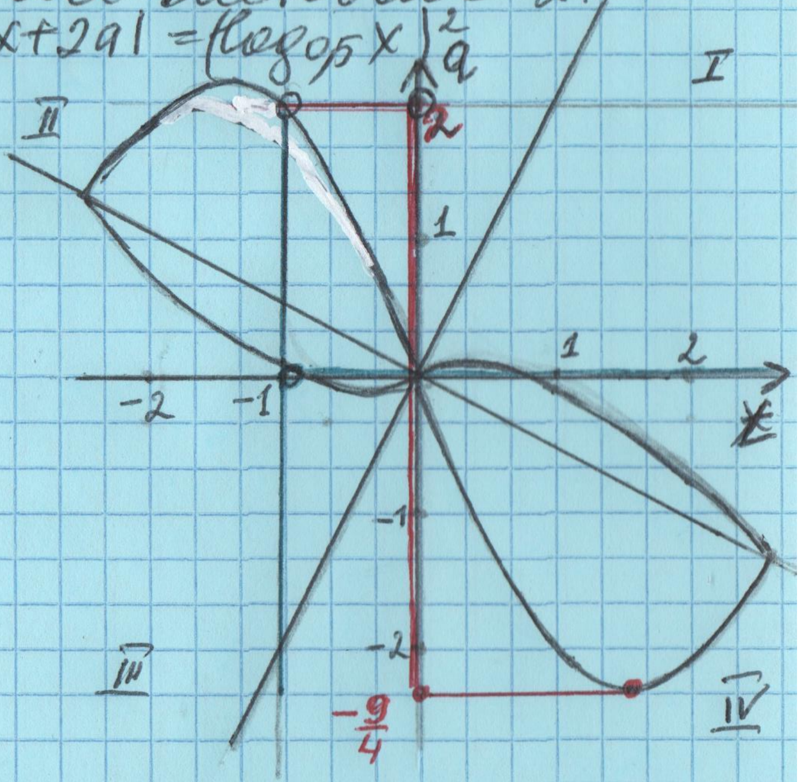
$t_в = -1,5 \quad a_в = 2,25$

III $\;-2t + a + t + 2a = t^2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3}t$

$t_в = -0,5 \quad a_в = -1/12$

IV $\;2t - a + t + 2a = t^2 \Rightarrow a = t^2 - 3t$

$t_в = 1,5 \quad a_в = -2,25$



Ответ: $\left[-\frac{9}{4}; 2\right)$

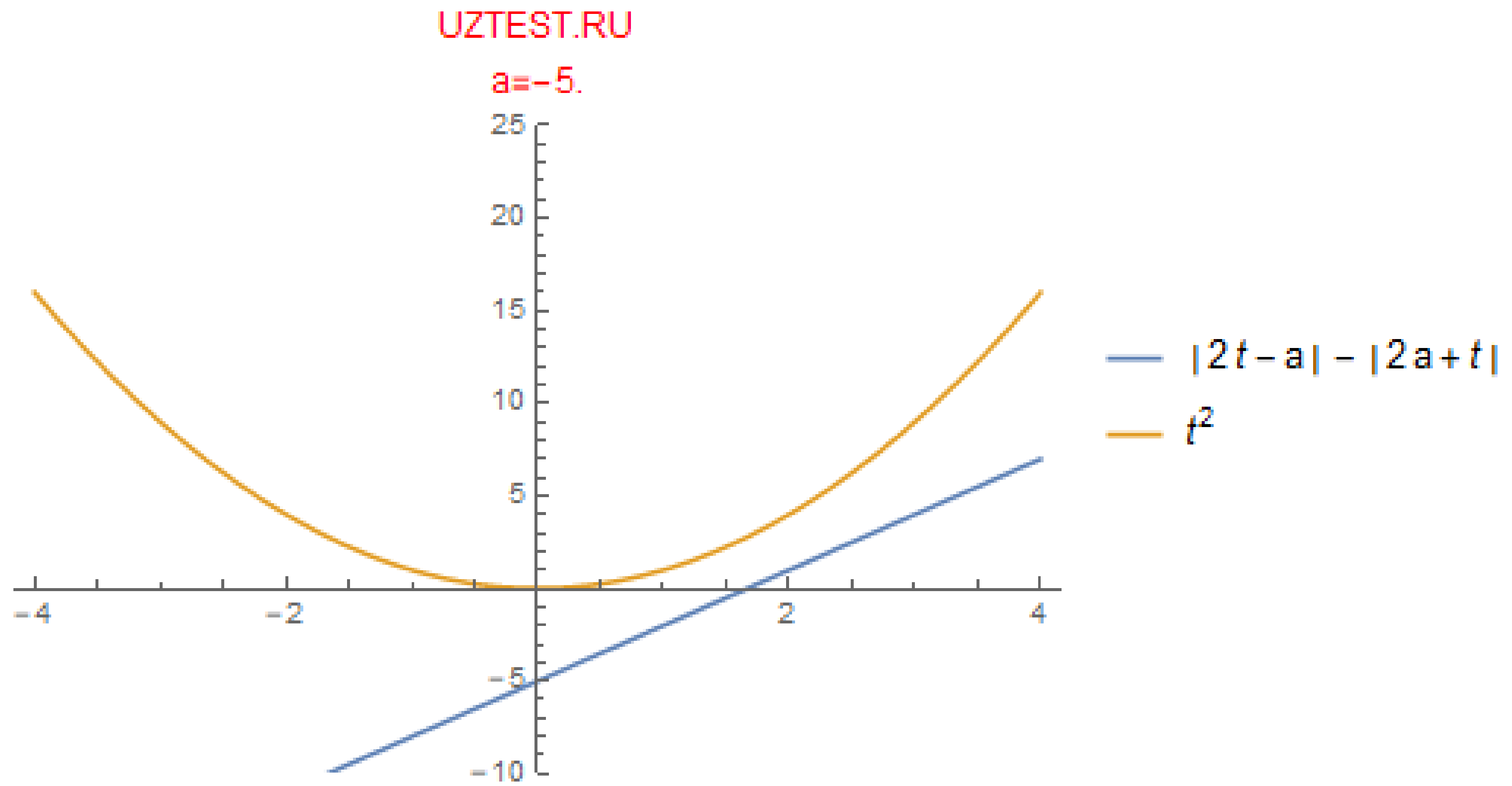
Примеры задач, для которых полезны графические методы

$$|\log_{0,5} x^2 - a| - |\log_{0,5} x + 2a| = (\log_{0,5} x)^2$$

Пусть $\log_{0,5} x = t \Rightarrow |2t - a| - |t + 2a| = t^2, \quad t > -1$

Рассмотрим два графика двух функций $y_1 = |2t - a| - |t + 2a|$

$y_2 = t^2$



Примеры задач, для которых полезны графические методы

Найти значение a, при которых уравнение имеет единственное решение

$$|2^{1-x}-a|-\left|\frac{1}{2^x}+2a\right|=4^{-x}$$

Решение: пусть $2^{-x}=t>0 \Rightarrow |2\cdot t-a|-|t+2a|=t^2$

Уравнение не изменится при одновременной замене a на $-a$ и t на $-t$ $\Rightarrow$ график уравнения симметричен относительно $(0;0)$ в системе tOa

I $\begin{cases} 2t-a\geq 0 \\ t+2a\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\leq 2t \\ a\geq -0{,}5t \end{cases} \Big| \Rightarrow 2t-a-t-2a=t^2$

$a=-\frac{1}{3}t^2+\frac{1}{3}t$

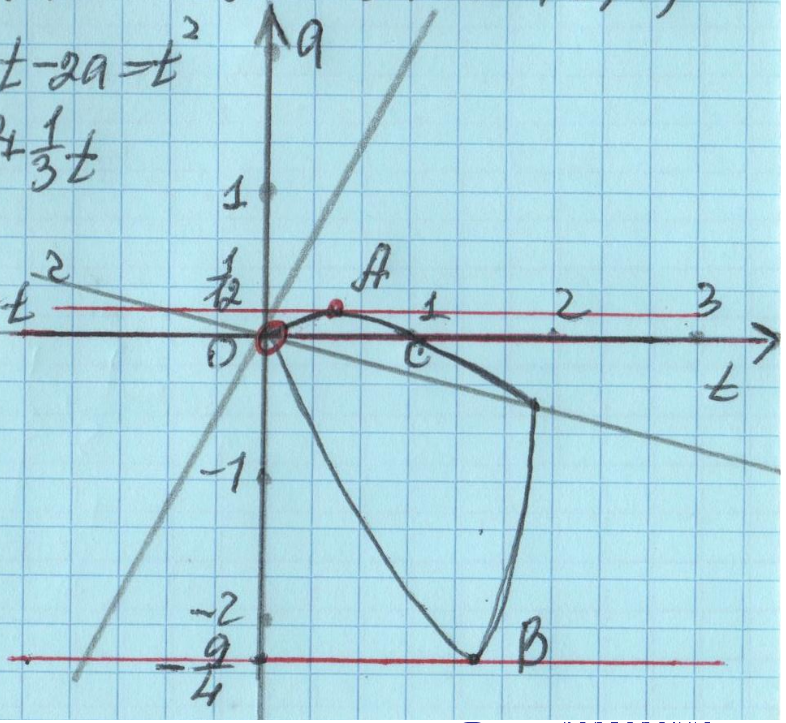
$t_в=\frac{1}{2}$ $a_в=\frac{1}{12}$ $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{12}\right)$

II $\begin{cases} 2t-a\geq 0 \\ t+2a\leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\leq 2t \\ a\leq -0{,}5t \end{cases} \Big| \Rightarrow 2t-a+t+2a=t^2$

$a=t^2-3t$

$t_в=\frac{3}{2}=1{,}5$ $a_в=-\frac{9}{4}$ $B\left(1{,}5;-\frac{9}{4}\right)$

Ответ $\left\{-\frac{9}{4};0;\frac{1}{12}\right\}$



Примеры задач, для которых полезны графические методы

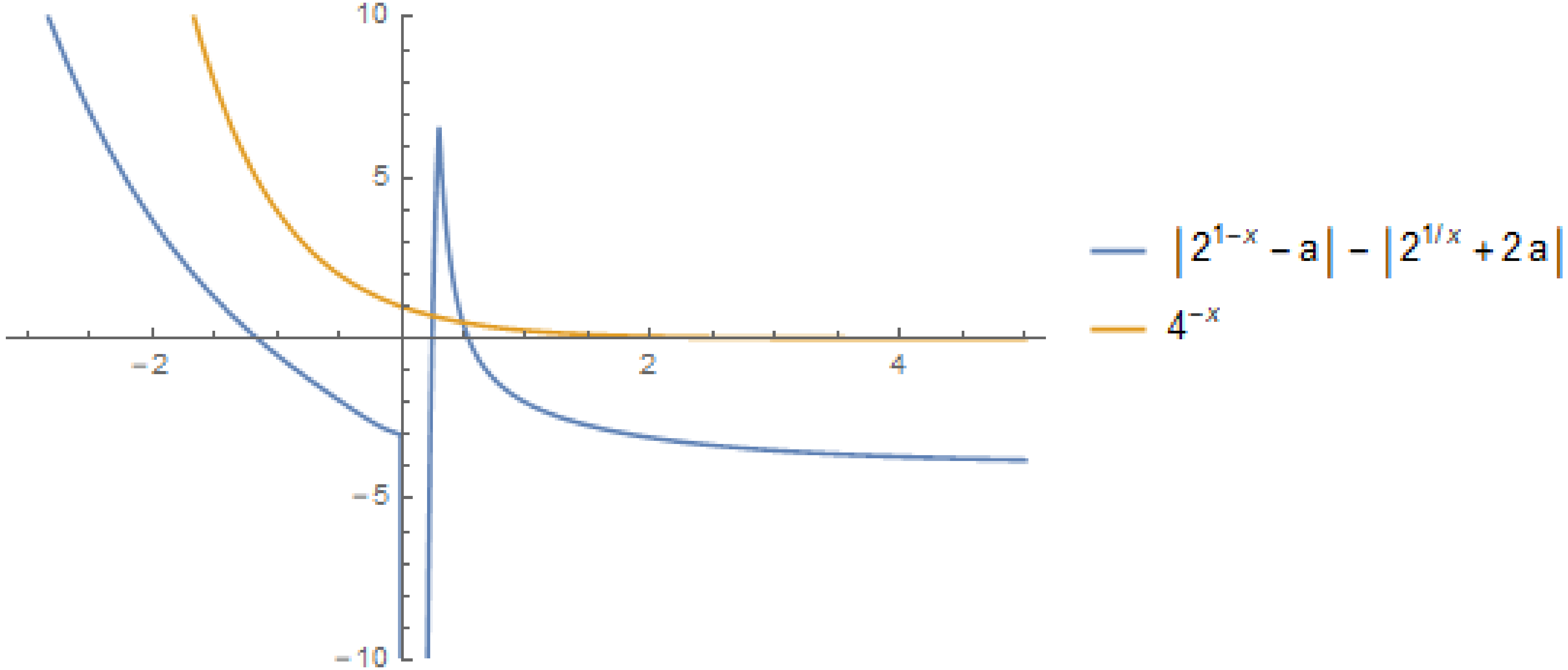
$$\left|2^{1-x}-a\right|-\left|2^{\frac{1}{x}}+2a\right|=4^{-x}$$

Рассмотрим две функции $y_1=\left|2^{1-x}-a\right|-\left|2^{\frac{1}{x}}+2a\right|$

и их графики $y_2=4^{-x}$

UZTEST.RU

a=−5.



Примеры задач, для которых полезны графические методы

Найти a, имеет более 2 решений

$$\begin{cases} x^2+2x+y^2+4y=4|2x-y| & (1)\\ x+2y=a & (2)\end{cases}$$

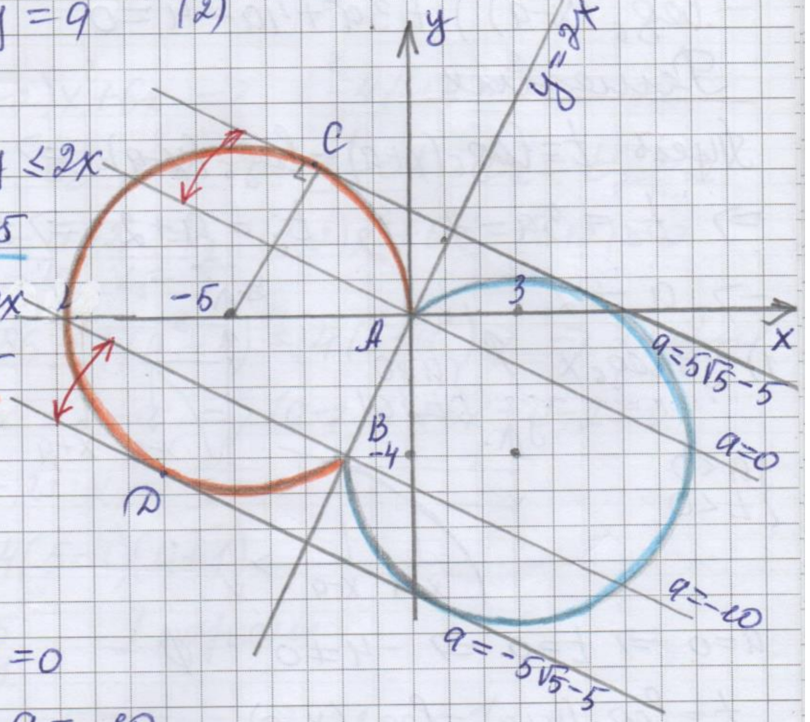
Решение

(1) 1) $2x-y\ge 0$ $y\le 2x$

$(x-3)^2+(y+4)^2=25$

2) $2x-y<0$; $y>2x$

$(x+5)^2+y^2=25$



(2) $x+2y=a$

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a$

$A(0;0)\Rightarrow a=0$

$B(-2;-4)\Rightarrow a=-10$

$(x+5)^2+\frac{1}{4}(a-x)^2=25 \Rightarrow 5x^2+x(40-2a)+a^2=0$

$D=(40-2a)^2-4\cdot 5a^2=0$ $(40-2a)^2-(2\sqrt{5}a)^2=0$

$(40-2a-2\sqrt{5}a)(40-2a+2\sqrt{5}a)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1=5\sqrt{5}-5$ и $a_2=-5\sqrt{5}-5$

Ответ: $-5\sqrt{5}-5<a\le -10$; $0\le a<5\sqrt{5}-5$

Найдите a, имеет более 2 реш

$$\begin{cases} |x^2-2x|-x^2=|y^2-2y|-y^2 & (1)\\ x+y=a\end{cases}$$

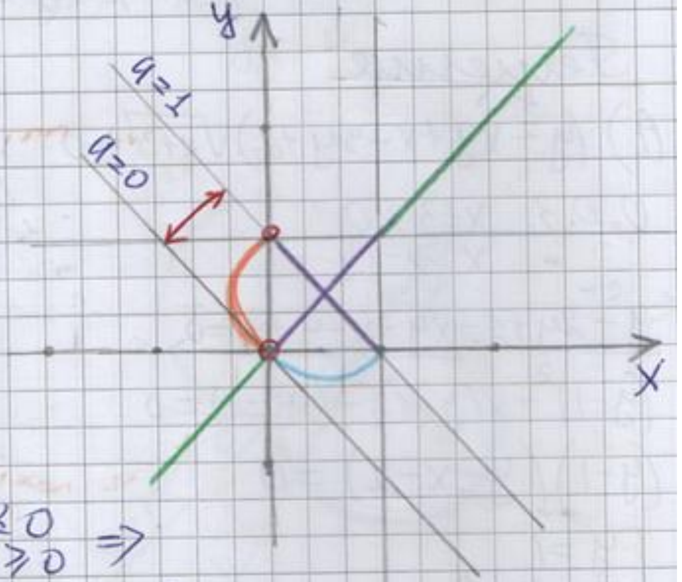
Решение

(1) 1) $\begin{cases}x^2-2x\le 0\\ y^2-2y\le 0\end{cases}$

$\begin{cases}x(x-2)\le 0\\ y(y-2)\le 0\end{cases}$

$(x-y)(x+y-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} y=x\\ y=-x+1\end{array}\right.$



2) $\begin{cases}x^2-2x\le 0\\ y^2-2y\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}x(x-2)\le 0\\ y(y-2)\ge 0\end{cases}\Rightarrow$

$\Rightarrow y=x^2-x$ $x_в=\frac{1}{2}$ $y_в=-\frac{1}{4}$

3) $\begin{cases}x^2-2x\ge 0\\ y^2-2y<0\end{cases}$ $\begin{cases}x(x-2)\ge 0\\ y(y-2)\le 0\end{cases}\Rightarrow$ $x=y^2-y$

4) $\begin{cases}x^2-2x\ge 0\\ y^2-2y\ge 0\end{cases}$ $\begin{cases}x(x-2)\ge 0\\ y(y-2)\ge 0\end{cases}\Rightarrow$ $y=x$

(2) $y=-x+a$ $0<a\le 1$

Ответ: $0<a\le 1$

Примеры задач, для которых полезны графические методы

Найдите a, имеет ровно 2 разных решений

$$\begin{cases}(y^2-xy+x-3y+2)\sqrt{x+3}=0 & (1)\\ a-x-y=0 & (2)\end{cases}$$

Решение

1) $(y^2-xy+x-3y+2)\sqrt{x+3}=0$

О.Д.З. $x+3\geq 0$

$x\geq -3$

$y^2-2y+1-xy+x-y+1=0$

$(y-1)^2-x(y-1)-(y-1)=0$

$(y-1)(y-x-2)=0$

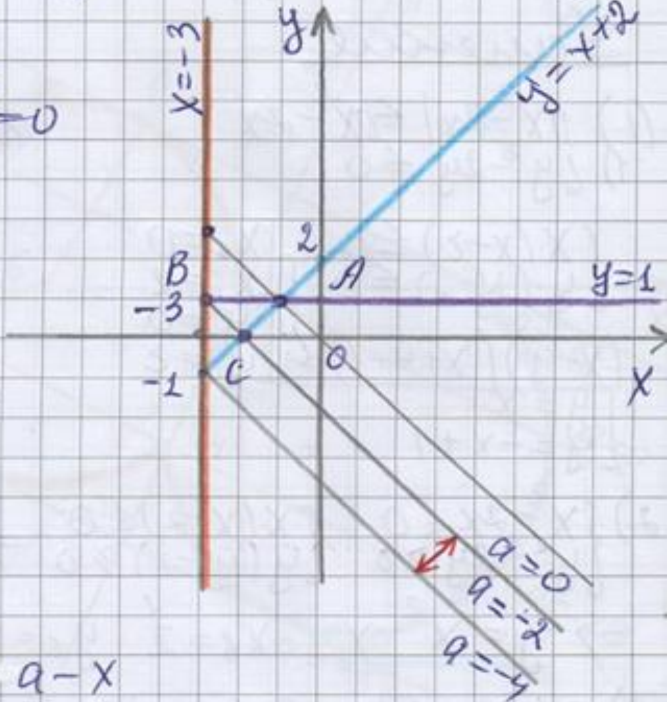
$$\left[\begin{array}{l}y=1\\ y=x+2\end{array}\right.$$

(2) $a-x-y=0 \Rightarrow y=a-x$

$A(-1;1) \Rightarrow 1=a+1 \Rightarrow a=0$

$B(-3;1) \Rightarrow 1=a+3 \Rightarrow a=-2$

$C(-3;-1) \Rightarrow -1=a+3 \Rightarrow a=-4$



Ответ: $a=0$; $-4<a\leq -2$

Найдите a, имеет более 2 разных решений

$$\begin{cases}2x-2y-2=|x^2+y^2-1| & (1)\\ y=a(x-1) & (2)\end{cases}$$

Решение

(1) $|x^2+y^2-1|=x^2+y^2-1$,

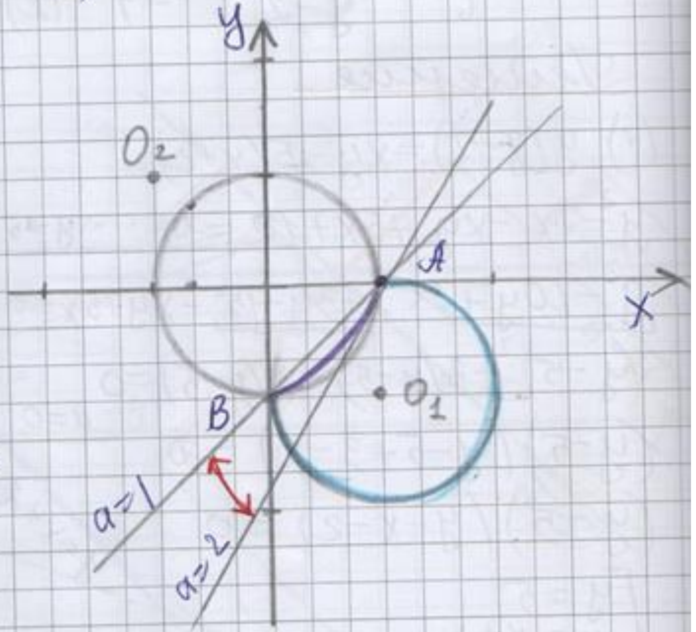
$x^2+y^2\geq 1$.

1) $(x-1)^2+(y+1)^2=1$

2) $|x^2+y^2-1|=-x^2-y^2+1$

$x^2+y^2<1$

$(x+1)^2+(y-1)^2=(\sqrt{5})^2$



(2) $y=a(x-1)$

т. $A(1;0)\in y \Rightarrow y=x-1 \Rightarrow a=1$

$$\begin{cases}y=a(x-1)\\ (x+1)^2+(y-1)^2=5\end{cases} \Rightarrow (x+1)^2+(ax-(a+1))^2=5 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2(1+a^2)+x(2-2a^2-2a)+(a^2+2a-3)=0$

$D=a^2-4a+4=0 \quad a=2$

Ответ: $1<a<2$.

Примеры задач, для которых полезны графические методы

Найдите a, ровно 3 различных решения

$$\begin{cases} (xy^2 - xy - 6y + 6)\sqrt{y+2} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

Решение

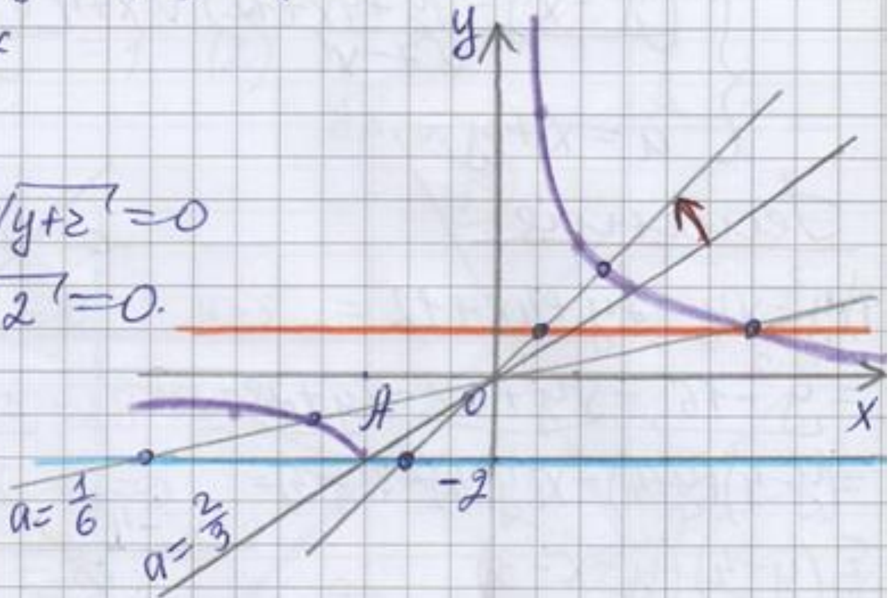
$$(xy^2 - xy - 6y + 6)\sqrt{y+2} = 0$$

$$(xy-6)(y-1)\sqrt{y+2} = 0.$$

О.Д.З. $y+2 \geq 0$

$y \geq -2$

$$\left[\begin{array}{l} y = \frac{6}{x} \\ y = 1 \\ y \geq -2 \quad y = -2. \end{array}\right.$$



$y = ax \Rightarrow A(-3;-2) \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

Ответ: $a = \frac{1}{6}$, $a \geq \frac{2}{3}$

Найти все a, ровно 4 различных решений

$$\begin{cases} (x-3)(y+3x-9) = |x-3|^3 \\ y = x+a \end{cases}$$

Решение

1) $x > 3$ $\quad (x-3)(y+3x-9) = (x-3)(x^2-6x+9)$

$\Rightarrow y = x^2 - 9x + 18 \quad x_в = 4,5$

2) $x = 3$ уравнение ∥ оси оу.

3) $x < 3$ $\quad (x-3)(y+3x-9) = (x-3)(-x^2+6x-9)$

$\Rightarrow y = -x^2 + 3x$

$x_в = 1,5$

$y = x + a.$

1) $-x^2 + 3x = x + a$

$x^2 - 2x + a = 0$

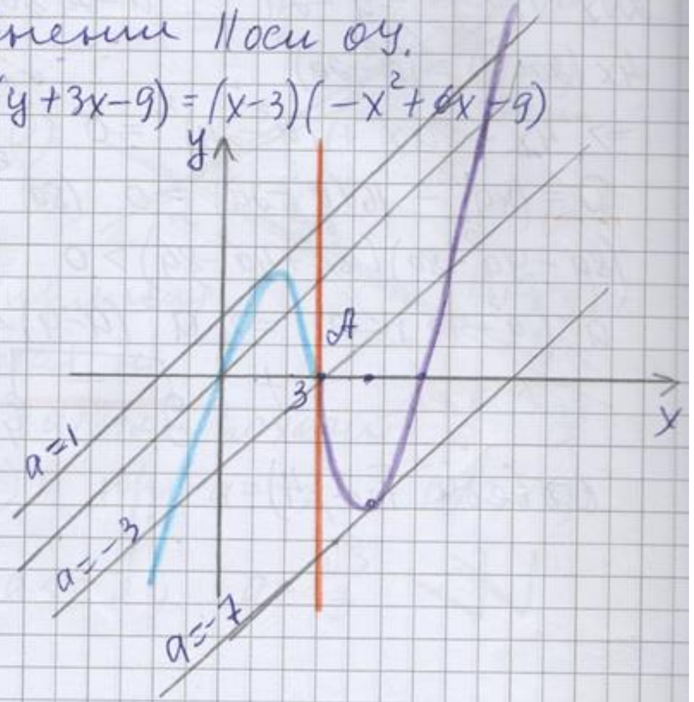
$a = 1$

2) $x^2 - 9x + 18 = x + a$

$x^2 - 10x + 18 - a = 0$

$D = 100 - 72 + 4a = 0$

$a = -7$



3) $A(3;0)$ $\quad y = x + a \Rightarrow 0 = 3 + a \Rightarrow a = -3$

Ответ: $(-7;-3) \cup (-3;1)$

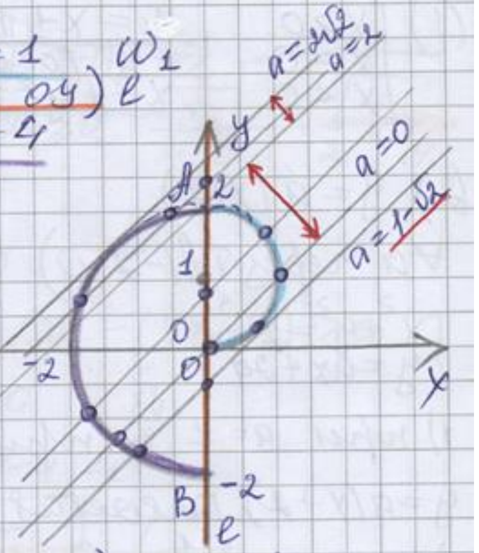
Примеры задач, для которых полезны графические методы

Найти все a, при каждом из которых система имеет ровно 3 к.

$$\begin{cases} x(x^2+y^2-y-2)=|x|(y-2) & (1) \\ y=x+a & (2) \end{cases}$$

Решение

(1) $\left[\begin{array}{l} x>0 \Rightarrow \\ x=0 \Rightarrow \\ x<0 \Rightarrow \end{array}\right.$ $x^2+(y-1)^2=1$ ω_1; $\forall y$ (ось Oy) ℓ; $x^2+y^2=4$ ω_2



(2) $y=x+a$.

1) $x^2+(x+a-1)^2=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2+2(a-1)x+a^2-2a=0$

$D=a^2-2a-1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a=1-\sqrt{2}$.

2) $x^2+(x+a)^2=4 \Rightarrow 2x^2+2ax+a^2-4=0 \Rightarrow$

$D=-4a^2+32=0 \Rightarrow a=2\sqrt{2}$

При $a=2\sqrt{2}$ $y=x+a$ касается ω_2, $\cap\,\ell$

$a=1-\sqrt{2}$ $y=x+a$ касается ω_1, $\cap\,\ell$, $\cap\,\omega_2$

Ответ: $a=1-\sqrt{2}$

$0\le a<2$

$2<a<2\sqrt{2}$.

Логические методы

- Параметр как переменная
- Введение параметра
- Получение следствий. Инварианты
- Получения следствий. Метод упрощенного значения
- Получение следствий. Тождества
- Применение классических неравенств
- Применение логических схем для неравенств с функциями
- Значение целевой функции как параметр
- Последовательное выделение полных квадратов

Примеры задач, которые удобно решать логическими методами

1) Решить уравнение $x^2-7=\sqrt{x+7}$

2) Найти все значения a, при которых для $\forall b$ уравнение имеет хотя бы одно решение

$$\cos(b+ab+bx)+2\cos b^2x=3a^2$$

3) Найти все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции < 1.

$$f(x)=2ax+|x^2-6x+5|<1$$

4) Найти все значения a, для каждого из которых имеет единственный корень ур-е

$$3^x+3^{2-x}=a^2-6a+11$$

5) Про функцию f(x) известно, что она определена на $\left[\frac{2}{5};\frac{5}{2}\right]$ и удовлетворяет на этом множестве системе

$$\begin{cases}2\cos^2(f(x))-6\cos^2 f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-3x}{x}\\ 0\le f(x)\le \frac{\pi}{2}\end{cases}$$

Решить уравнение $f(x)=\frac{5\pi}{12}$

Примеры задач, которые удобно решать логическими методами: пример №2

Решение примера №2: Найти хотя бы одно решение уравнения $\cos(b+ab+bx)+2\cos b^2x=3a^2$ для $\forall b$. Пусть $b=0 \Rightarrow 1+2=3a^2 \Rightarrow a=\pm 1$

Проверим

$a=1 \Rightarrow \underbrace{\cos(2b+bx)}_{\leq 1}+\underbrace{2\cos b^2x}_{\leq 2}=3 \Rightarrow \begin{cases}\cos(2b+bx)=1\\ \cos b^2x=1\end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases}2b+bx=2\pi n\\ b^2x=2\pi k\end{cases}$, $n,k\in Z$, $\forall b$, пусть $b=\pi \Rightarrow \begin{cases}2\pi+\pi x=2\pi n\\ \pi^2x=2\pi k\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}2+x=2n\\ \pi x=2k\end{cases} \Rightarrow x\in Z$ | $x=0$, $n=1$, $k=0$

Пусть $b=1 \Rightarrow$

$+\begin{cases}2+x=2\pi n\\ x=2\pi k\end{cases}$

$2+2x=2\pi n+2\pi k$

$1+x=\pi n+\pi k$

$x=\pi n+\pi k-1$

$-\begin{cases}2+x=2\pi n\\ x=2\pi k\end{cases}$

$1+\pi k=\pi n$

$\pi(n-k)=1$ $\quad n=k \Rightarrow 0\neq 1$

Нет решений

Итак $b=1$, $a=1$ уравнение не имеет решения

Значит, $\forall b$ $a=-1$ уравнение имеет решение

Ответ: $a=-1$

Примеры задач, которые удобно решать логическими методами

Найти все значения a, при каждом из которых уравнение имеет ровно 1 корень на $[0;2]$

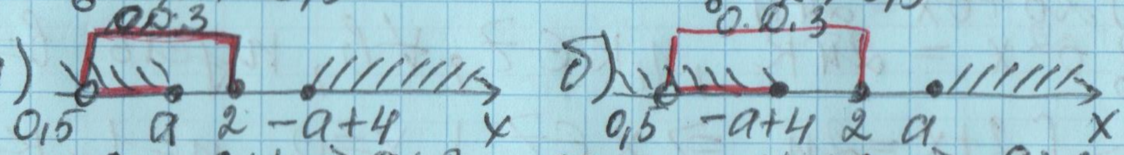
$$\log_4(2x-1)\cdot\sqrt{x^2-4x+4a-a^2}=0$$

Решение

I $\begin{cases}\log_4(2x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ \text{О.Д.З:}\ 2x-1>0 \Rightarrow x>0{,}5 \in (0{,}5;2]\end{cases}\\ x^2-4x+4a-a^2\geq 0 \Rightarrow (x-a)(x+a-4)\geq 0\end{cases}$

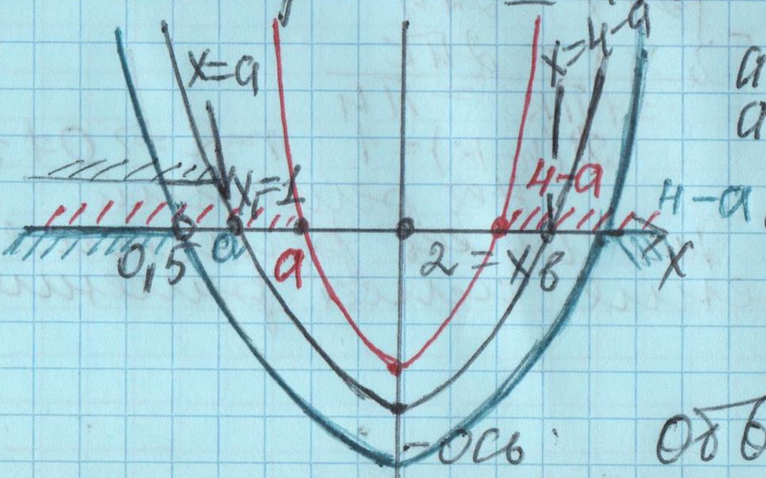
II $\begin{cases}\sqrt{x^2-4x+4a-a^2}=0\\ 2x-1>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2-4x+4a-a^2=0\\ x>0{,}5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=a \quad x_2=4-a\\ x>0{,}5\end{cases}$

Рассмотрим I: а) б)



а) если $a<-a+4 \Rightarrow a<2$ б) если $-a+4<a \Rightarrow a>2$

Рассмотрим I а) и $y=x^2-4x+4a-a^2$, $x_в=2$.



$a=1 \Rightarrow x=1$ – одно решение

$a=0{,}5 \Rightarrow$ корней нет.

$0{,}5<a\leq 1 \Rightarrow x=a$ – единственный корень в О.Д.З $y=x^2-4x+4a-a^2$

$x<a$ ($x=1$ – уже 2ой корень)

Ответ: $a\in(0{,}5;1]$

Примеры задач, которые удобно решать логическими методами

Найти все значения a, при каждом из которых уравнение имеет хотя бы одно решение

$$5x+|2x-|x+a||=10|x+1|$$

Решение

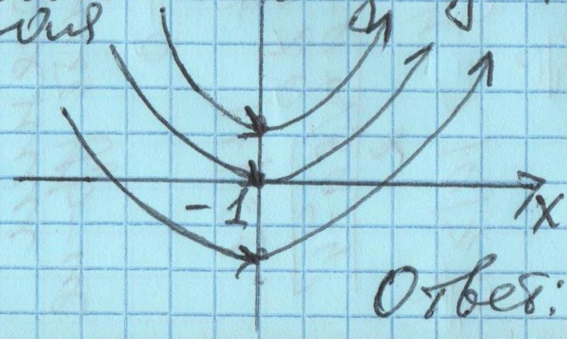
Рассмотрим $f(x)=10|x+1|-5x-|2x-|x+a||$.

I $x\geq -1$ $|x+1|=x+1$

$y=f(x)=5x-|2x-|x+a||+10$. При любой комбинации раскрытия модулей $f(x)$: $5\pm2\pm1$, то функция примет вид $y=kx+b$, $k>0$, функция возрастает

II $x<-1$ $|x+1|=-(x+1)$ $y=f(x)=-15x-|2x-|x+a||-10$

При любой комбинации раскрытия модулей $f(x)$: $-15\pm2\pm1$ то функция примет вид $y=kx+b$, $k<0$, функция убывающая



$\min\limits_{x=-1} f(x)$ >0, нет решений; ≤ 0 одно или больше

$f(-1)\leq 0 \Rightarrow |a-1|\geq 3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a\geq 4 \\ a\leq -2 \end{array}\right.$

Ответ: $a\in(-\infty;-2]\cup[4;+\infty)$

Примеры задач, которые удобно решать логическими методами

Найти значения a, при каждом из которых уравнение имеет один корень на $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

$$|\sin^2 x + 2\cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a$$

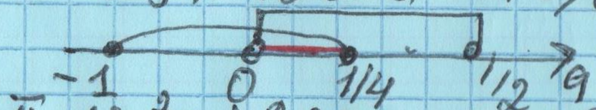
Решение

I $\sin^2 x + 2\cos x + a \geq 0 \Rightarrow \sin^2 x + 2\cos x + a = \sin^2 x + \cos x - a \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = -2a$, $-1 = \cos \pi$ и $0 = \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow -1 \leq -2a < 0 \Rightarrow 0 < a \leq \frac{1}{2}$

Подставим $\cos x = -2a$ в $\sin^2 x + 2\cos x + a \geq 0$

$1 - \cos^2 x + 2\cos x + a \geq 0 \Rightarrow 4a^2 + 3a - 1 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq a \leq \frac{1}{4}$

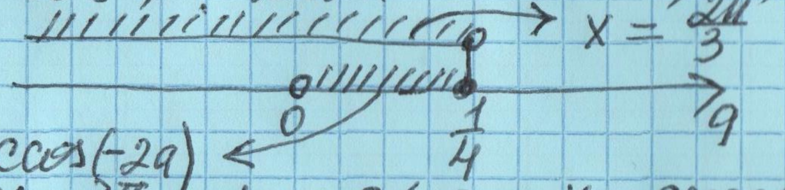


$\Rightarrow 0 < a \leq \frac{1}{4}$

II $\sin^2 x + 2\cos x + a^2 < 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + 3\cos x = 0 \Rightarrow (2\cos x + 1)(\cos x - 2) = 0$

$\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Подставим $\cos x = -\frac{1}{2}$ в $\sin^2 x + 2\cos x + a < 0 \Rightarrow 1 - \cos^2 x + 2\cos x + a < 0 \Rightarrow$

при $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow a < \frac{1}{4}$



Единственный корень $x = \frac{2\pi}{3}$ при $a \leq 0$ и $x = -\arccos(-2a)$ при $a = \frac{1}{4}$

Ответ: $(-\infty; 0]; \left\{\frac{1}{4}\right\}$

Примеры задач, которые удобно решать логическими методами

Найти значение a, при каждом из которых уравнение имеет ровно 2 решения на $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

$$(\operatorname{tg}x+6)^2-(a^2+2a+8)(\operatorname{tg}x+6)+a^2(2a+8)=0$$

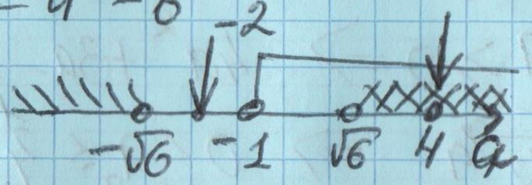
Решение:

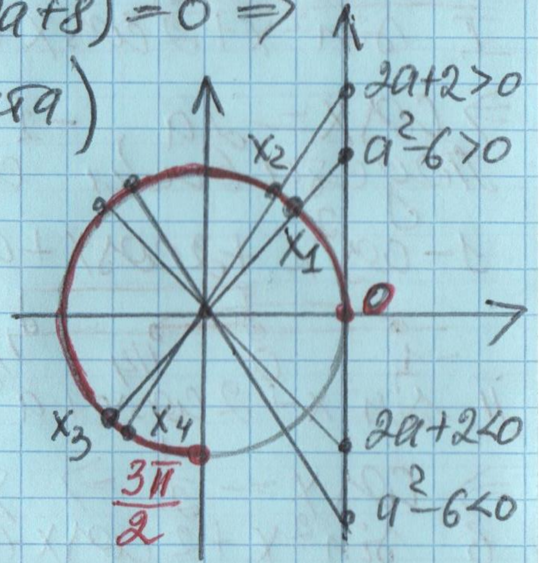
Пусть $t=\operatorname{tg}x+6 \Rightarrow t^2-(a^2+2a+8)t+a^2(2a+8)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t_1=2a+8$ и $t_2=a^2$ (по теореме Виета)

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x+6=2a+8\\ \operatorname{tg}x+6=a^2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=2a+2\\ \operatorname{tg}x=a^2-6\end{array}\right.$$

I $\begin{cases}2a+2>0\\ a^2-6>0\end{cases}$ $\begin{cases}a>-1\\ (a-\sqrt6)(a+\sqrt6)>0\end{cases}$



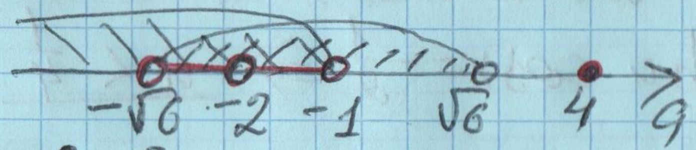


$\Rightarrow$ 4-ре корня x_1, x_2, x_3, x_4.

II $2a+2=a^2-6>0 \Rightarrow a^2-2a-8=0$ $\left[\begin{array}{l}a=4\\ a=-2\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ при $a=4$, 2 решения

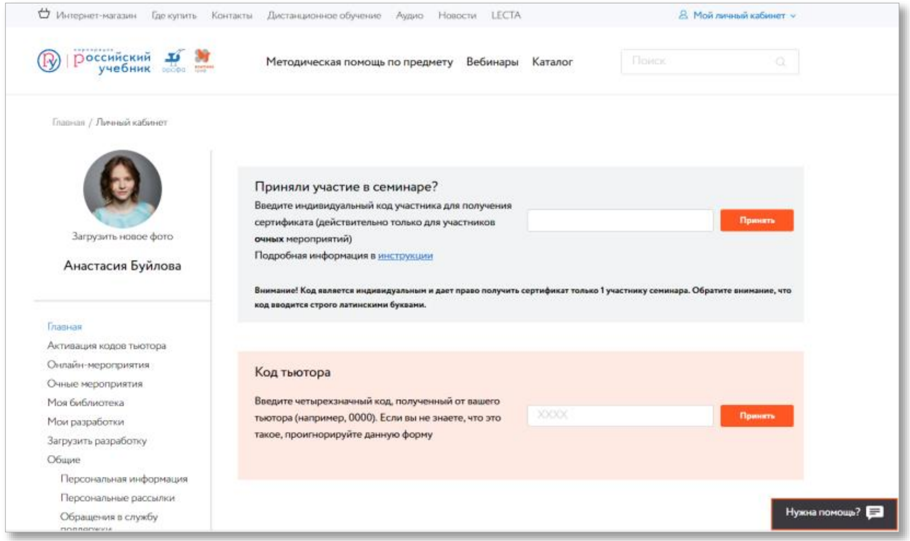
III $\begin{cases}2a+2<0\\ a^2-6<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a<-1\\ (a-\sqrt6)(a+\sqrt6)<0\end{cases}$



Ответ: $(-\sqrt6; -2) \cup (-2; -1) \cup \{4\}$

РЕГИСТРИРУЙТЕСЬ НА САЙТЕ ROSUCHEBNIK.RU
И ПОЛЬЗУЙТЕСЬ ПРЕИМУЩЕСТВАМИ ЛИЧНОГО КАБИНЕТА

- **Регистрируйтесь на очные и онлайн-мероприятия**
- **Получайте сертификаты за участие в вебинарах и конференциях**
- **Пользуйтесь цифровой образовательной платформой LECTA**
- **Учитесь на курсах повышения квалификации**
- **Скачивайте рабочие программы, сценарии уроков и внеклассных мероприятий, готовые презентации и многое другое**
- **Создавайте собственные подборки интересных материалов**
- **Участвуйте в конкурсах, акциях и спецпроектах**
- **Становитесь членом экспертного сообщества**
- **Сохраняйте архив обращений в службу техподдержки**
- **Управляйте новостными рассылками**



rosuchebnik.ru, росучебник.рф

Москва, Пресненская наб., д. 6, строение 2
+7 (495) 795 05 35, 795 05 45, info@rosuchebnik.ru

Нужна методическая поддержка?

Методический центр
8-800-2000-550 (звонок бесплатный)
metod@rosuchebnik.ru

Хотите купить?

Официальный интернет-магазин учебной литературы book24.ru

Цифровая среда школы
lecta.rosuchebnik.ru

Отдел продаж
sales@rosuchebnik.ru

Хотите продолжить общение?

youtube.com/user/drofapublishing

fb.com/rosuchebnik

vk.com/ros.uchebnik

ok.ru/rosuchebnik

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!