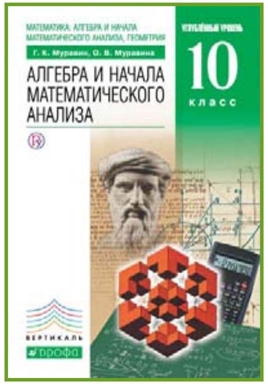
корпорация российский учебник

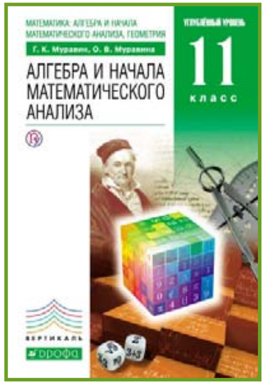
LECTA

«Подготовка учеников к решению уравнений и неравенств в ЕГЭ-2019»

Г.К.Муравин, кандидат педагогических наук, почетный работник образования, ветеран труда, автор УМК по математике для 1–11 классов

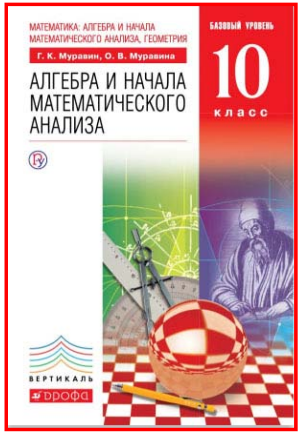
О.В.Муравина, кандидат педагогических наук, доцент, зав. кафедрой начального образования Института развития образовательных технологий, автор УМК по математике для 1–11 классов

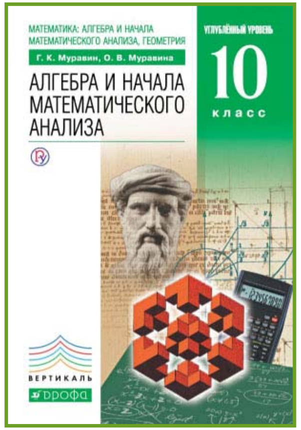


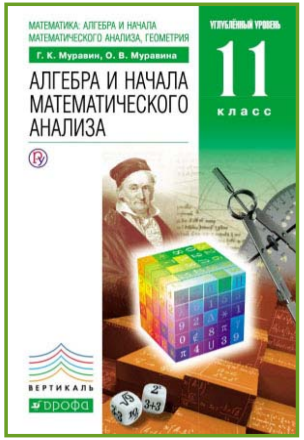


ПЛАН ВЕБИНАРА

1. Выражения и их преобразования.
2. Квадратные уравнения и неравенства.
3. Показательные уравнения и неравенства.
4. Логарифмические уравнения и неравенства.
5. Тригонометрические уравнения.







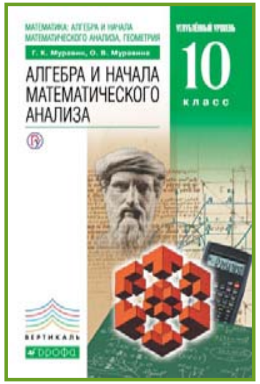
УМК ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДЛЯ 10-11 КЛАССОВ

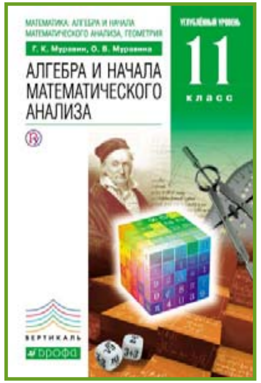
корпорация российский учебник

LECTA

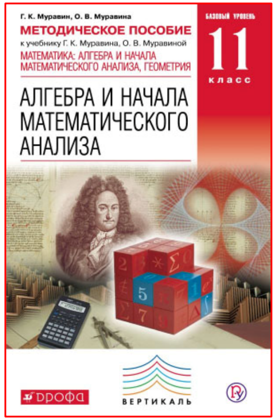
Рабочие программы

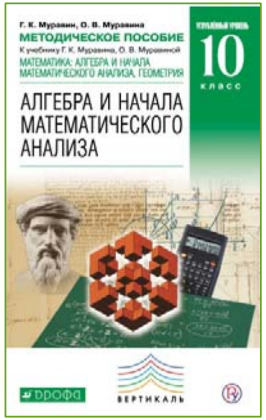
Учебники



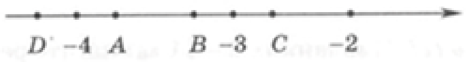


Методические пособия





Выражения с корнями и их преобразования

Устные задания	Письменные задания
1. Назовите числа, которые являются рациональными: а) $\sqrt{0}$; г) $-\sqrt{1}$; б) $3\sqrt{4}$; д) $\sqrt{100}$; в) $\sqrt{\dfrac{9}{25}}$; е) $-\sqrt{0{,}01}$. 2. Назовите выражения, значения которых являются рациональными числами: а) $\left(\sqrt{2}\right)^2$; д) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$; б) $-\sqrt{\dfrac{16}{25}}$; е) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$; в) $\sqrt{2}+5$; ж) $\sqrt{9}-\sqrt{16}$; г) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$; з) $\dfrac{5}{\sqrt{81}}$. 3. Одна из точек, отмеченных на координатной прямой, соответствует числу $-\sqrt{15}$. Какая это точка?  А. *A* Б. *B* В. *C* Г. *D*	1. Вычислите значение выражения $\dfrac{1}{2}\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{3}\sqrt{150}$. 2. Найдите значение выражения: а) $\left(\sqrt{6}-3\right)^2$; б) $\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)$; в) $\left(1-3\sqrt{5}\right)\left(1+3\sqrt{5}\right)$; г) $\left(2\sqrt{6}+3\right)\left(3-2\sqrt{6}\right)$. 3. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{a}}{1-\sqrt{b}}$ при $a=0{,}04$ и $b=0{,}16$. 4. Упростить выражение $\sqrt{(3x-12)^2}-\sqrt{(2x+12)^2}$ и найдите его значение при $x=2019$. 5. Из формулы пути равноускоренного движения $s=\dfrac{at^2}{2}$ выразите время t.

5. ЕГЭ (Б), 1 балл, 8 мин

Найдите значение выражения $\left(2\sqrt{13}-1\right)\left(2\sqrt{13}+1\right)$.

Ответ: ________________________.

10. ЕГЭ (П), 1 балл, 5-15 мин

10 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковой сигнал частотой 749 МГц. Приёмник регистрирует частоту сигнала, отражённого от дна океана. Скорость погружения батискафа (в м/с) и частоты связаны соотношением

$$v=c\cdot\frac{f-f_0}{f+f_0},$$

где $c=1500$ м/с — скорость звука в воде; f_0 — частота испускаемого сигнала (в МГц); f — частота отражённого сигнала (в МГц). Найдите частоту отражённого сигнала (в МГц), если батискаф погружается со скоростью 2 м/с.

Ответ: ________________________.

Квадратные уравнения

7. ЕГЭ (Б), 1 балл, 8 мин

Устные задания

1. Среди уравнений укажите квадратные или сводимые к ним:

а) $x^2 = 0$;

б) $5x + 7 = 0$;

в) $7x^2 - 9 = 0$;

г) $(x - 2)^2 = 0$;

д) $3x = 2x^2 + 1$;

е) $x^2(4x + 1) = 0$;

ж) $3x - 9 = 4x + 2$;

з) $(x + 1)(x - 1) = 0$.

2. Решите квадратные уравнения устно:

а) $x^2 = 0$;

б) $3x^2 = 1$;

в) $x^2 - 1 = 0$;

г) $x^2 + 2 = 0$;

д) $x(2x + 1) = 0$;

е) $x^2 + x - 2 = 0$;

ж) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

з) $(x + 1)(x - 2) = 0$.

Найдите отрицательный корень уравнения $x^2 - x - 6 = 0$.

Ответ: ________________.

24. Частные случаи квадратных уравнений

201. Заполните пропуски в предложениях, выбрав слова из списка (квадратным уравнением с чётным вторым коэффициентом, приведённым квадратным уравнением, квадратным уравнением, неполным квадратным уравнением) и расставив их в требуемом порядке, числе и падеже.

1) Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, a, b, c — действительные числа, называют ________________.

2) Уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ называют ________________.

3) Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, a, b, c — действительные числа, в котором $b = 0$ или $c = 0$, называют ________________.

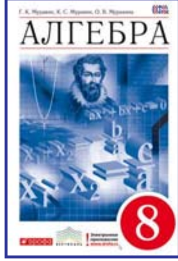
4) Уравнение вида $ax^2 + 2kx + c = 0$ называют ________________.

5) Уравнение $x^2 + 20x + 91 = 0$ является ________________.

6) Уравнения $-7x^2 - 11 = 0$ и $5x^2 + 12x = 0$ являются ________________.

7) Уравнение $3x^2 - 20x - 125 = 0$ является ________________.

Квадратные уравнения



342. 1) Решите неполные квадратные уравнения:

а) $4x^2 - 9 = 0$; д) $9x^2 = 1$;
б) $25x^2 - 16 = 0$; е) $-24x = 6x^2$;
в) $11x^2 + 5x = 0$; ж) $3x^2 + 1 = 0$;
г) $-7x^2 + 9x = 0$; з) $5x^2 + 7 = 0$.

2) Как вы думаете, почему такие квадратные уравнения называют неполными? 202, 203

343. Подберите корни уравнения: 204

1) $3x^2 + 22x - 25 = 0$; 3) $x^2 - 8x + 15 = 0$;
2) $17x^2 + 32x + 15 = 0$; 4) $x^2 + 6x + 8 = 0$.

344. Используя формулу корней квадратного уравнения с чётным вторым коэффициентом, решите уравнение: 205

1) $x^2 - 16x + 63 = 0$; 5) $5p^2 + 6p - 8 = 0$;
2) $14y + y^2 + 48 = 0$; 6) $7k^2 - 20k + 14 = 0$;
3) $z^2 + 24z + 150 = 0$; 7) $15t^2 - 22t - 37 = 0$;
4) $x^2 - 20x - 125 = 0$; 8) $1 + 36m + 35m^2 = 0$.

345. Решите уравнение наиболее рациональным способом:

1) $\frac{1}{2}x^2 = 3x - 4$; 7) $5 + 13x^2 - 16x = 0$;
2) $2x(12x + 5) = 8$; 8) $\frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} - \frac{7}{12} = 0$;
3) $11x^2 = 18x + 511$; 9) $-13x^2 - 25x = 0$;
4) $0{,}7x^2 = 1{,}3x + 2$; 10) $\frac{2}{3}x - 5 + \frac{1}{2}x^2 = 0$;
5) $81x^2 - 13 = 0$; 11) $8 - 90x + 43x^2 = 0$;
6) $9x^2 + 2x - 8 = 0$; 12) $\frac{x^2 + x}{2} = \frac{8x - 7}{3}$. 206

7. ЕГЭ (Б), 1 балл, 8 мин

Найдите отрицательный корень уравнения $x^2 - x - 6 = 0$.

Ответ: ______________________.

347. Найдите значения переменной, при которых верно равенство:

1) $(5x + 3)^2 = 5x + 3$; 3) $(5x + 3)^2 = (3x + 5)^2$;
2) $(5x + 3)^2 = 5(x + 3)$; 4) $4(5x + 3)^2 = (10x + 6)^2$.

350. Решите уравнение:

1) $\frac{x^2 - 1}{6} = 2x - 6$; 4) $\frac{3y - 2}{5} + 3 = \frac{y^2 - 1}{10}$;
2) $\frac{y^2 + 1}{10} = y - 2$; 5) $\frac{(x + 1)^2}{12} - \frac{7 - x}{4} = \frac{y}{2}$;
3) $\frac{z^2 + 4}{4} - \frac{z + 4}{4} = 8$; 6) $\frac{3 - z}{5} = \frac{z - 2}{4} + \frac{(z - 2)^2}{8}$.

351. Верно ли решено уравнение:

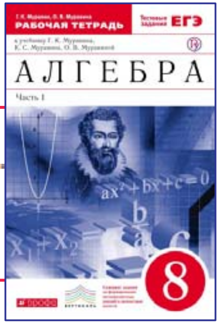
1) $\frac{x^2 + 4}{x - 1} = \frac{5x}{x - 1}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$;
2) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 5} = 0$, $x = 1$?

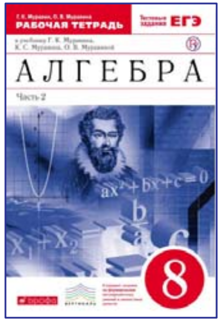
Помощь в решении квадратных уравнений

7. ЕГЭ (Б), 1 балл, 8 мин

Найдите отрицательный корень уравнения $x^2 - x - 6 = 0$.

Ответ: ________________________.





193. Решите уравнение по плану.

Уравнение $2x^2 + x - 4 = 0$	План выполнения
	1. Запишем коэффициенты a, b и c для уравнения $ax^2 + bx + c = 0$
	2. Вычислим дискриминант $D = b^2 - 4ac$
	3. Если дискриминант неотрицательный, то вычислим корни уравнения $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$
	4. Запишем ответ

202. Решите неполное квадратное уравнение по плану.

Решите уравнение $-2x^2 + 9x = 0$	План решения
	1. Разложим на множители
	2. Приравняем каждый множитель к нулю
	3. Найдём корни уравнения
	4. Запишем ответ

Пример 1. При каких значениях a один корень уравнения $2x^2 - 2(a - 1)x + a^2 - 3a - 10 = 0$ больше 3, а другой меньше 3?

Решение. Число 3 должно располагаться на координатной прямой между корнями квадратного трёхчлена

$$f(x) = 2x^2 - 2(a - 1)x + a^2 - 3a - 10.$$

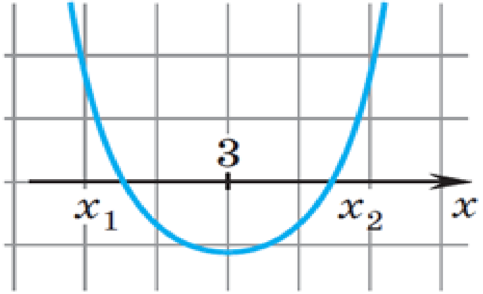


Рис. 59

Поскольку старший коэффициент квадратного трёхчлена положителен, ветви соответствующей параболы направлены вверх и она должна пересекать ось абсцисс слева и справа от точки $x = 3$ (рис. 59). При этом значение трёхчлена в точке $x = 3$ должно быть отрицательным. Другими словами, число 3 будет расположено между корнями трёхчлена тогда и только тогда, когда $f(3) < 0$, т. е.

$$2 \cdot 3^2 - 2(a - 1) \cdot 3 + a^2 - 3a - 10 < 0.$$

Решив это квадратное неравенство, найдём искомые значения a. $a^2 - 9a + 14 < 0$, $2 < a < 7$.

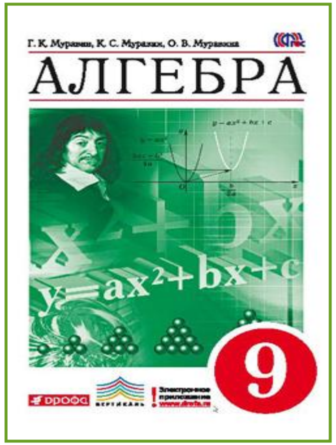
Ответ: $2 < a < 7$.

Дополнительные задания для сильных учеников

корпорация российский учебник

Пример 2. Найти все значения a, при которых уравнение $2x - (a + 4)\sqrt{x - 3} + a + 10 = 0$ имеет единственный корень.

Дополнительные задания для сильных учеников



Р е ш е н и е. Обозначим $\sqrt{x - 3}$ буквой z, тогда

$$x - 3 = z^2 \text{ и } x = z^2 + 3.$$

Уравнение принимает вид

$$2(z^2 + 3) - (a + 4)z + a + 10 = 0,\ 2z^2 - (a + 4)z + a + 16 = 0.$$

Заметим, что каждому неотрицательному значению z соответствует единственное значение x, а отрицательные значения z не удовлетворяют *условию введения переменной z*. Поэтому исходное уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда уравнение, полученное нами с помощью подстановки, имеет *единственный неотрицательный корень.*

Таким образом, ответ на вопрос задачи складывается из тех значений a, при которых уравнение

$$2z^2-(a+4)z+a+16=0$$

имеет:

1) *единственный корень* при условии, что он является неотрицательным числом;

2) *корни разных знаков*;

3) *один корень, равный нулю* при условии, что второй корень меньше нуля.

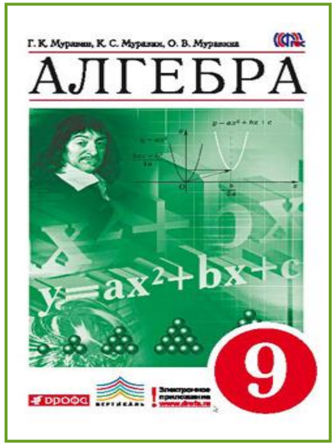
Рассмотрим эти три случая.

1) Единственный корень квадратное уравнение имеет тогда, когда его дискриминант равен нулю.

$$(a+4)^2-4\cdot 2(a+16)=0,\quad a^2+16+8a-8a-8\cdot 16=0,$$

$$a^2=7\cdot 16,\quad a_{1;\,2}=\pm 4\sqrt{7}.$$

Дополнительные задания для сильных учеников



При каждом из этих значений a корень уравнения равен $\frac{a+4}{4}$. Это число положительно при $a = 4\sqrt{7}$ и отрицательно при $a = -4\sqrt{7}$. Таким образом, условию первого случая соответствует только одно значение a, равное $4\sqrt{7}$.

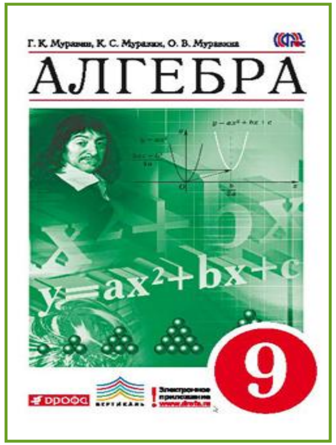
2) Когда корни имеют разные знаки, их произведение отрицательно. Поскольку старший коэффициент уравнения положителен, по формуле Виета имеем $a + 16 < 0$. Значит, $a < -16$.

3) Уравнение имеет корень, $x_1 = 0$ при $a + 16 = 0$, $a = -16$. При этом значении a второй корень уравнения найдём по формуле Виета: $x_1 + x_2 = \frac{a+4}{2}$, $x_2 = \frac{-16+4}{2} = -6$. Ненулевой корень уравнения отрицателен, что соответствует условию рассматриваемого случая.

Объединим найденные значения a и запишем их в ответ.

Ответ: $a = 4\sqrt{7}$, $a \leqslant -16$.

Дополнительные задания для сильных учеников



Контрольная работа

Тема: Уравнения

1. Рядом с каждым уравнением записан его корень. Укажите уравнение, которое решено неверно.

А. $5x + 5 = 60$, $x = 11$ В. $(15 - x) \cdot 2 = 40$, $x = -5$

Б. $x : 3 + 42 = 12$, $x = -10$ Г. $(x - 21) : 5 = -7$, $x = -56$

2. Найдите корни уравнения $x^2 + 7x - 18 = 0$.

А. –9 и –2 Б. 9 и –2; В. –9 и 2; Г. 9 и 2.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 5x + 2y = 0. \end{cases}$

А. (1; –1) Б. (–2; 5) В. (5; –2) Г. (2; –5)

4. Решите уравнение $(2x - 7)(x + 5) = 0$.

А. –3 и –5; Б. –3,5 и –5; В. 0 и –5; Г. 3,5 и –5.

Уровень 2. Выполните задания 5–7 с кратким решением.

5. Найдите отрицательный корень уравнения $x^2 - x - 6 = 0$.

6. Решите уравнение $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{7}{x+2} = \dfrac{8}{x^2 - 4}$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ x^2 - 4y = 4. \end{cases}$

Уровень 3. В заданиях 8–9 запишите полные решения.

8. Найдите все значения c, при которых уравнение $x^2 + 2x + c = 0$ не имеет корней?

9. Найдите все значения a, при которых уравнение $15x^2 + ax + \dfrac{1}{4} = 0$ имеет два корня.

Показательные уравнения и неравенства

7. ЕГЭ (Б) 1 балл, 8 мин

7 Найдите корень уравнения $3^{x-3}=81$.

Ответ: ____________________.

5. ЕГЭ (П), 1 балл, 3-5 мин

5 Найдите корень уравнения $3^{x-5}=81$.

Ответ: ____________________.

17. ЕГЭ (Б), 1 балл, 9 мин

Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА

А) $2^x \geq 4$

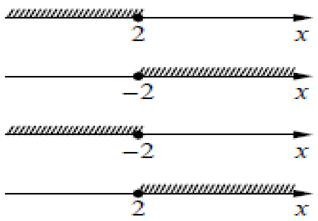
Б) $0,5^x \geq 4$

В) $0,5^x \leq 4$

Г) $2^x \leq 4$

РЕШЕНИЯ

1)
2)
3)
4)



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

143. Решите уравнение, представляя его правую часть в виде степени с тем же основанием, что и степень в левой части:

1) $7^x = 1$;
2) $2^x = 16$;
3) $5^x = 625$;
4) $5^{x-2} = 125$;
5) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \sqrt[3]{9}$;
6) $2^x = \frac{4}{\sqrt[5]{16}}$;
7) $6^{4x-10} = \frac{1}{36}$;
8) $0,2^x = \frac{1}{\sqrt[4]{125}}$;
9) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = \frac{\sqrt[4]{2}}{8}$.

144. Определите a, если известно, что график функции $y = a^x$ проходит через точку: 1) $M(0,5; 3)$; 2) $K(2; 5)$.

145. Решите уравнение:

1) $2^x = 3 - x$;
2) $3^x + x = 11$;
3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x + 1$;
4) $5^x = 6 - x$.

Показательные уравнения

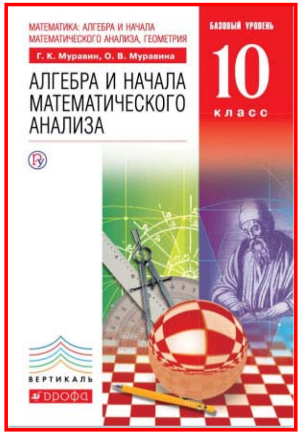
Пример 1. Решить уравнение $9^x - 8 \cdot 3^x = 9$.

Решение. Введём вспомогательную переменную t: $t = 3^x$, тогда $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2 = t^2$. Поскольку переменная t может принимать только положительные значения, задача сводится к нахождению положительного корня уравнения $t^2 - 8t - 9 = 0$.

Корни этого квадратного уравнения $t_1 = -1$, $t_2 = 9$, значит, искомый корень 9.

Возвращаясь к переменной x, получим $3^x = 9$, $3^x = 3^2$. В силу монотонности своё значение 3^2 функция $y = 3^x$ принимает единственный раз при $x = 2$.

Ответ: 2.



Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9^{x+1} = 3^{3y+2}, \\ 4x^2 - 2x = y + 13. \end{cases}$$

Решение. Перепишем первое уравнение заданной системы $9^{x+1} = 3^{3y+2}$ как равенство степеней с одинаковыми основаниями: $3^{2x+2} = 3^{3y+2}$. Поскольку каждое своё значение показательная функция принимает по одному разу, из равенства значений показательной функции следует равенство значений её аргумента: $2x + 2 = 3y + 2$, $2x = 3y$.

Подставляя $3y$ вместо $2x$ во второе уравнение системы, получим:

$$(3y)^2 - 3y = y + 13, \ 9y^2 - 4y - 13 = 0, \ y_1 = -1, \ y_2 = \frac{13}{9}.$$

Найдём соответствующие значения x из равенства $2x = 3y$:

$$x_1 = -\frac{3}{2}, \ x_2 = \frac{13}{6}.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{3}{2}$, $y_1 = -1$; $x_2 = \frac{13}{6}$, $y_2 = \frac{13}{9}$.

Пример 3. Найти область определения функции

$$y = \sqrt[4]{0{,}25^{x-1} - 9 \cdot 0{,}5^x + 2}.$$

Решение. Выражение, стоящее под знаком корня чётной степени, должно быть неотрицательно:

$$0{,}25^{x-1} - 9 \cdot 0{,}5^x + 2 \geqslant 0.$$

Введём вспомогательную переменную t: $t = 0{,}5^x$ и найдём положительные решения неравенства $0{,}25^{-1} \cdot t^2 - 9t + 2 \geqslant 0$:

$$\begin{cases} 4t^2 - 9t + 2 \geqslant 0, \\ t > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} t \leqslant \frac{1}{4} \text{ или } t \geqslant 2, \\ t > 0, \end{cases}$$

$$0 < t \leqslant \frac{1}{4} \text{ или } t \geqslant 2 \text{ (рис. 55).}$$

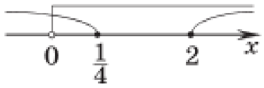


Рис. 55

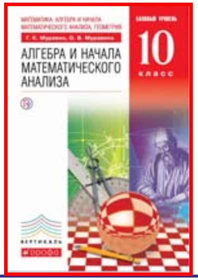
Вернёмся к переменной x. $0 < 0{,}5^x \geqslant \frac{1}{4}$ или $0{,}5^x \geqslant 2$. Поскольку $0 < 0{,}5^x$ при всех значениях x, имеем:

$$0{,}5^x \leqslant 0{,}5^2 \text{ или } 0{,}5^x \geqslant 0{,}5^{-1}.$$

Показательная функция с основанием 0,5 является убывающей, поэтому большему её значению соответствует меньшее значение аргумента, значит: $x \geqslant 2$ или $x \leqslant -1$.

Ответ: $D(y) = (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

Показательные уравнения



151. Решите уравнение:

1) $\left(\frac{1}{64}\right)^x = \sqrt{\frac{1}{8}}$;

2) $8^x = 128\sqrt{2}$;

3) $(2,5)^{2x-3} = 15\frac{5}{8}$;

4) $0,125 \cdot 4^{2x+3} = \frac{0,25}{\sqrt{2}}$;

5) $9^{2\sqrt{x}} = 3^{2x-6}$;

6) $10^{x-\sqrt{x^2+5x+1}} = 1000$;

7) $5^{x-\sqrt{3x-5}} = 125$;

8) $\left(\frac{3}{2}\right)^{2-2x} - \left(\frac{8}{27}\right)^{x-2} = 0$.

152. Решите уравнение:

1) $7^{x+2} - 14 \cdot 7^x = 5$;

2) $3^{x+1} - 5 \cdot 3^{x-1} = 36$;

3) $5^{x+2} - 4 \cdot 5^{x+1} + 4 \cdot 5^{x-1} = 29$;

4) $5 \cdot 2^x - 7 \cdot 2^{x-1} + 9 \cdot 2^{x-2} = 60$;

5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} + 11 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x = 6$;

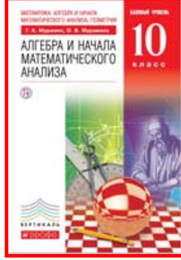
6) $0,2^{x-3} - 3 \cdot 0,2^{x-2} - 6 \cdot 0,2^{x-1} = 500$;

7) $9^x - 2^{x+0,5} = 2^{x+3,5} - 3^{2x-1}$;

8) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

Вид уравнения	Метод решения	Образец выполнения
$2^x = 4$	Привести к одинаковым основаниям и приравнять показатели	$2^x = 2^2$, $x = 2$
$7^{x+2} - 14 \cdot 7^x = 5$	Вынести степень с неизвестным в показателе за скобки	$7^x(7^2 - 14) = 5$, $7^x \cdot 35 = 5$, $7^x = 7^{-1}$, $x = -1$
$9^x - 8 \cdot 3^x = 9$	Сделать замену переменных $t = 3^x$ и решить относительно t квадратное уравнение	$t^2 - 8t - 9 = 0$, $t = 9$ или $t = -1$, $3^x = 9$, $3^x = 3^2$, $x = 2$
…	…	…
$5^x = 6 - x$	Подобрать корень и обосновать его единственность	$x = 1$

Показательные уравнения и неравенства



153. Решите уравнение:

1) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$;

2) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 8\left(\frac{1}{3}\right)^x - 9 = 0$;

3) $3 \cdot 2^x - 7 \cdot 2^{\frac{x}{2}} - 20 = 0$;

4)○ $2^x - 13 \cdot 2^{\frac{x-2}{2}} - 12 = 0$;

5)○ $5 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^{-x} = 2$;

6)○ $5^{x+1} + 5^{1-x} = 26$.

154. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 27^{x-2y} = \dfrac{1}{3^{2x+y}}, \\ 3x - 5y = 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 25^{x+y} = \dfrac{1}{\sqrt{5^{x-y}}}, \\ 3x - 2y = 6; \end{cases}$

3)● $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 17, \\ 3^{\frac{x}{2}} + 2^y = 17; \end{cases}$

4)* $\begin{cases} u - (\sqrt{5})^v = v - (\sqrt{5})^u, \\ u + v^2 = 12. \end{cases}$

155. Решите графически неравенство:

1) $2^x > 4 - 2x$;

2) $\sqrt{x} > 3^x$;

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \sqrt{x}$;

4) $2^x < 2 - x^2$.

156. Решите неравенство:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 16$;

2) $\sqrt{3^x} < 27$;

3)○ $(3 - \sqrt{3})^x > 1$;

4)○ $(\sqrt{15} - 3)^x \leqslant 1$;

5)○ $\dfrac{2^x - 0{,}5}{3 + x} > 0$;

6)○ $\dfrac{3^x - 81}{5 + 4x - x^2} \geqslant 0$;

7)● $2^x \leqslant 5 - \dfrac{x}{2}$;

8)● $3^x \geqslant \dfrac{3}{x}$;

9)* $3^x + 5^x > 8^x$;

10)* $3^x + 4^x < 5^x$.

157.○ Найдите область определения функции:

1) $\sqrt{9^x - 28 \cdot 3^x + 27}$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{0{,}5^x - \dfrac{4}{0{,}5^x} - 3}}$.

158. Процент инфляции показывает, на сколько процентов (в среднем) выросли цены.

1)○ Выразите процент инфляции за x месяцев, если ежемесячная инфляция составляла 3%.

2)■ Вычислите с помощью калькулятора годовой процент инфляции.

159.● Найдите все значения a, при которых уравнение

$$4^x - a \cdot 2^x + a - 1 = 0:$$

1) имеет два корня;

2) не имеет корней;

3) имеет единственный корень.

корпорация российский учебник
дрофа
вентана граф

Логарифмические уравнения

Найдите значение выражения $5^{\log_5 6+1}$.

Ответ: ________

5. ЕГЭ (Б), 1 балл, 8 мин

Найдите корень уравнения $\log_2(x-3)=6$.

Ответ: ________

7. ЕГЭ (Б) 1 балл, 8 мин

Устные задания

160. Пользуясь определением логарифма, найдите:

1) а) $\log_2 4$; г) $\log_3 \frac{1}{27}$; ж) $\log_4 \sqrt{2}$;

б) $\log_3 81$; д) $\log_{0,5} 8$; з) $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27}$;

в) $\log_{0,5} 0{,}125$; е) $\log_9 81$; и) $\log_{\sqrt{2}} 2$.

2) а) $\log_5 25$; г) $\log_{0,25} 16$; ж) $\log_{27} \sqrt{3}$;

б) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$; д) $\log_3 \frac{1}{81}$; з) $\log_{\sqrt[3]{2}} 0{,}125$;

в) $\log_4 64$; е) $\log_5 0{,}04$; и) $\log_{\sqrt{3}} 81$.

161. Запишите в виде логарифма с основанием:

1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 4; 5) $\frac{1}{27}$

числа:

а) 1; в) 3; д) -1; ж) -3; и) $\frac{1}{3}$;

б) 2; г) 0; е) -2; з) 0,5; к) $-0{,}5$.

162. Решите уравнение:

1) $\log_x 32 = 5$; 3) $\log_x \sqrt{5} = 3$;

2) $\log_x 27 = -3$; 4) $\log_x \sqrt[3]{49} = -2$.

Письменные задания

182. Найдите корень уравнения:

1) $\log_2(4-x)=7$;

2) $\log_{\frac{1}{7}}(7-x)=-2$;

3) $\log_3(14-x)=\log_3 5$;

4) $\log_5(6-5x)=2\log_5 6$;

5) $\log_3(9-x)^2=4$;

6) $\log_4(x+6)^2=\log_4(5x-14)^2$.

Логарифмические неравенства

15. ЕГЭ (П), 2 балла, 15-30 мин

$\boxed{15}$ Решите неравенство $\dfrac{\log_9(2-x)-\log_{15}(2-x)}{\log_{15}x-\log_{25}x}\le\log_{25}9$.

15. Решите неравенство $\dfrac{1}{\log_2(x^4-8x^2+16)-\log_2^2(4-x^2)}\le 1$.

15. Решите неравенство $(x^2+3x+2)\cdot\log_{x+3}(x+2)\cdot\log_3(x-1)^2\le 0$

15. Решите неравенство $|x^2-3x|\cdot\log_2(x+1)\le 3x-x^2$.

Логарифмические неравенства

15. ЕГЭ (П), 2 балла, 15-30 мин

15. Решите неравенство $|x^2-3x|\cdot\log_2(x+1)\le 3x-x^2$.

Решение.

Снимаем модуль:

а) $-1<x<0$ и $x>3$, 0, -1 и 3 – решения неравенства и корни квадратных трехчленов под знаком модуля и в правой части..

$-\log_2(x+1)\le 1$, $\log_2(x+1)\ge\log_2 0{,}5, -x\ge -0{,}5$, $-0{,}5\le x<0$ и $x>3$.

б) $0<x<3$.

$\log_2(x+1)\le 1$, $\log_2(x+1)\ge\log_2 2$, $x\ge 1$.

Объединяем решения: $-0{,}5\le x\le 0$ и $x\ge 1$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};0\right]\cup[1;+\infty)$.

Логарифмические неравенства

Устно

15 Решите неравенство $\dfrac{\log_9(2-x)-\log_{15}(2-x)}{\log_{15}x-\log_{25}x}\le\log_{25}9$.

15. ЕГЭ (П), 2 балла, 15-30 мин

536. Обоснуйте следующие равносильности:

1) $\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g^2(x),\\g(x)\geqslant 0;\end{cases}$

2) $\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)<0,\\f(x)\geqslant 0,\end{cases}\\f(x)>g^2(x);\end{array}\right.$

3) $\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\geqslant 0,\\g(x)>0,\\f(x)<g^2(x);\end{cases}$

4) $\log_{x-3}f(x)>\log_{x-3}g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3<x<4,\\0<f(x)<g(x),\end{cases}\\\begin{cases}x>4,\\f(x)>g(x)>0;\end{cases}\end{array}\right.$

5) $\lg(f(x)\cdot g(x))=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lg f(x)+\lg g(x)=5,\\\lg(-f(x))+\lg(-g(x))=5;\end{array}\right.$

6) $\log_{g(x)}f(x)\geqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}(f(x)-1)(g(x)-1)\geqslant 0,\\x\in\text{ОДЗ};\end{cases}$

7) $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}f(x)=0,\\g(x)=0,\end{array}\right.\\h(x)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)=0,\\h(x)=0,\end{cases}\\\begin{cases}g(x)=0,\\h(x)=0.\end{cases}\end{array}\right.$

537. 1) Обоснуйте равносильность

$$\log_{g(x)}f(x)>0\Leftrightarrow\begin{cases}(f(x)-1)(g(x)-1)>0,\\f(x)>0,\\g(x)>0.\end{cases}$$

2) Используйте её в решении неравенств 5 и 11 из № 191.

538. Запишите, чему равносильно неравенство:
1) $\log_{g(x)}f(x)<0$ и решите с помощью этой равносильности неравенства 4 и 12 из № 191;

190. Решите неравенство, используя метод интервалов:

1) $\dfrac{\log_5x-2}{2-\log_6x}>0;$

2) $\dfrac{\log_{0,5}x+2}{2-\log_3x}<0;$

3) $\dfrac{\log_{0,4}x-2}{3x^2-10x+7}>0;$

4) $\dfrac{7x^2-10x+3}{\log_{0,9}x-2}\leqslant 0;$

5) $\dfrac{x^2-9x-10}{\log_{0,9}(x^2-9)}\geqslant 0;$

6) $\dfrac{\log_5(9-x^2)}{x^2-3x-4}<0.$

191. Решите неравенство:

1) $\log_{x-3}(7-x)>0;$

2) $\log_{7-x}(x-3)>0;$

3) $\log_{x-3}(7-x)>1;$

4) $\log_{x+4}\dfrac{x^2-1}{3}<0;$

5) $\log_{\frac{x^2-1}{3}}(x+4)>0;$

6) $\log_{x-2}(x+10)<2;$

7) $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1;$

8) $\log_{x-1}(x^2-6x+9)<1;$

9) $\log_{x^2-6x+9}(x-1)\leqslant 1;$

10) $\log_{x^2+2}(3x+6)\leqslant 1;$

11)* $\log_{x^2+3x-4}(x+4)>0;$

12)* $\log_{x+4}(x^2+3x-4)<0.$

192. Решите неравенство:

1) $\log_2\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>0;$

2) $\log_{0,6}\log_{0,5}(x+1)>0;$

3) $\log_{0,2}\log_2(2x+3)<-1;$

4) $\log_{\frac{1}{3}}\log_2(2x-1)<-1;$

5)* $\log_{0,5}\log_3\dfrac{x-2}{x-4}>0;$

6)* $\log_3\log_{0,2}\log_{32}\dfrac{x-1}{x+5}>0.$

Логарифмические неравенства

206. Решите уравнение:

1) $2\lg x^2 - \lg^2(-x) = 4$;

2) $3\lg x^2 - \lg^2(-x) = 9$.

207. Решите неравенство:

1) $\log_\pi(x+27) - \log_\pi(16-2x) < \log_\pi x$;

2) $\log_{\sqrt{3}-1}(2x+3) + \log_{\sqrt{3}-1}(4-x) < \log_{\sqrt{3}-1}(2-3x)$;

3) $\log_{\pi-3}(2-7x) - \log_{\pi-3}(2-3x) > \log_{\pi-3}(x+4)$;

4) $\log_3(3^x-1)\cdot\log_{\frac{1}{3}}\left(3^{x-2}-\frac{1}{9}\right) > -3$;

5) $\log_3(4^x+1) + \log_{4^x+1} 3 > 2{,}5$;

6) $\log_4\log_2 x + \log_2\log_4 x \leqslant 0$;

7) $\log_x(x+1) < \log_{\frac{1}{x}}(2-x)$;

8) $\log_2^2(-\log_2 x) + \log_2(\log_2^2 x) \geqslant 3$;

9) $\log_x\log_2(4^x-12) \leqslant 1$;

10) $\log_{0,5}\log_2\log_{x-1} 9 > 0$;

11) $\log_3 \log_{x^2} \log_{x^2} x^4 > 0$;

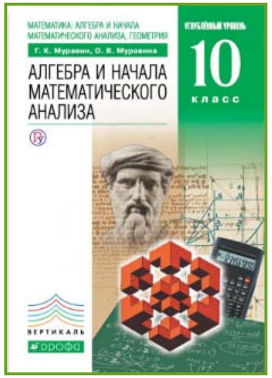
12) $\dfrac{(2x-1)^2}{8\cdot7^x - 4^{x\log_2 7} - 7} \leqslant 0$;

13) $\dfrac{81^x - 12\cdot25^{x\log_5 7} + 27}{(4x-3)^4} \leqslant 0$.

208. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 25^x - 30\cdot5^x + 125 \geqslant 0, \\ \log_x(x-1)\cdot\log_x(x+1) \leqslant 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2\log_{25} x \geqslant \log_{25} x^3 + x\log_5 x, \\ 5^x + 5^{-x} \geqslant \dfrac{17}{4}; \end{cases}$



207. 2) ОДЗ неравенства $-\frac{3}{2} < x < \frac{2}{3}$. Для этих значений x: $\log_{\sqrt{3}-1}(-2x^2+5x+12) < \log_{\sqrt{3}-1}(2-3x)$. Поскольку $\sqrt{3}-1 < 1$, логарифмическая функция с основанием $\sqrt{3}-1$ убывающая, следовательно, $-2x^2+5x+12 > 2-3x$, $2x^2-8x-10 < 0$, $-1 < x < 5$. С учётом ОДЗ получаем о т в е т: $-1 < x < \frac{2}{3}$. 4) $-\log_{\frac{1}{3}}(3^x-1)(2+\log_{\frac{1}{3}}(3^x-1)) + 3 > 0$. Неравенство $-2\log_{\frac{1}{3}}(3^x-1) - \log_{\frac{1}{3}}^2(3^x-1) + 3 > 0$ решаем как квадратное относительно $\log_{\frac{1}{3}}(3^x-1)$: $-3 < \log_{\frac{1}{3}}(3^x-1) < 1$. Учитывая убывание логарифмической функции с основанием $\frac{1}{3}$,

получаем $\frac{1}{3} < 3^x - 1 < 27$, $\frac{4}{3} < 3^x < 28$. Учитывая возрастание показательной функции с основанием 3, получаем о т в е т: $\log_3\frac{4}{3} < x < \log_3 28$;

6) $\frac{1}{2}\log_2\log_2 x + \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right) \leqslant 0$,

$\frac{1}{2}\log_2\log_2 x - 1 + \log_2\log_2 x \leqslant 0$, $\frac{3}{2}\log_2\log_2 x \leqslant 1$,

$\log_2\log_2 x \leqslant \frac{2}{3}$, $\log_2\log_2 x \leqslant \log_2 2^{\frac{2}{3}}$, $0 < \log_2 x \leqslant 2^{\frac{2}{3}}$, $1 < x \leqslant 2^{\sqrt[3]{4}}$.

Логарифмические неравенства

— С чего начнете решение неравенства? [С приведения логарифмов к одному основанию.]

— Давайте приведем неравенство к логарифмам с основанием 3.

— Какое свойство логарифмов примените?

$$\left[\log_{a^p} b = \frac{1}{p}\log_a b.\right]$$

— Как примените это свойство?

$$\left[\log_{3^{-1}}\left(3^{x-2}-\frac{1}{9}\right) = -\log_3\left(3^{x-2}-\frac{1}{9}\right).\right]$$

$$-\log_3(3^x-1)\cdot\log_3\left(3^{x-2}-\frac{1}{9}\right) > -3.$$

— Как дальше предлагаете решать неравенство? [Умножим неравенство на -1, при этом знак неравенства изменится на противоположный.]

$$\log_3(3^x-1)\cdot\log_3\left(3^{x-2}-\frac{1}{9}\right) < 3.$$

— Как преобразовать второй логарифм? [Нужно представить $3^{x-2}=\frac{3^x}{9}$ и вынести общий множитель $\frac{1}{9}$ за скобку.]

$$\log_3(3^x-1)\cdot\log_3\left(\frac{1}{9}(3^x-1)\right) < 3.$$

— Какое свойство примените для преобразования второго логарифма? [Логарифм произведения.]

$$\log_3(3^x-1)\cdot\left(\log_3\frac{1}{9}+\log_3(3^x-1)\right) < 3,$$

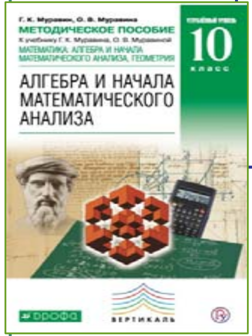
$$\log_3(3^x-1)\cdot(\log_3(3^x-1)-2) < 3,$$

$$\log_3^2(3^x-1)-2\log_3(3^x-1)-3 < 0.$$

— Какое неравенство получилось? [Квадратное неравенство относительно $\log_3(3^x-1)$.]

— Сделайте замену переменных: $y=\log_3(3^x-1)$ и решите квадратное неравенство

$$y^2-2y-3<0,\ -1<y<3.$$



Затем можно разобрать с классом решение № 207 (4).

Поиск решения неравенства.

$$\log_3(3^x-1)\cdot\log_{\frac{1}{3}}\left(3^{x-2}-\frac{1}{9}\right) > -3.$$

— Запишите логарифмическое неравенство относительно x. Меняются ли знаки неравенства при переходе от логарифмов к аргументам?

$$-1<\log_3(3^x-1)<3,\ \frac{1}{3}<3^x-1<27.$$

— Решите показательное неравенство. Меняются ли знаки неравенства при переходе от показателей степени к основанию? Нужно ли делать проверку? Нужно ли искать ОДЗ?

$$\frac{4}{3}<3^x<28,\ \log_3\frac{4}{3}<x<\log_3 28.$$

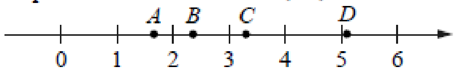
Записи ведутся учителем на доске в результате обсуждения с классом каждого шага. Полезно предложить школьникам сравнить решение на доске с решением, помещенным в учебнике. При этом задать следующие вопросы.

1. К какому основанию приводятся логарифмы?
2. Изменилось ли логарифмическое неравенство после приведения к одному основанию?
3. Изменилось ли квадратное неравенство относительно логарифма?
4. Изменилось ли его решение?
5. Изменился ли ответ?
6. Какой вывод можно сделать?

Комплексные задания

17. ЕГЭ (Б), 1 балл, 9 мин

17 На координатной прямой отмечены точки A, B, C и D.



Каждой точке соответствует одно из чисел в правом столбце. Установите соответствие между указанными точками и числами.

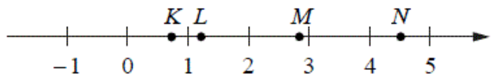
ТОЧКИ	ЧИСЛА
A	1) $\log_2 10$
B	2) $\frac{7}{3}$
C	3) $\sqrt{26}$
D	4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

A	B	C	D

На прямой отмечены точки K, L, M и N.



Установите соответствие между указанными точками и числами из правого столбца, которые им соответствуют.

ТОЧКИ	ЧИСЛА
А) K	1) $\log_5 7$
Б) L	2) $\frac{17}{6}$
В) M	3) $\sqrt{0,5}$
Г) N	4) $0,22^{-1}$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующую цифру.

Ответ:

А	Б	В	Г

17 Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений из правого столбца. Установите соответствие между неравенствами и множествами их решений.

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $\frac{(x-2)^2}{x-1}<0$	1) $(1;+\infty)$
Б) $2^{-x}<0,5$	2) $(1;2)$
В) $\log_2 x>1$	3) $(2;+\infty)$
Г) $(x-1)(x-2)<0$	4) $(-\infty;1)$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующую цифру.

Ответ:

А	Б	В	Г

17 Каждому из четырёх чисел в левом столбце соответствует отрезок, которому оно принадлежит. Установите соответствие между числами и отрезками из правого столбца.

ЧИСЛА	ОТРЕЗКИ
А) $\log_2 10$	1) $[1;2]$
Б) $\frac{7}{3}$	2) $[2;3]$
В) $\sqrt{26}$	3) $[3;4]$
Г) $0,6^{-1}$	4) $[5;6]$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующую цифру.

Ответ:

А	Б	В	Г

Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

7. ЕГЭ (Б) 1 балл, 8 мин

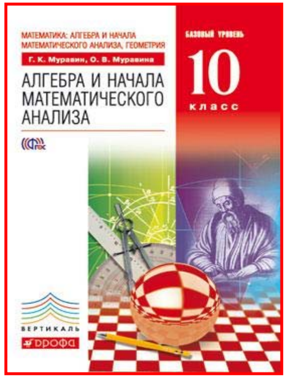
7 Найдите корень уравнения $3^{x-3}=81$.

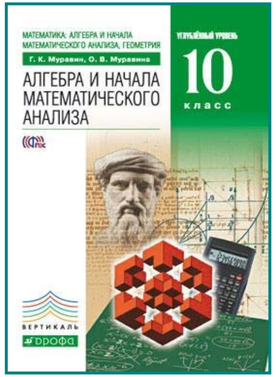
Ответ: ________________________________.

ИЛИ

Найдите корень уравнения $\log_2(x-3)=6$.

Ответ: ________________________________.





Контрольная работа № 3 (к п. 9—11) (90 мин)

I уровень

1. Найдите a, если известно, что график функции $y=a^x$ проходит через точку $M(-0{,}25;\,2)$.

2. Решите уравнение:

1) $\log_2 x-\log_{0,5}(x-2)=3$; 2) $11^{x+2}-22\cdot 11^x=9$.

3. Решите неравенство:

1) $\dfrac{2^x-0{,}25}{3+x}>0$; 2) $\log_{0,2}(x+3)>-2$.

II уровень

4. Решите уравнение:

1) $2^x+\dfrac{5}{2^{x-2}}-9=0$; 2) $x^{\log_3 x}=81$.

5. Решите неравенство:

1) $\log_{x-2}(5-x)>0$; 2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}$.

III уровень

6. Решите неравенство $\log_2(2+x)>1-x$.

7. 1) На сколько процентов возрастёт вклад в банке за два года, если банк ежемесячно начисляет 3% ?

2) ■ Найдите сумму, которая окажется на вкладе через два года, если начальный вклад составил 10 000 р.

Тригонометрические выражения

5. ЕГЭ (Б), 1 балл, 8 мин

5 Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}8$ и $90° < \alpha < 180°$.

Ответ: ___________________________.

9. ЕГЭ (П), 1 балл, 5-10 мин

9 Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}6$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.

Ответ: ___________________________.

Устные задания

1. Найдите значение выражения:

а) $3\sin 90°$; б) $2\cos 45°$; в) $-2\cos 270°$; г) $\sin\frac{\pi}{3}$.

2. Найдите значение выражения:

а) $3\cos 270° + 5\sin 0°$. в) $2\sin 270° - 3\cos 180°$;

б) $4\cos 0° - 3\sin 270°$; г) $\sin\frac{3\pi}{2}\cos\pi$.

Тригонометрические уравнения

13. ЕГЭ (П), 2 балл, 10-20 мин

13. Дано уравнение $\sqrt{0,5+\sin^2 x}+\cos 2x=1.$

а) Решите уравнение.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right].$

Решение.

1) $y=\sin^2 x,\quad y\in[0;1].$

2) $\sqrt{0,5+y}=2y,\ 4y^2-y-0,5=0,\ 8y^2-2y-1=0,\ y=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{8},\ y=\frac{1\pm 3}{8},$

$y=0,5$ с учетом возможных значений y. $\sin x=\pm\frac{\sqrt{2.}}{2}.$

Ответ: $\sin x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.$

Тригонометрические уравнения

13. ЕГЭ (П), 2 балл, 10-20 мин

13 а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

284. Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$:

1) $\sin x = 0$;
2) $\cos x - 1 = 0$;
3) $3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$;
4) $\operatorname{ctg}^2 x - 3 = 0$;
5) $2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$;
6) $\operatorname{ctg}(x - \pi) - 1 = 0$;
7) $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2} = 0$;
8) $2 \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x = 0$.

298. Решите уравнение на промежутке $[0; 2\pi]$:

1) $2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2}$;
2) $2 \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$;
3) $\operatorname{tg}(\pi + x) = 1$;
4) $3 \operatorname{ctg}(2\pi - x) = \sqrt{3}$.

299. Решите уравнение:

1) $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2} = 0$;
2) $\cos(2\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{2}$;
3) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\frac{\pi}{4}$;
4) $3 \operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{3} = 0$.

13. Дано уравнение $\sqrt{0{,}5 + \sin^2 x} + \cos 2x = 1$.

а) Решите уравнение.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Формулы приведения являются тождествами, т. е. они верны для любых допустимых значений φ. Анализируя полученную таблицу, можно заметить, что:

1) *знак в правой части формулы совпадает со знаком приводимой функции в соответствующей четверти, если считать φ острым углом;*

2) *название меняют только функции углов* $\frac{\pi}{2} \pm \varphi$ и $\frac{3\pi}{2} \pm \varphi$ ($90° \pm \alpha°$ и $270° \pm \alpha°$).

α	$\varphi + 2\pi n$	$-\varphi$	$\pi - \varphi$	$\pi + \varphi$
$\sin\alpha$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$
$\cos\alpha$	$\cos\varphi$	$\cos\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\cos\varphi$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$
α	$\frac{\pi}{2} - \varphi$	$\frac{\pi}{2} + \varphi$	$\frac{3\pi}{2} - \varphi$	$\frac{3\pi}{2} + \varphi$
$\sin\alpha$	$\cos\varphi$	$\cos\varphi$	$-\cos\varphi$	$-\cos\varphi$
$\cos\alpha$	$\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$-\sin\varphi$	$\sin\varphi$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$-\operatorname{ctg}\varphi$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$-\operatorname{tg}\varphi$

Тригонометрические уравнения

340. Упростите выражение (выявите закономерность на первых двух заданиях и примените её к остальным):

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$;
2) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$;
3)○ $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;
4)○ $\sin\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)$.

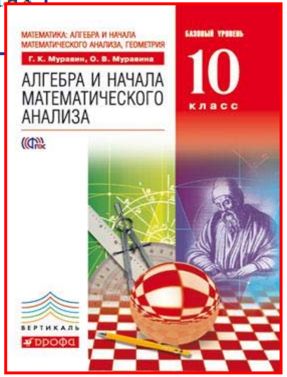
341. 1) Упростите выражение (выявите закономерность на первых двух заданиях и примените её к остальным):

а) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$;
б) $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$;
в)○ $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;
г)○ $\sin\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\beta-\frac{\pi}{6}\right)$.

2)● Сравните закономерности, выявленные в заданиях 340 и 341.

352.○ Решите уравнение:

1) $\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=0$;
2) $\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=1$;
3) $\cos 3x\cos\frac{\pi}{6}+0{,}5=\sin 3x\sin\frac{\pi}{6}$;
4) $\sin\frac{3\pi}{2}\cos 2x=\cos\frac{3\pi}{2}\sin 2x-1$.



13. ЕГЭ (П), 2 балл, 10-20 мин

13 а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

363.○ Решите уравнение:

1) $\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x}=\sqrt{3}$;
2) $\frac{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}x}=-1$;
3) $\operatorname{tg}x+4\operatorname{ctg}x=4$;
4) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}x}=0$;
5) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}+\operatorname{tg}2x}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}2x}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$;
6) $\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}x-6=0$.

411. Найдите наименьший положительный корень уравнения $4\sin 3x\sin x-2\cos 2x+1=0$.

412.● Найдите на отрезке $[-\pi;\pi]$ все решения уравнения:

1) $\cos 2x+\sin^2x=\cos x$;
2) $\frac{2\cos^2x+\cos x}{2\cos x+7\sin^2x}=-\frac{1}{2}$.

Комплексные задания

Пример 6. Решить уравнение

$$\sin \pi x + \cos \pi x = 2^{\log_3 \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{49}{16}}}.$$

Решение. Наибольшее значение, которое может принять сумма синуса и косинуса одного и того же угла, равно $\sqrt{2}$, так как $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \leqslant \sqrt{2}$.

Правая часть равенства в силу возрастания функций $u = \sqrt{v}$, $t = \log_3 u$ и $y = 2^t$ принимает своё наименьшее значение при $x = \frac{1}{4}$ (абсцисса вершины параболы $v = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{49}{16}$, целиком расположенной в верхней полуплоскости ввиду отрицательности дискриминанта соответствующего квадратного трёхчлена). Найдём это значение:

$$2^{\log_3 \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{49}{16}}} = 2^{\log_3 \sqrt{3}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Оказалось, что наименьшее значение правой части уравнения совпадает с наибольшим значением его левой части. Остаётся проверить, происходит ли это при одном и том же значении x. Найдём значение левой части уравнения при $x = \frac{1}{4}$: $\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$. Значит, $\frac{1}{4}$ — корень данного уравнения.

Поскольку при всех других значениях x значения правой части уравнения больше, чем значения его левой части, то других корней нет.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

13. ЕГЭ (П), 2 балл, 10-20 мин

13. а) Решите уравнение $\left(\frac{6}{5}\right)^{\cos 3x} + \left(\frac{5}{6}\right)^{\cos 3x} = 2$

Совет. Либо свести к квадратному уравнению, либо заметить, что 2 – наименьшее значение суммы положительных взаимно обратных величин, когда каждая из них равна 1.

310. Составьте план решения уравнени… его выполнить:

1) $|\sin x|(2x + 1) = |x + 0{,}5|$;

2) $9^{|x-2|\sin x} = 3^{x|\sin x|}$;

3) $\log_x(2x) = \sqrt{\log_x(2x^3)}$;

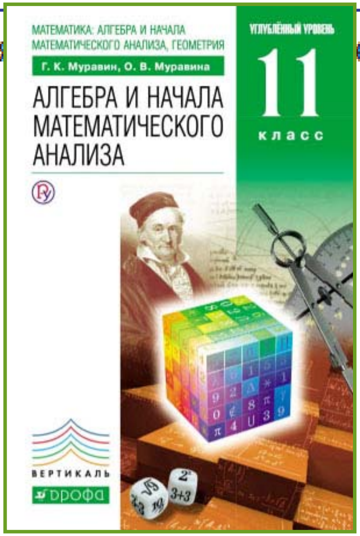
4) $x^{\frac{\lg x + 5}{3}} = 10^{\lg x + 1}$;

5) $\log_2 x \cdot \log_x\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right) = 1$;

6) $4^{3x^2 + x} - 8 = 2\cdot 8^{x^2 + \frac{x}{3}}$;

7) $\log_7(7^{-x} + 6) = 1 + x$;

8) $2^{\frac{3x-1}{2x+1}} - 1 = 2^{\frac{2-x}{2x+1}}$.



Комплексные задания

310. Составьте план решения уравнения и постарайтесь его выполнить:

1) $|\sin x|\,(2x+1)=|x+0{,}5|$;

2) $9^{|x-2|\,\sin x}=3^{x|\sin x|}$;

3) $\log_x(2x)=\sqrt{\log_x(2x^3)}$;

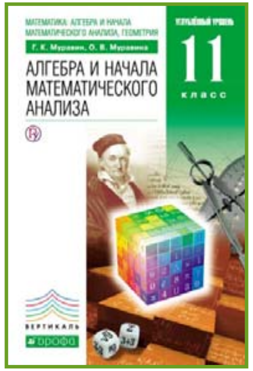
4)○ $x^{\frac{\lg x+5}{3}}=10^{\lg x+1}$;

5)○ $\log_2 x\cdot\log_x\left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)=1$;

6)○ $4^{3x^2+x}-8=2\cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}$;

7)● $\log_7(7^{-x}+6)=1+x$;

8)* $2^{\frac{3x-1}{2x+1}}-1=2^{\frac{2-x}{2x+1}}$.



№ 310 (1). Решение. $|\sin x|(2x+1)=|x+0{,}5|$, $2|\sin x|(x+0{,}5)=|x+0{,}5|$, $x=-0{,}5$ или $\begin{cases}x>-0{,}5,\\ |\sin x|=0{,}5,\end{cases}$ или $\begin{cases}x<-0{,}5,\\ |\sin x|=-0{,}5.\end{cases}$ Последняя система не имеет решений. Найдем решения системы $\begin{cases}x>-0{,}5,\\ |\sin x|=0{,}5,\end{cases}$ $\begin{cases}x>-0{,}5,\\ \sin x=0{,}5 \text{ или } \sin x=-0{,}5.\end{cases}$ Здесь, как и в большинстве сложных ситуаций, лучше не использовать объединенные формулы решения простейших тригонометрических уравнений, а записывать решения сериями. Поскольку $-\frac{\pi}{6}<-0{,}5<\frac{\pi}{6}$, $x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $x_2=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $x_3=\frac{7\pi}{6}+2\pi k$, $x_4=\frac{11\pi}{6}+2\pi k$, $k=0, 1, 2, \dots$.

$$x_1=\frac{\pi}{6}+\pi k,\ x_2=\frac{5\pi}{6}+\pi k,\ k=0, 1, 2, \dots .$$

Ответ: $-0{,}5$, $\frac{\pi}{6}+\pi k$, $\frac{5\pi}{6}+\pi k$, $k=0, 1, 2, \dots$.

№ 310 (2). Решение. Сначала приведем степени к одинаковым основаниям.

$9^{|x-2|\sin x}=3^{x|\sin x|}$, $3^{2|x-2|\sin x}=3^{x|\sin x|}$, $2|x-2|\sin x=x|\sin x|$, $\sin x=0$ или $\begin{cases}\sin x>0,\\ 2|x-2|=x,\end{cases}$ или $\begin{cases}\sin x<0,\\ 2|x-2|=-x.\end{cases}$ Корни $x=4$ и $x=\frac{4}{3}$ второго уравнения системы $\begin{cases}\sin x>0,\\ x=4 \text{ или } x=\frac{4}{3}\end{cases}$ проверяются подстановкой в первое неравенство системы: $\sin 4>0$ неверно, $\sin\frac{4}{3}>0$ верно. Второе уравнение второй системы корней не имеет. Ответ: $\frac{4}{3}$, πk, где $k\in Z$.

Тригонометрические уравнения

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО ТЕМЕ «ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА»

Вариант 1

I уровень

Укажите номер ответа, который вы считаете верным.

1. Найдите значение выражения

$$\frac{\sin 50^\circ \cdot \cos 5^\circ - \sin 5^\circ \cdot \cos 50^\circ}{2\cos^2 15^\circ - 1}.$$

Ответы: 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

2. Упростите выражение $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{1 + \sin 2\alpha}$.

Ответы: 1) 1; 2) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$; 3) $\frac{1}{1 + \sin 2\alpha}$; 4) $1 + \sin 2\alpha$.

3. Найдите наименьший положительный корень уравнения $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$.

Ответы: 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi}{4}$.

4. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Ответы: 1) $-\frac{8}{17}$; 2) $\frac{2}{17}$; 3) $\frac{6}{17}$; 4) $\frac{8}{17}$.

5. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \sin^2 x$ и $y = \cos^2 x$.

Ответы: 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; 4) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$.

II уровень

6. Сколько корней имеет уравнение

$$\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)\sqrt{4 - x^2} = 0\ ?$$

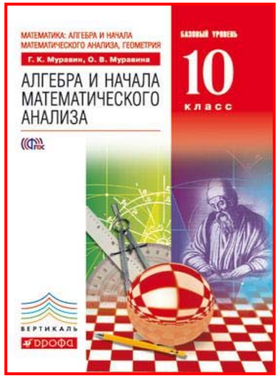
7. Решите неравенство $\sin\frac{4x}{3} > -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

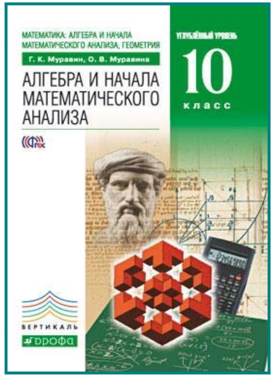
8. Найдите $\cos\alpha - \sin\alpha$, если известно, что $\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{1}{4}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

III уровень

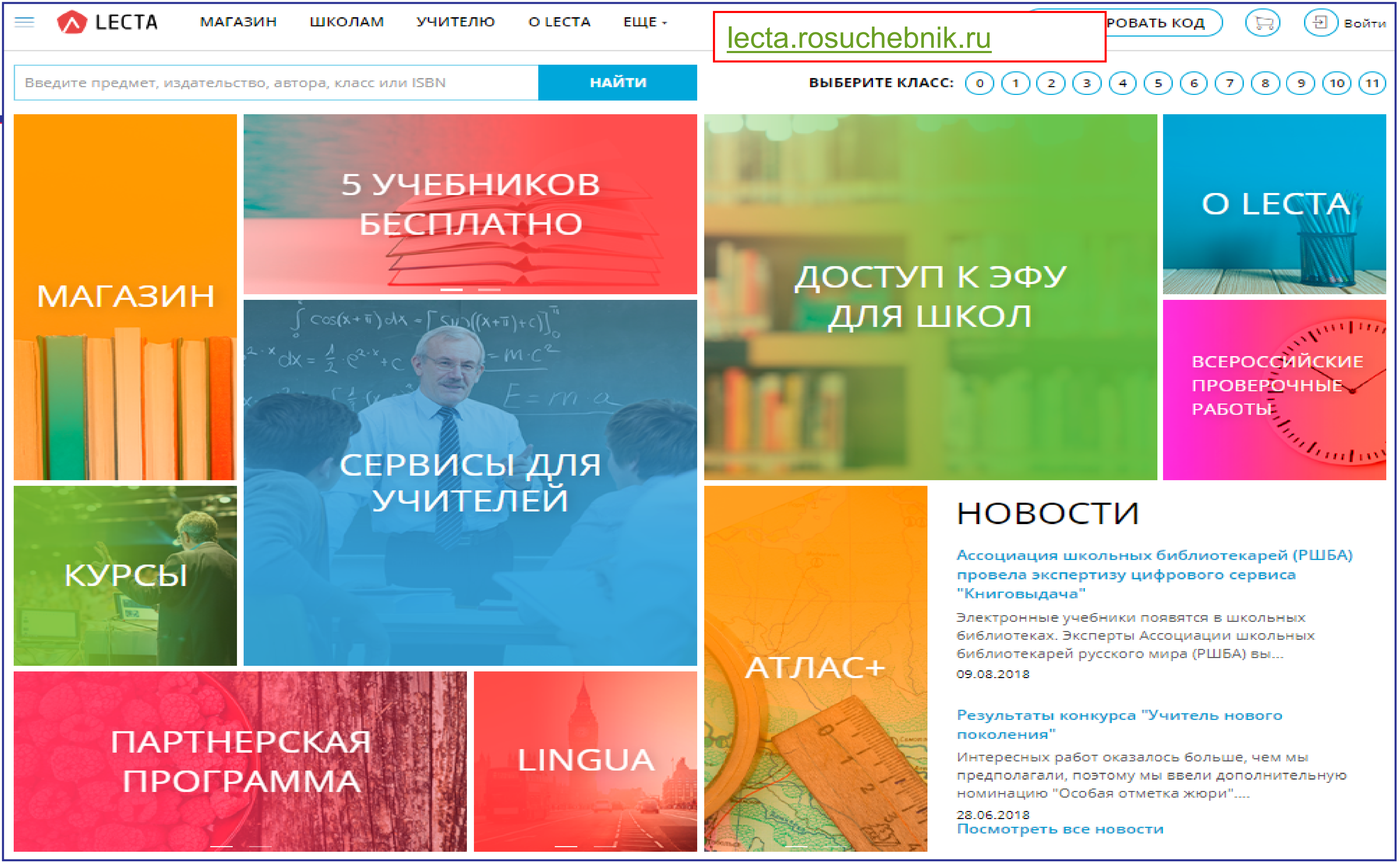
9. Сравните числа $\frac{\sin 115^\circ}{16\sin 7^\circ}$ и $\cos 7^\circ \cos 14^\circ \cos 28^\circ \cos 56^\circ$.

10. Решите уравнение $2\sin^2 x = |\sin x|$.





lecta.rosuchebnik.ru



дрофа
вентана граф

LECTA

НАДЕЖНАЯ ОСНОВА ЦИФРОВОЙ ШКОЛЫ: ПРОСТЫЕ РЕШЕНИЯ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ

КНИГАВЫДАЧА – возможность обеспечить школу учебниками, сэкономить время и средства.

1	500	ЛЮБЫЕ	75
учебник	дней	устройства пользователя	рублей

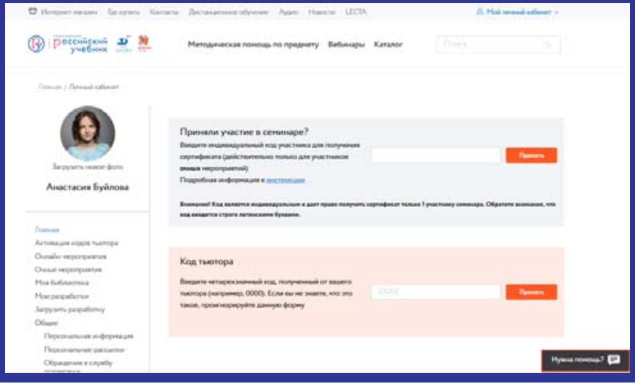
В библиотеке платформы LECTA **более 500 учебников и учебных пособий в электронной форме** (ЭФУ) и аудиприложений по всей школьной программе.

В соответствии с Приказами МОиН РФ № 1047 от 05.09.2013, № 870 от 18.07.2016 **электронные формы учебника** приравниваются к бумажным и **могут быть приобретены за бюджетные средства** (**уточнить на соответствие новому приказу**)

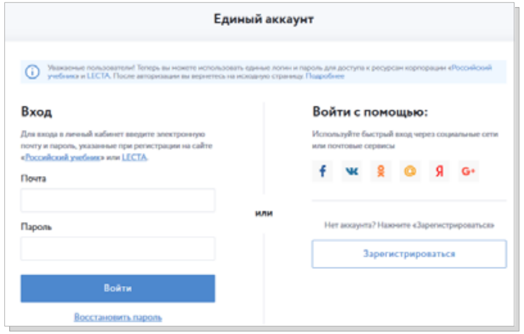
Адрес сайта: https://lecta.rosuchebnik.ru/

РЕГИСТРИРУЙТЕСЬ НА САЙТЕ ROSUCHEBNIK.RU И ПОЛЬЗУЙТЕСЬ ПРЕИМУЩЕСТВАМИ ЛИЧНОГО КАБИНЕТА

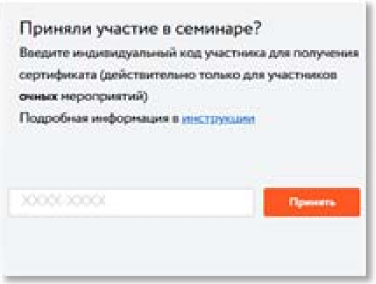
- Регистрируйтесь на очные и онлайн-мероприятия
- Получайте сертификаты за участие в вебинарах и конференциях
- Пользуйтесь цифровой образовательной платформой LECTA
- Учитесь на курсах повышения квалификации
- Скачивайте рабочие программы, сценарии уроков и внеклассных мероприятий, готовые презентации и многое другое
- Создавайте собственные подборки интересных материалов
- Участвуйте в конкурсах, акциях и спецпроектах
- Становитесь членом экспертного сообщества
- Сохраняйте архив обращений в службу техподдержки
- Управляйте новостными рассылками



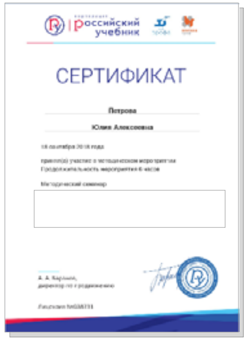
Войдите в свой личный кабинет или зарегистрируйтесь на сайте rosuchebnik.Ru



Введите код участника семинара (из памятки)

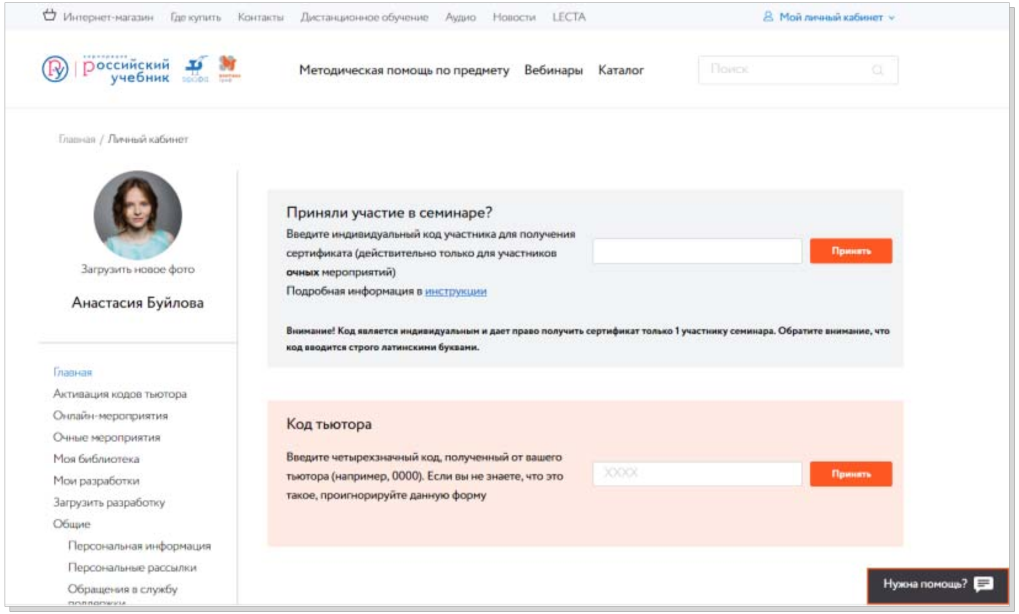


Получите Сертификат



РЕГИСТРИРУЙТЕСЬ НА САЙТЕ ROSUCHEBNIK.RU И ПОЛЬЗУЙТЕСЬ ПРЕИМУЩЕСТВАМИ ЛИЧНОГО КАБИНЕТА

- Регистрируйтесь на очные и онлайн-мероприятия
- Получайте сертификаты за участие в вебинарах и конференциях
- Пользуйтесь цифровой образовательной платформой LECTA
- Учитесь на курсах повышения квалификации
- Скачивайте рабочие программы, сценарии уроков и внеклассных мероприятий, готовые презентации и многое другое
- Создавайте собственные подборки интересных материалов
- Участвуйте в конкурсах, акциях и спецпроектах
- Становитесь членом экспертного сообщества
- Сохраняйте архив обращений в службу техподдержки
- Управляйте новостными рассылками



корпорация российский учебник

дрофа

вентана граф

корпорация российский учебник

Информационно-методическая поддержка

Муравин Георгий Константинович
Муравина Ольга Викторовна
E-mail: olgamuravina@gmail.com
Сайт: Muravins.ru

Хотите купить?

book 24
Официальный интернет-магазин учебной литературы
book24.ru

LECTA
Цифровая среда школы
lecta.rosuchebnik.ru

Отдел продаж
sales@rosuchebnik.ru

Хотите продолжить общение?

youtube.com/user/drofapublishing

fb.com/rosuchebnik

vk.com/ros.uchebnik

ok.ru/rosuchebnik

[rosuchebnik.ru, росучебник.рф](http://rosuchebnik.ru)

Москва, Пресненская наб., д. 6, строение 2
+7 (495) 795 05 35, 795 05 45, info@rosuchebnik.ru

Нужна методическая поддержка?

Методический центр
8-800-2000-550 (звонок бесплатный)
metod@rosuchebnik.ru

Хотите купить?

book 24

Официальный интернет-магазин учебной литературы
book24.ru

LECTA

Цифровая среда школы
lecta.rosuchebnik.ru

Отдел продаж
sales@rosuchebnik.ru

Хотите продолжить общение?

youtube.com/user/drofapublishing

fb.com/rosuchebnik

vk.com/ros.uchebnik

ok.ru/rosuchebnik