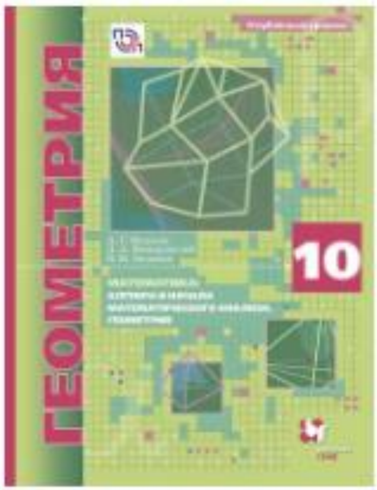
корпорация российский учебник

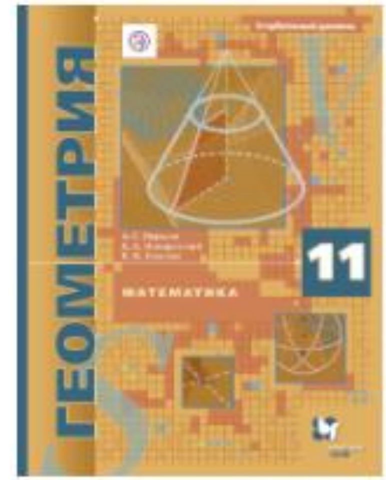
LECTA

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ. РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Ким Н.А. учитель математики
ГБОУ города Москвы «Школа №875»

АПРОБАЦИЯ УЧЕБНИКОВ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ УГЛУБЛЕННОГО ИЗУЧЕНИЯ КУРСА 10-11 КЛАССОВ в пилотной школе №875 города Москвы





Условные обозначения

◆ Простые задачи

◆◆ Задачи среднего уровня сложности

◆◆◆ Сложные задачи

Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

■ Окончание доказательства теоремы

■ Окончание решения задачи

Задачи, которые можно решать с помощью компьютера

1.7. Задания, рекомендуемые для устной работы

1.11. Задания, рекомендуемые для домашней работы

корпорация российский учебник
дрофа
вентана граф

ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛИ ОБРАЗОВАНИЯ

- научить учиться
- включение содержания обучения в контекст решения жизненных задач
- повышение мотивации к образованию, в том числе к самообразованию
- планирование деятельности ученика в инновационной образовательной среде
- целенаправленная организация и планомерное развитие учебной деятельности
- признание решающей роли учебного сотрудничества в достижении учебных целей

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ КОНЦЕПЦИИ УМК «ГЕОМЕТРИЯ» ДЛЯ 10 И 11 КЛАССОВ МЕРЗЛЯКА А.Г., ПОЛОНСКОГО В.П., ЯКИРА М.С.

- **Логическая последовательность**
- **Ступенчатость изложения**
- **Преемственность**
- **Классификация и узнаваемость**
- **Алгоритмизация решения задач**
- **Возможность самообразования**
- **Достаточность**
- **Уровневая дифференциация**
- **Поэтапная систематизация и возможность контроля**

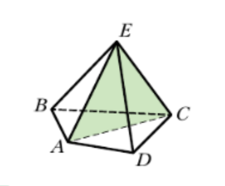


Рис. 3.15

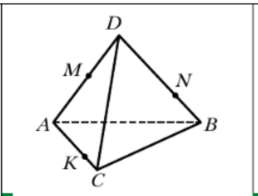


Рис. 3.16

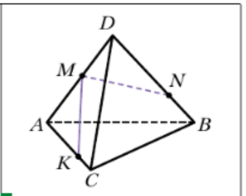


Рис. 3.17

На рисунке 3.15 секущую плоскость задают две пересекающиеся прямые AE и CE. Сечением пирамиды этой плоскостью является треугольник AEC.

Задача 2. На рёбрах AD, DB и AC тетраэдра $DABC$ отмечены соответственно точки M, N и K (рис. 3.16). Постройте сечение тетраэдра плоскостью KMN, если отрезок MN не параллелен ребру AB.

Решение. Точки M и N являются общими для плоскости KMN и плоскости ADB. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой MN. Тогда секущая плоскость пересекает грань ADB по отрезку MN (рис. 3.17). Аналогично делаем вывод, что плоскость KMN пересекает грань ADC по отрезку KM.

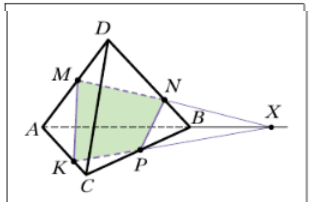


Рис. 3.18

Секущая плоскость KMN и плоскость ABC имеют общую точку K. Следовательно, они пересекаются по прямой, проходящей через точку K. Чтобы эту прямую построить, надо найти ещё одну общую точку плоскостей ABC и KMN. Для этого найдём точку пересечения прямой MN и плоскости ABC.

Пусть прямая MN пересекает прямую AB в точке X (рис. 3.18). Поскольку $AB \subset ABC$, то $X \in ABC$. Поскольку $MN \subset KMN$, то $X \in KMN$. Итак, точки K и X являются общими для плоскостей ABC и KMN. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой KX.

Пусть прямая KX пересекает отрезок CB в точке P. Тогда секущая плоскость пересекает грани ABC и CDB соответственно по отрезкам KP и PN. Итак, четырёхугольник $KMNP$ — искомое сечение. ■

Задача 3. Точка M принадлежит боковому ребру BB_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Прямая a принадлежит плоскости ABC и расположена так, как показано на рисунке 3.19. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через прямую a и точку M.

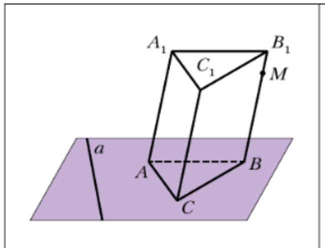


Рис. 3.19

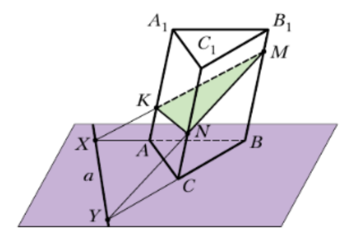


Рис. 3.20

Решение. Пусть прямая AB пересекает прямую a в точке X (рис. 3.20). Точки M и X являются общими для секущей плоскости и плоскости AA_1B_1. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой MX. Пусть прямая MX пересекает ребро AA_1 в точке K. Тогда секущая плоскость пересекает боковую грань AA_1B_1B по отрезку KM.

Аналогично строим отрезок MN, по которому секущая плоскость пересекает грань CC_1B_1B.

Для завершения решения осталось соединить точки N и K. Треугольник KMN — искомое сечение. ■

Задача 4. На рёбрах AD, DD_1 и B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены соответственно точки M, N и K (рис. 3.21). Постройте сечение куба плоскостью MNK.

Решение. Очевидно, что секущая плоскость пересекает грань AA_1D_1D куба по отрезку MN (рис. 3.22).

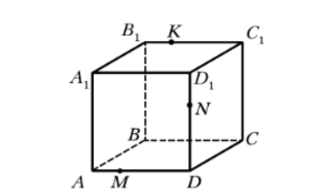


Рис. 3.21

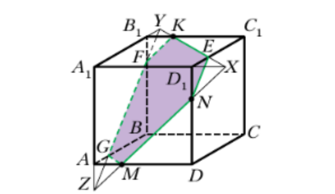


Рис. 3.22

3.25. На боковых рёбрах MB и MC пирамиды $MABCD$ отметили соответственно точки E и F (рис. 3.46). Постройте линию пересечения плоскостей AEC и BDF.

3.26. На рёбрах AA_1 и A_1B_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ отмечены точки D и E соответственно (рис. 3.47). Постройте сечение призмы плоскостью CDE.

3.27. Дана пирамида $MABCD$ (рис. 3.48). На боковых рёбрах MB и MC отметили соответственно точки E и F, а на продолжении ребра MA за точку A — точку K. Постройте сечение пирамиды плоскостью EFK.

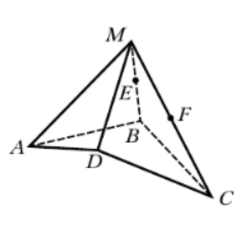


Рис. 3.46

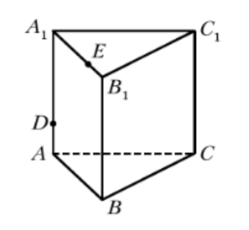


Рис. 3.47

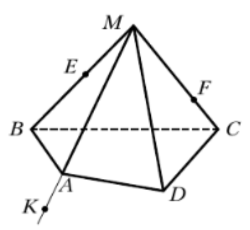


Рис. 3.48

3.28. На боковом ребре BB_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка M (рис. 3.49). Постройте сечение призмы плоскостью CMD.

3.29. На ребре CC_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E (рис. 3.50). Постройте сечение призмы плоскостью BA_1E.

3.30. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Отметьте на его рёбрах три точки так, чтобы сечение куба плоскостью, проходящей через эти точки, было пятиугольником.

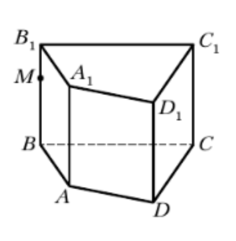


Рис. 3.49

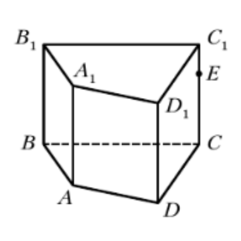


Рис. 3.50

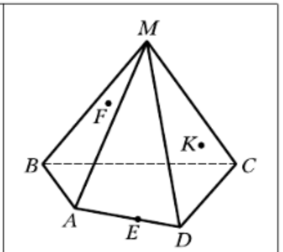


Рис. 3.51

3.31. Дана пирамида $MABCD$ (рис. 3.51). На ребре AD отметили точку E, на грани AMB — точку F, на грани CMD — точку K. Постройте сечение пирамиды плоскостью EFK.

3.32. Точка K принадлежит ребру AC тетраэдра $DABC$, точка E — грани ADB, точка F — грани BDC (рис. 3.52). Постройте сечение тетраэдра плоскостью EFK.

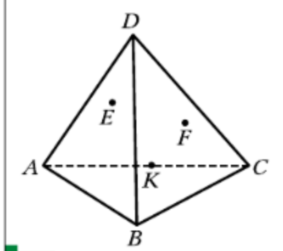


Рис. 3.52

3.33. На рёбрах BC, CA и CD тетраэдра $DABC$ отметили точки M, N и P соответственно (рис. 3.53). Постройте точку пересечения плоскостей ABP, ADM и BDN.

3.34. На рёбрах BC, CA и CD тетраэдра $DABC$ отметили точки M, N и P соответственно (рис. 3.53). Постройте точку пересечения плоскостей BPN, AMP и MND.

3.35. Верно ли, что если все грани многогранника — равные квадраты, то этот многогранник — куб?

3.36. Точки M, N и K принадлежат соответственно граням ADB, BDC и CDA тетраэдра $DABC$ (рис. 3.54). Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

3.37. Точки F, M и K принадлежат соответственно граням ASB, ABC и CSD пирамиды $SABCD$ (рис. 3.55). Постройте сечение пирамиды плоскостью FMK.

3.38. Точки F, M и K принадлежат соответственно граням ASB, ASD и DSC пирамиды $SABCD$ (рис. 3.55). Постройте сечение пирамиды плоскостью FMK.

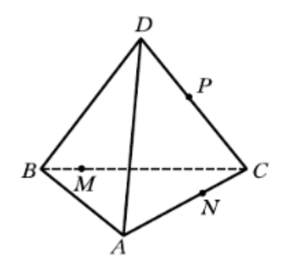


Рис. 3.53

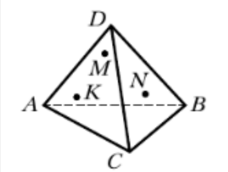


Рис. 3.54

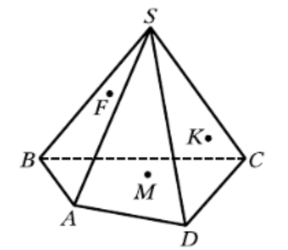


Рис. 3.55

ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ НА ОСНОВЕ СИСТЕМ АКСИОМ И СЛЕДСТВИЙ ИЗ НИХ

Определение: сечение многогранника – это многоугольник, вершины которого принадлежат ребрам, а стороны – граням многогранника, при этом две соседние вершины принадлежат одной грани.

Аксиомы стереометрии:

1) Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

2) Если две точки прямой лежит в плоскости, то все точки данной прямой лежат в этой плоскости.

3) Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, которой принадлежат все общие точки этих плоскостей.

Аксиомы планиметрии:

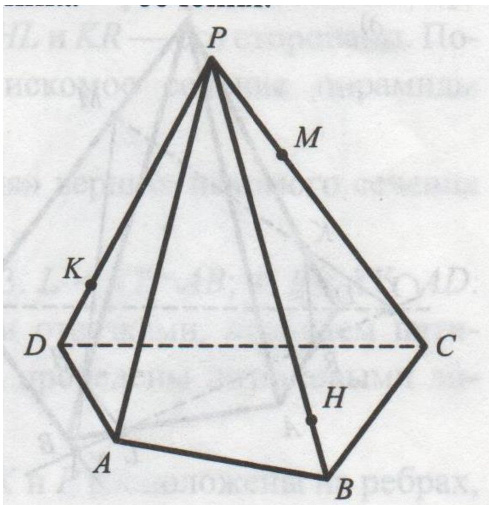
1) В любой плоскости пространства выполняются все аксиомы планиметрии.

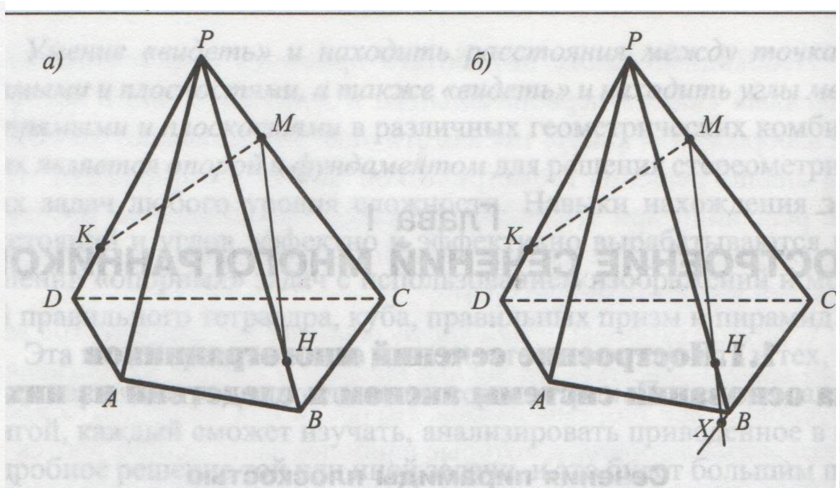
Теоремы:

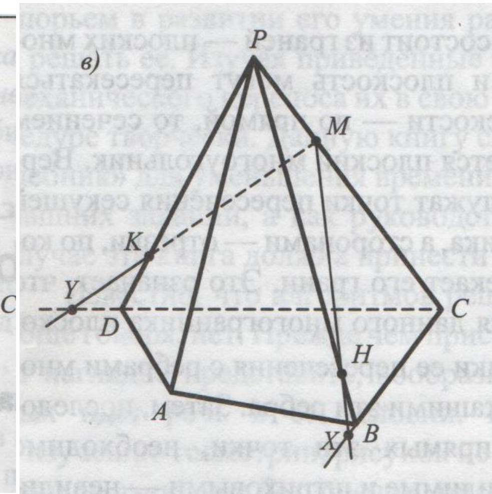
1) Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

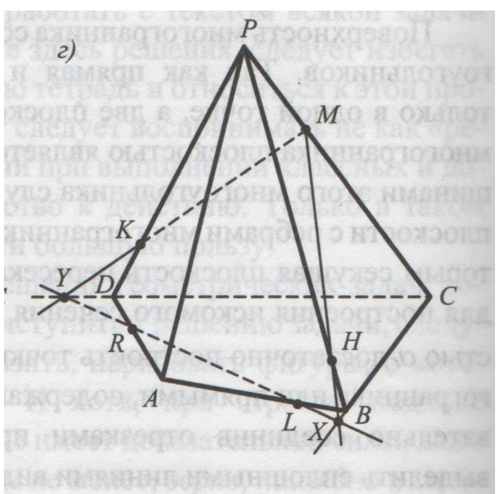
2) Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает ее, то линия пересечения параллельна этой прямой.

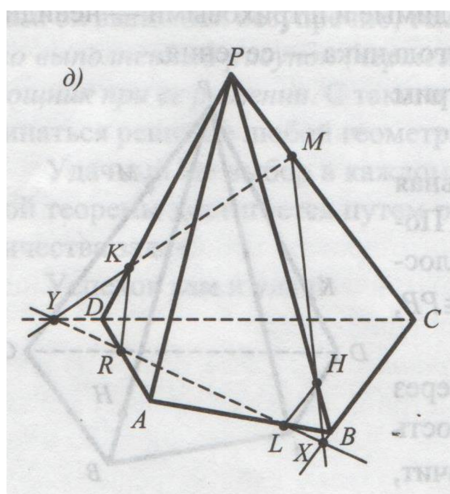
Задача 1. Дана четырехугольная пирамида *PABCD* с вершиной *P*. Постройте сечение этой пирамиды плоскостью *MHK*, где *M* находится на ребре *PC*, *H* на ребре *PB*, *K* на ребре *PD*.

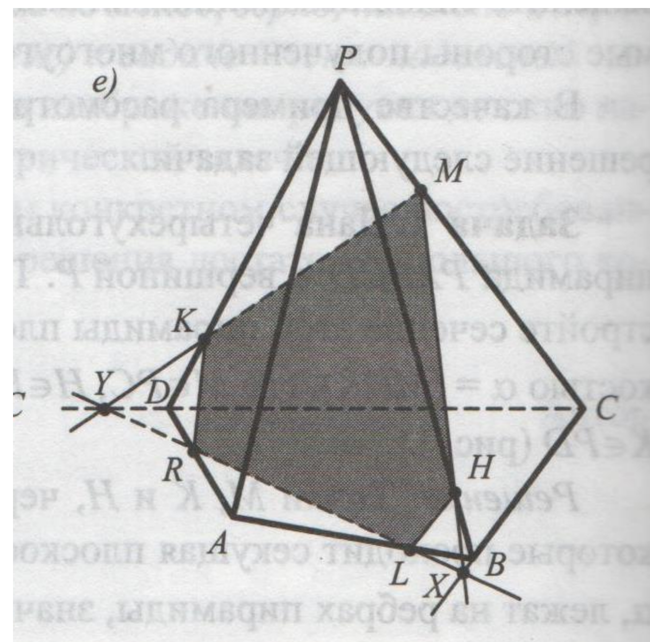




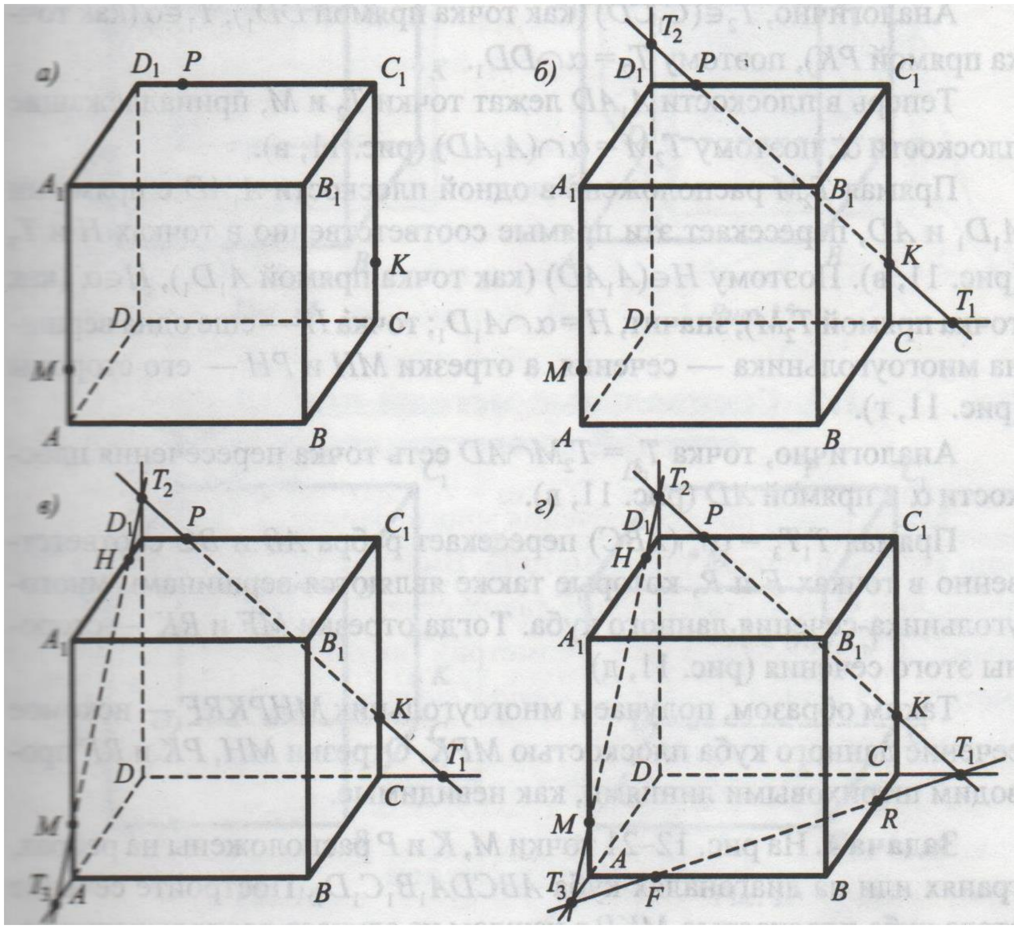


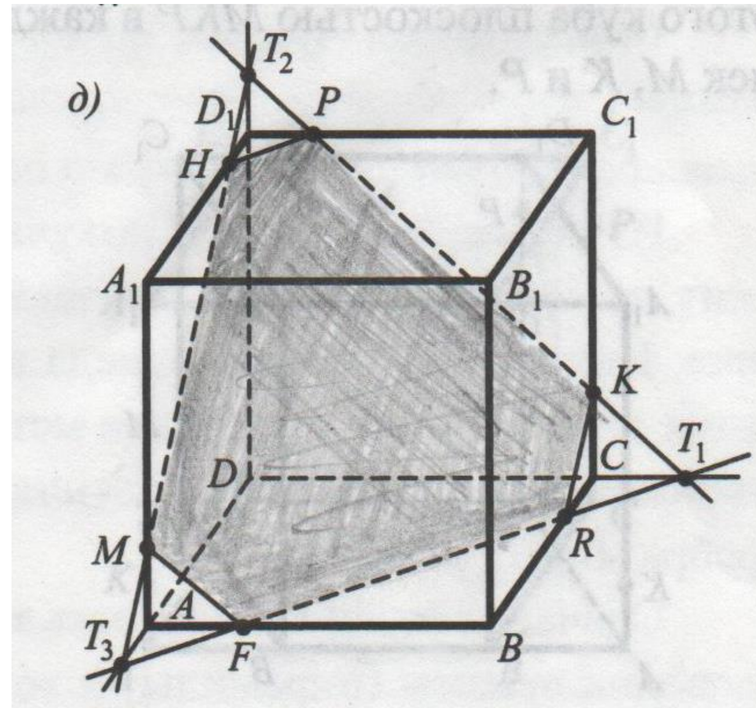






Задача 2. Дан куб и точки *M, P* и *K* на ребрах куба. Построить сечение данного куба плоскостью *MPK*.





СПЕЦИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ СЕЧЕНИЙ. МЕТОД СЛЕДОВ И ВНУТРЕННЕГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Определение: Прямая, по которой секущая плоскость пересекает плоскость основания многогранника, называется следом секущей плоскости в плоскости этого основания.

Теорема Дезарга

Если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ расположены на плоскости так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то точки пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 принадлежат одной прямой.

Обратите внимание, что если на рисунок 3.26 посмотреть как на планиметрический рисунок (рис. 3.27), то он будет иллюстрацией теоремы Дезарга. Более подробно об интерпретациях такого рода будет рассказано в § 8.

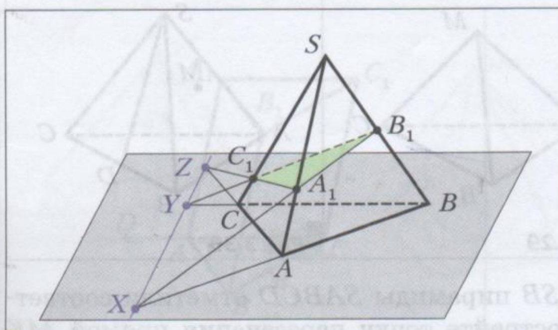


Рис. 3.26

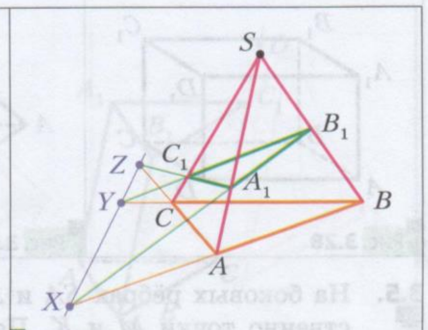
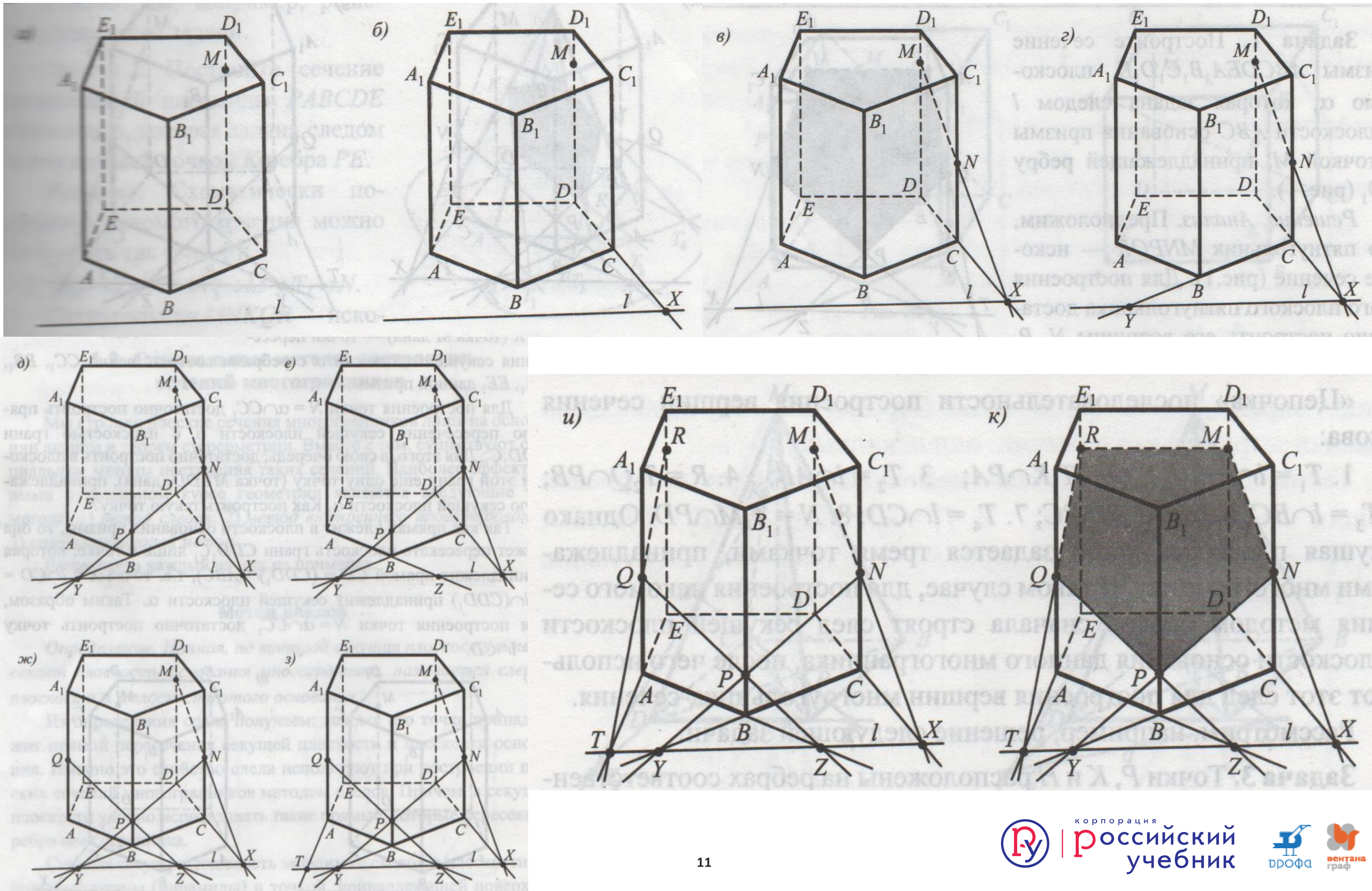


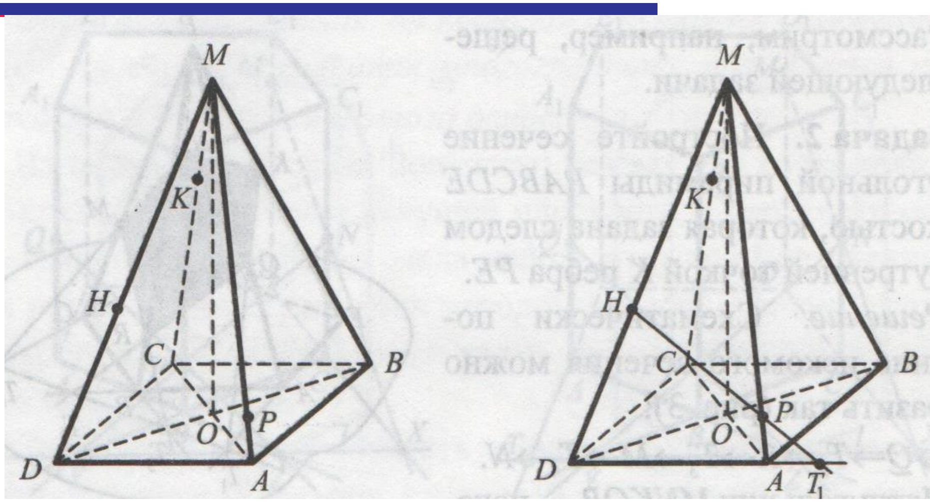
Рис. 3.27

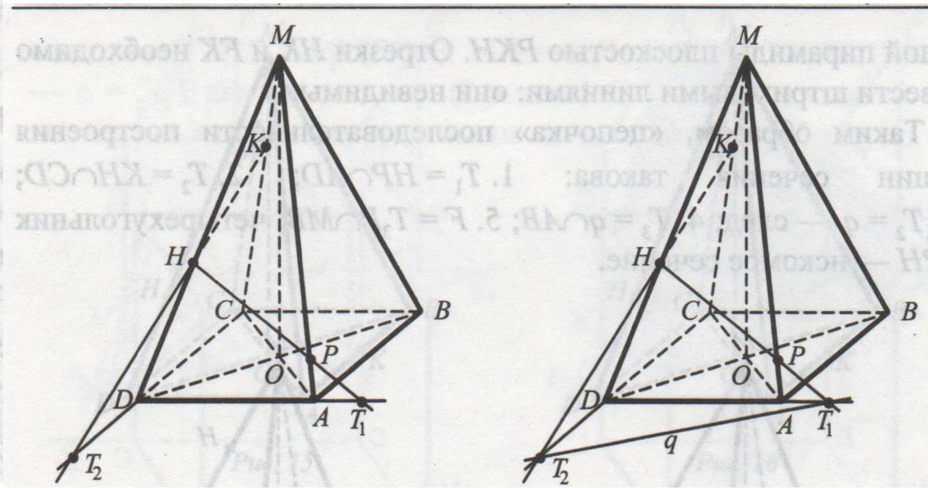
Рассмотрим еще один метод построения сечений, который называется методом внутреннего проектирования. Его особенность заключается в том, что с его помощью можно строить сечения, «находясь внутри» многогранника.

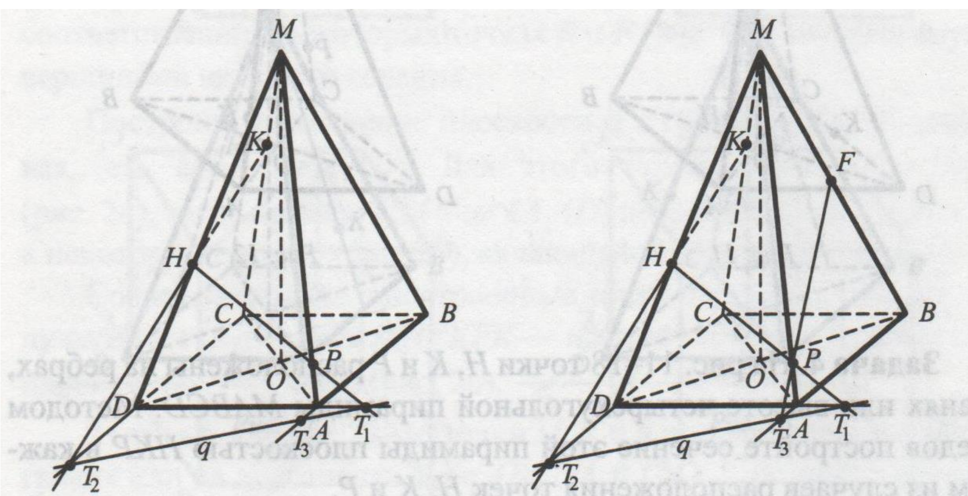
Задача 3. Постройте сечение призмы плоскостью, которая задана следом в плоскости основания призмы и точкой *M*, принадлежащей боковому ребру.

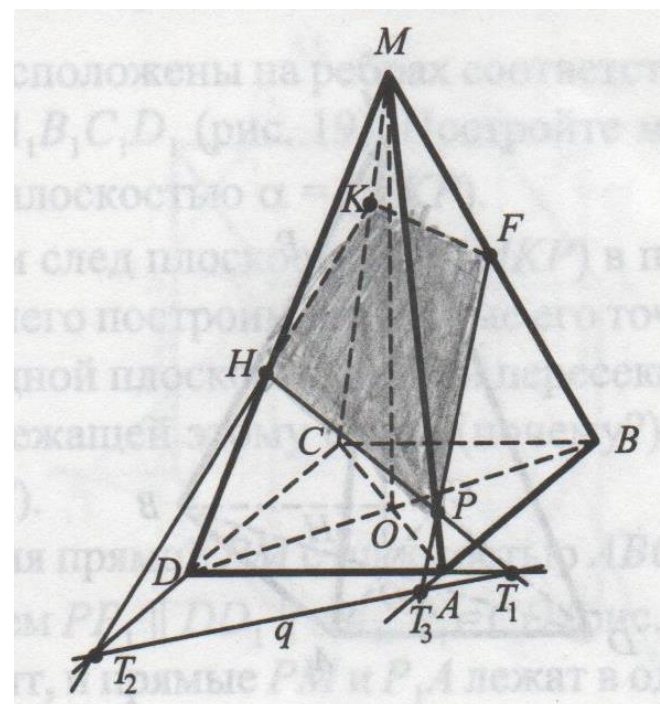


Задача 4. Точки *P, K* и *H* расположены на ребрах соответственно *MA, MC* и *MD* пирамиды. Постройте сечение этой пирамиды плоскостью *HKP*.

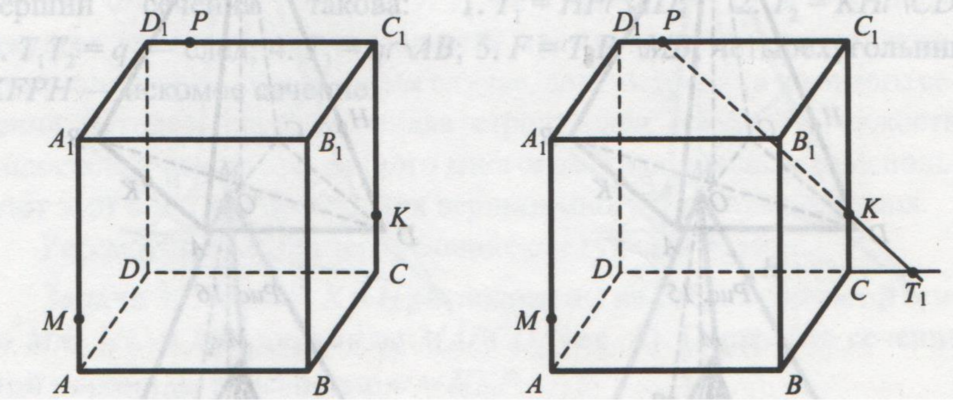


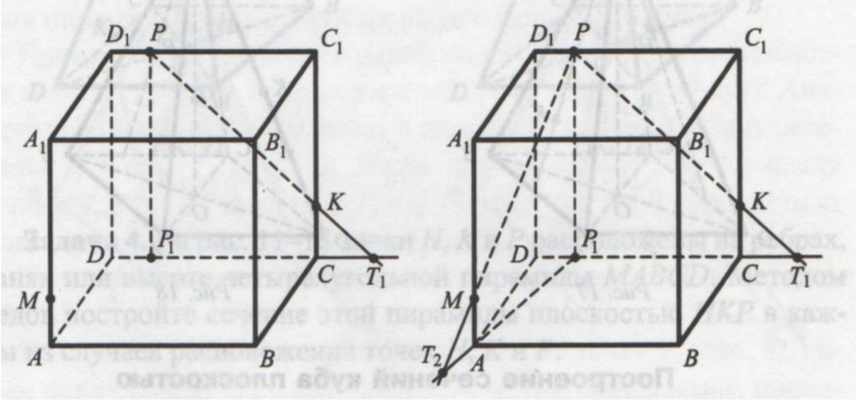


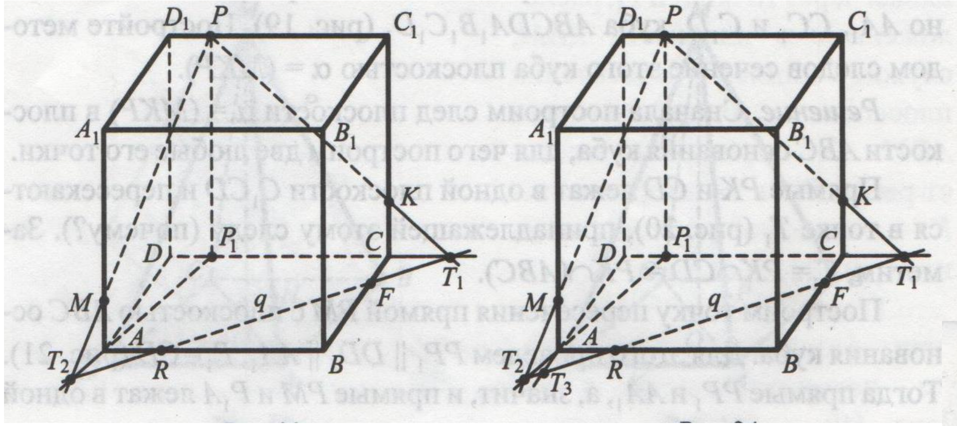


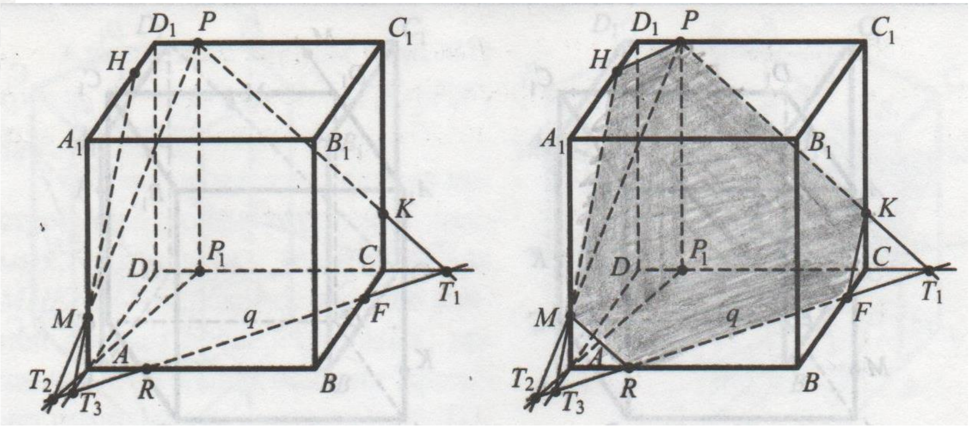


Задача 5. Точки *M, K* и *P* расположены на ребрах куба. Постройте методом следов сечение этого куба плоскостью *MKP*.

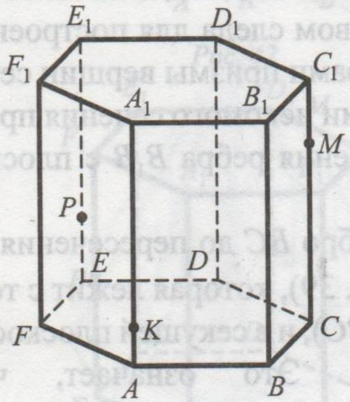


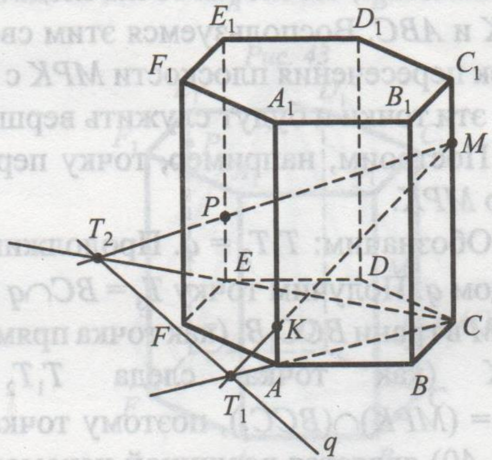


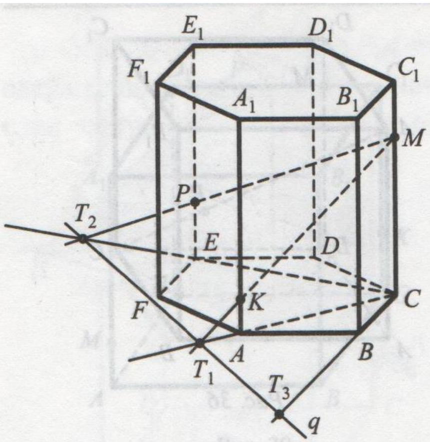


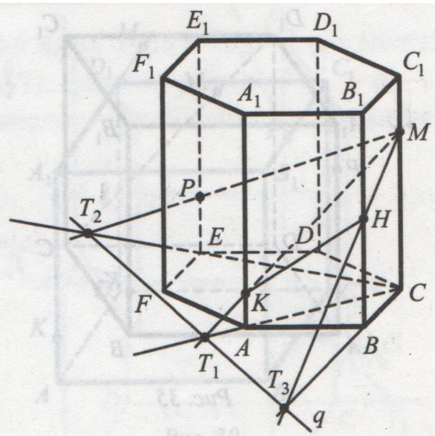


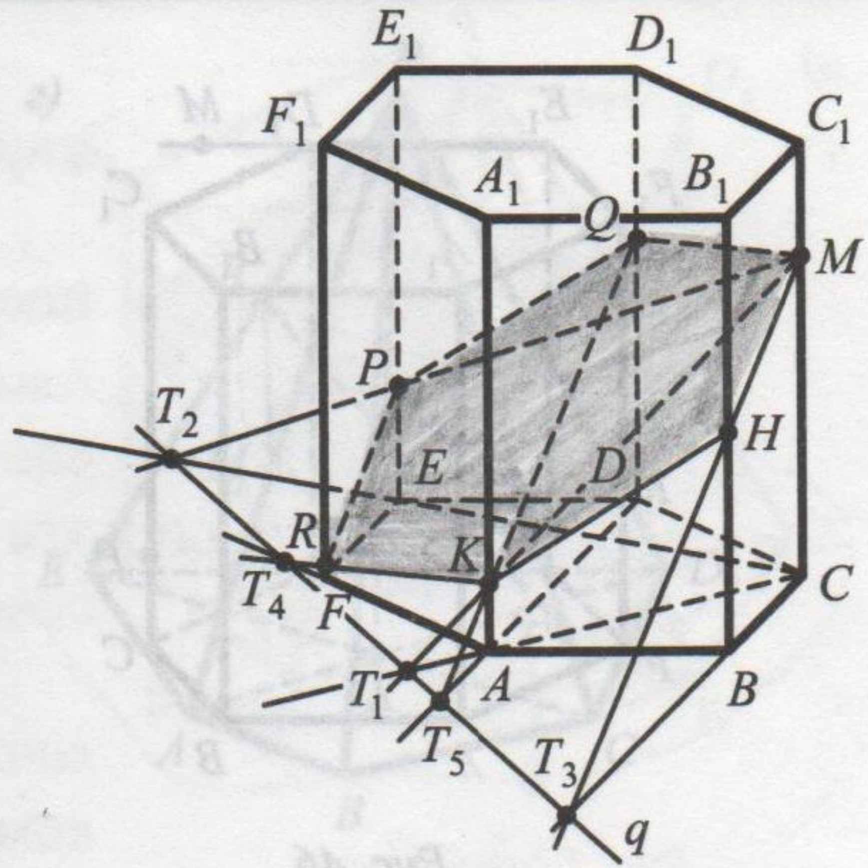
Задача 6. Задана шестиугольная призма. *M, P* и *K* данные точки. Построить методом следов сечение данной призмы плоскостью *MPK*.



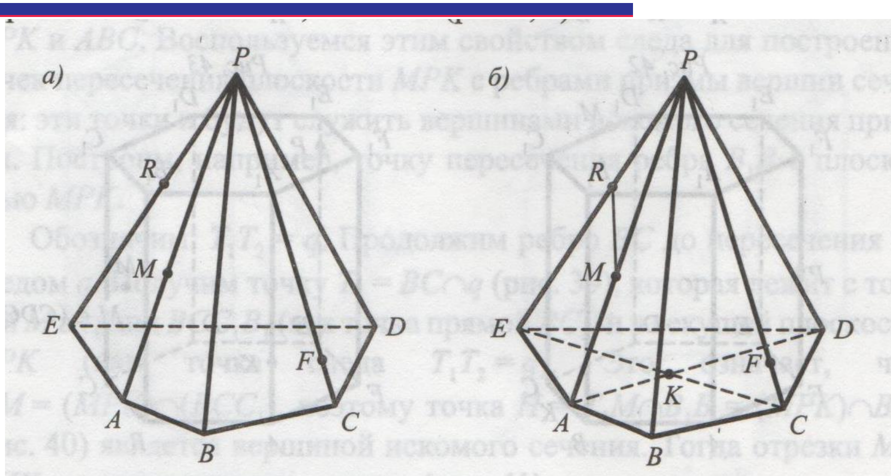


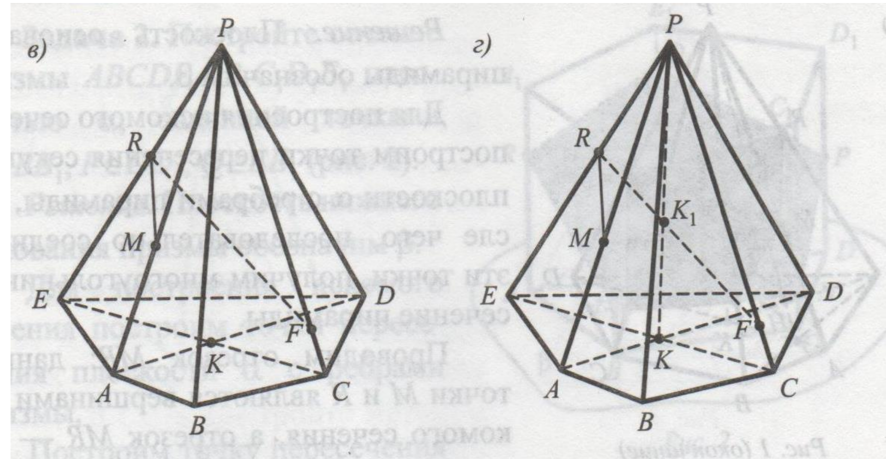


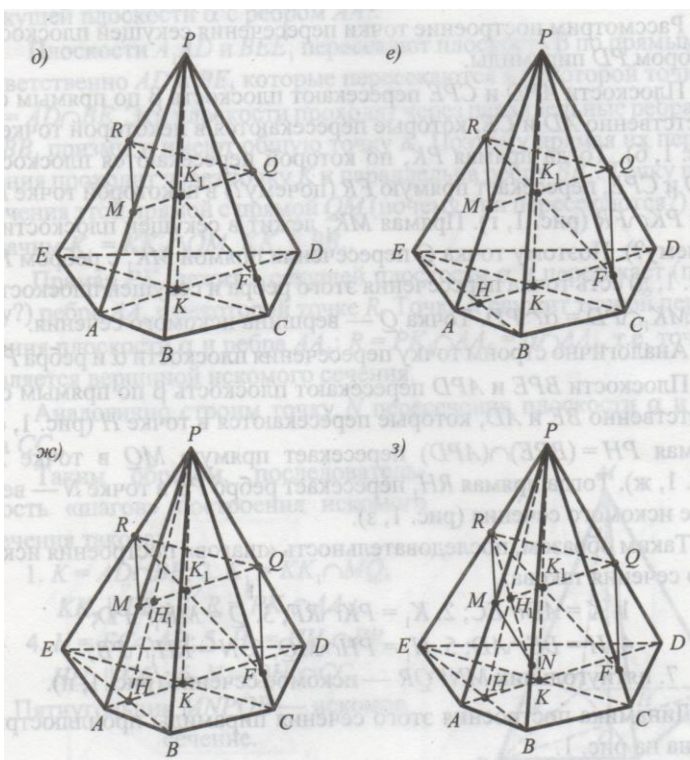


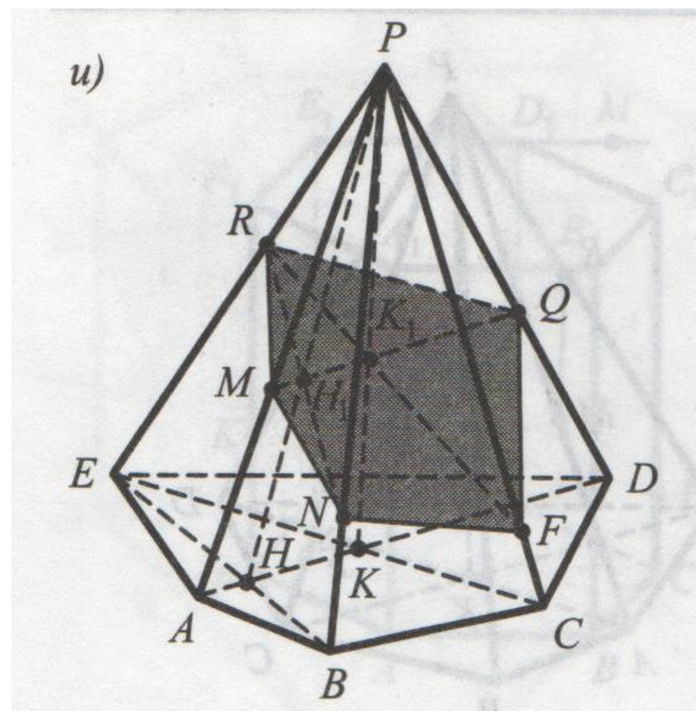


Задача 7. Постройте сечение пирамиды *PABCDE* плоскостью *MFR*, если точки *M, F* и *R* являются внутренними точками ребер соответственно *PA, PC, PE*.





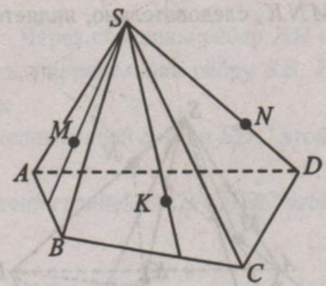




Задача 8. *SABCD* пирамида, точка *M* лежит в грани *ASB*, точка *K* в грани *SBC*, точка *N* на ребре *SD*. Постройте линию пересечения плоскости *MNK* с плоскостью *ABC*.

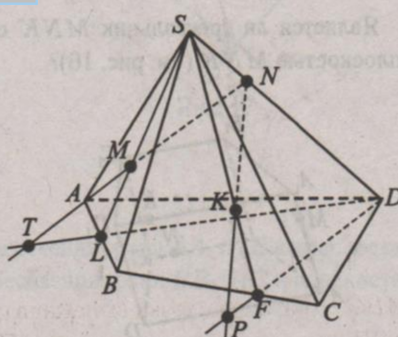
Решение.

Шаг 1. С помощью центрального проектирования с центром в точке ______ найдём проекции точек M, N и K на плоскость ABC



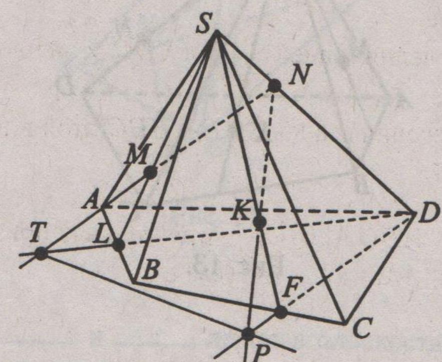
Проекция точки M — точка пересечения ______ и ______, обозначим её буквой L, проекция точки K лежит на ребре ______, обозначим её буквой F, ______ — проекция точки N.

Шаг 2. Построим точки пересечения прямых MN и NK с плоскостью ABC

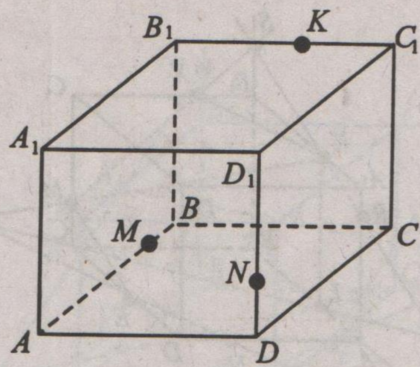


Для этого построим сначала точку T пересечения прямой MN и её проекции ______, затем — точку P — точку пересечения прямой NK и её проекции ______.

Шаг 3. Проведём прямую ______, эта прямая лежит и в плоскости ABC и в плоскости MNK, следовательно, является их линией пересечения

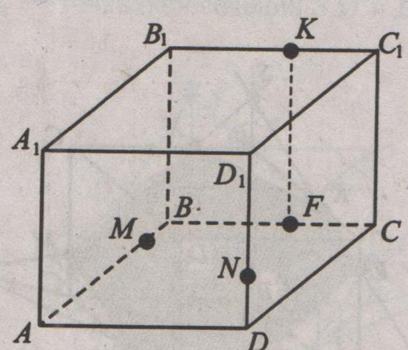


Задача 9. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью *MNK*

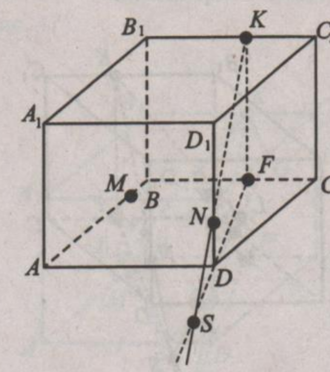


Решение.

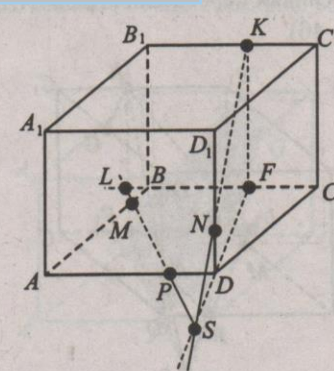
Шаг 1. _____ — проекции точек K и N на плоскость $ABCD$



Шаг 2. S — точка пересечения прямых KN и FD — лежит в плоскости грани _________ и в плоскости _________

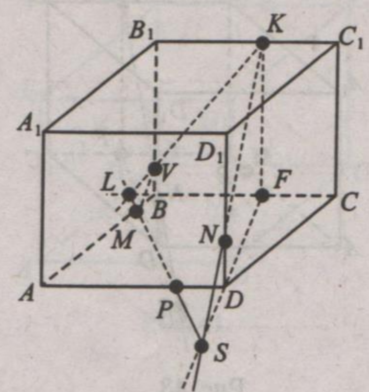


Шаг 3. Прямая SM лежит в плоскости _____ и пересекает AD в точке P, BC — в точке L

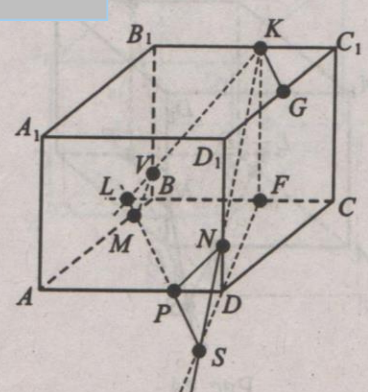


Задача 9. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью MNK (продолжение).

Шаг 4. Точки ______ и ______ лежат в плоскости грани BB_1C_1C и плоскости сечения, значит, ______ — линия их пересечения. Прямая ______ пересекает ребро BB_1 в точке V.

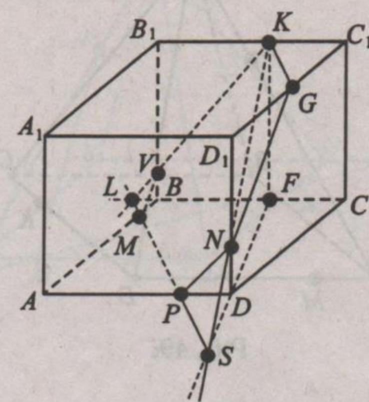


Шаг 5. ______ — линия пересечения грани AA_1B_1B и плоскости сечения MNK, ______ — линия пересечения грани AA_1D_1D и плоскости сечения MNK

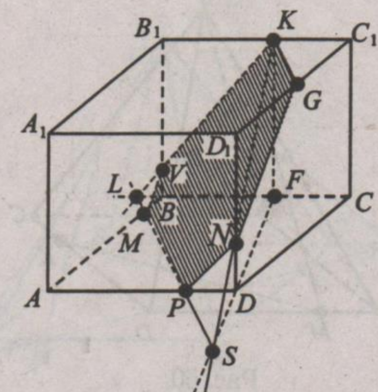


Шаг 6. В грани $A_1B_1C_1D_1$ проведём через точку K отрезок KG ______ отрезку MP

Шаг 7. Отрезок ______ — линия пересечения грани DD_1C_1C и плоскости сечения



Итак, ______ искомое сечение



Теперь рассмотрим случай, когда прямая l пересекает плоскость многоугольника.

Из свойств параллельного проектирования следует, что параллельной проекцией треугольника является треугольник (рис. 8.1).

При параллельном проектировании величины углов и отношения отрезков, вообще говоря, не сохраняются. Поэтому, например, изображением равнобедренного и равностороннего треугольников может быть разносторонний треугольник, а изображением прямоугольного треугольника — как тупоугольный треугольник, так и остроугольный.

Покажем, что для произвольного треугольника найдётся равносторонний треугольник, параллельной проекцией которого является данный треугольник.

Рассмотрим произвольный треугольник ABD в плоскости α. Выберем любую из трёх сторон треугольника, например AB. Построим равносторонний треугольник ABC так, чтобы точка C не принадлежала плоскости α (рис. 8.2). В качестве направления параллельного проектирования выберем прямую CD. Тогда треугольник ABD является параллельной проекцией треугольника ABC на плоскость α в направлении прямой CD.

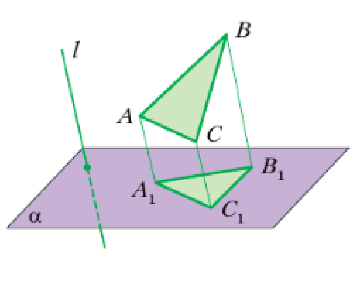


Рис. 8.1

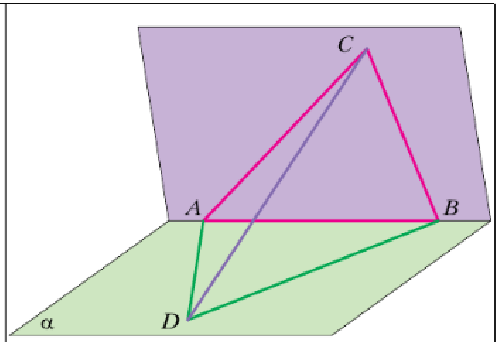


Рис. 8.2

Если в качестве плоскости проектирования выбрать плоскость ABC, то мы также установим и такой факт: равносторонний треугольник может служить параллельной проекцией треугольника любого вида.

Отметим, что в силу теоремы 7.3 медианы данного треугольника изображаются медианами треугольника, являющегося изображением данного. Однако аналогичное свойство для биссектрис и высот треугольника в общем случае не выполняется.

Поскольку при параллельном проектировании сохраняется параллельность отрезков, то изображением параллелограмма (в частности, прямоугольника, ромба, квадрата) является параллелограмм (рис. 8.3).

Также из свойств параллельного проектирования следует, что изображением трапеции является трапеция. Однако вид трапеции (равнобокая, прямоугольная) может не сохраняться.

Параллельной проекцией окружности является фигура, которую называют **эллипсом** (рис. 8.4). Изображение центра окружности называют **центром эллипса**.

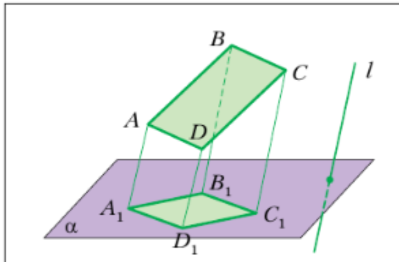


Рис. 8.3

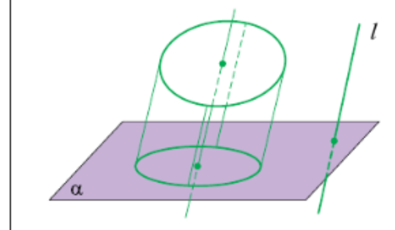


Рис. 8.4

Задача 1. Трапеция $A_1B_1C_1D_1$ является изображением равнобокой трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Постройте изображение высоты трапеции $ABCD$, проведённой из вершины B.

Решение. На рисунке 8.5 изображены равнобокая трапеция $ABCD$ и её параллельная проекция — трапеция $A_1B_1C_1D_1$.

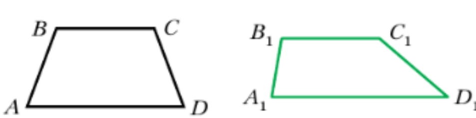


Рис. 8.5

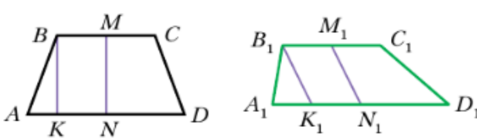


Рис. 8.6

8.11. Треугольник $A_1B_1C_1$ — изображение равнобедренного треугольника ABC с основанием AC. Постройте изображение центра окружности, описанной около треугольника ABC, если высота AM этого треугольника делит сторону BC на отрезки BM и MC так, что $BM = 5MC$.

8.12. Треугольник $A_1B_1C_1$ — изображение треугольника ABC (рис. 8.30), отрезки A_1D_1 и C_1E_1 — изображения соответственно высот AD и CE треугольника ABC. Постройте изображение центра окружности, описанной около треугольника ABC.

8.13. Треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 8.31) — изображение треугольника ABC, точка O_1 — изображение центра окружности, описанной около треугольника ABC. Постройте изображения высот треугольника ABC.

8.14. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ — изображение ромба $ABCD$. Постройте изображение перпендикуляра, опущенного из точки пересечения диагоналей ромба на сторону AD, если $\angle A = 60^\circ$.

8.15. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ — изображение ромба $ABCD$, в котором $\angle A = 60^\circ$. Постройте изображение высоты ромба, проведённой из вершины A к стороне BC ромба.

8.16. Треугольник $A_1B_1C_1$ — изображение прямоугольного равнобедренного треугольника ABC с гипотенузой AB. Постройте изображение квадрата $DEFM$, если $D \in AB$, $M \in AB$, $E \in AC$, $F \in BC$.

8.17. Треугольник $A_1B_1C_1$ — изображение прямоугольного равнобедренного треугольника ABC с гипотенузой AB. Постройте изображение квадрата со стороной AB, лежащего в плоскости ABC и расположенного вне треугольника ABC.

8.18. Эллипс с центром O_1 является изображением окружности с центром O (рис. 8.32), отрезок A_1B_1 — изображение диаметра AB данной окружности. Постройте изображение диаметра, перпендикулярного диаметру AB.

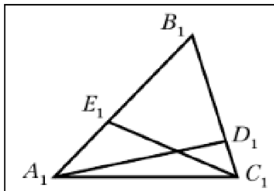


Рис. 8.30

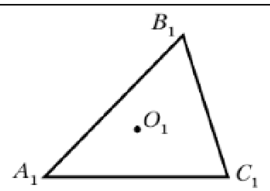


Рис. 8.31

Рис. 8.32

8.19. Эллипс с центром O_1 и треугольник $A_1B_1C_1$ являются изображениями окружности с центром O и вписанного в неё треугольника ABC (рис. 8.33). Постройте изображение высоты треугольника ABC, проведённой из вершины A.

8.27. Эллипс с центром O_1 является изображением окружности с центром O. Постройте изображение квадрата:
1) вписанного в данную окружность;
2) описанного около данной окружности.

8.28. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 8.39) является изображением квадрата $ABCD$, точка M_1 — изображением точки M, принадлежащей стороне AB. Постройте изображение точки N, принадлежащей стороне BC, такой, что $AN \perp DM$.

8.29. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 8.40) является изображением квадрата $ABCD$, точка K_1 — изображением точки K, принадлежащей стороне CD. Постройте изображение точки F, принадлежащей стороне AD, такой, что $BF = AK$.

8.30. Четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 8.41) является изображением равнобокой трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), в которую можно вписать окружность. Постройте изображение точек касания сторон трапеции со вписанной окружностью.

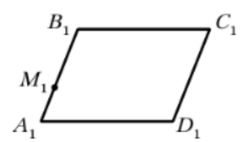


Рис. 8.39

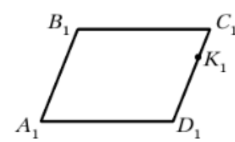


Рис. 8.40

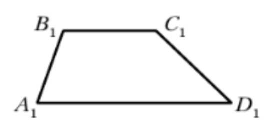


Рис. 8.41

8.31. Четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 8.42) является изображением прямоугольной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $AB \perp AD$), точка O_1 — изображение центра окружности, вписанной в эту трапецию. Постройте изображение точек касания сторон трапеции с вписанной окружностью.

8.32. Постройте изображение призмы $ABCA_1B_1C_1$, если на рисунке 8.43 точки M, N, K, F являются изображениями середин отрезков BB_1, CC_1, AB и A_1C_1 соответственно.

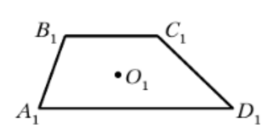


Рис. 8.42

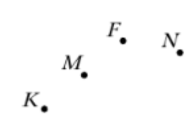


Рис. 8.43

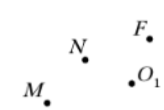


Рис. 8.44

§ 12 Теорема о трёх перпендикулярах

Теоретический материал

10 класс

Задача 2. Через вершину O угла AOB проведена прямая OD так, что $\angle DOA = \angle DOB = \alpha$, где $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ (рис. 12.3). Докажите, что проекция прямой OD на плоскость AOB содержит биссектрису угла AOB.

Решение. Если $OD \subset AOB$, то утверждение задачи очевидно.

Пусть прямая OD не принадлежит плоскости AOB. Проведём перпендикуляр DK к плоскости AOB (рис. 12.4). Тогда прямая OK является проекцией прямой OD на плоскость AOB. Опустим перпендикуляры DN и DM соответственно на стороны OA и OB угла AOB. Соединим точку K с точками N и M.

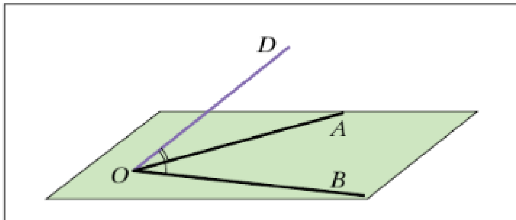


Рис. 12.3

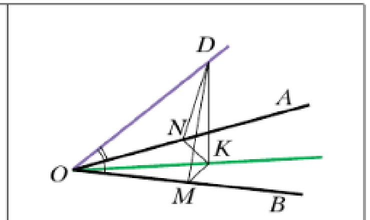


Рис. 12.4

Отрезок KM является проекцией наклонной DM на плоскость AOB. По построению $DM \perp OB$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах получаем, что $KM \perp OB$. Аналогично доказывается, что $KN \perp OA$.

Прямоугольные треугольники DON и DOM равны по гипотенузе и острому углу. Отсюда $DN = DM$. Тогда прямоугольные треугольники DNK и DMK равны по гипотенузе и катету. Отсюда $KN = KM$. Получаем, что прямоугольные треугольники ONK и OMK тоже равны по гипотенузе и катету. Отсюда $\angle NOK = \angle MOK$. ■

Задача 3. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямая A_1C перпендикулярна плоскости DC_1B, и эта плоскость делит отрезок A_1C в отношении $1 : 2$, считая от точки C (рис. 12.5).

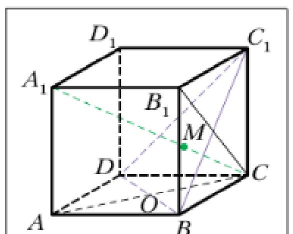


Рис. 12.5

Решение. Поскольку $A_1B_1 \perp BB_1C_1$, то отрезок B_1C является проекцией наклонной A_1C на плоскость BB_1C_1. Имеем: $B_1C \perp BC_1$ как диагонали квадрата. Следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах $A_1C \perp BC_1$.

Аналогично доказывается, что $A_1C \perp BD$. Следовательно, $A_1C \perp DC_1B$.

Рассмотрим прямоугольник AA_1C_1C (рис. 12.6). Пусть отрезки A_1C и C_1O пересекаются в точке M (O — точка пересечения диагоналей AC и BD). Поскольку $C_1O \subset DC_1B$, то M — точка пересечения отрезка A_1C с плоскостью DC_1B. Треугольники CMO и A_1MC_1 подобны. Тогда $\frac{CM}{MA_1} = \frac{CO}{A_1C_1} = \frac{1}{2}$. Следовательно, точка M делит отрезок A_1C в отношении $1 : 2$, считая от точки C. ■

В § 11 мы научились находить расстояние между скрещивающимися прямыми, содержащими диагонали соседних граней куба. Рассмотрим ещё один приём решения этой задачи.

Задача 4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a (рис. 12.7). Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

Решение. Рассмотрим плоскости AB_1D_1 и DC_1B, содержащие рассматриваемые скрещивающиеся прямые AB_1 и BC_1.

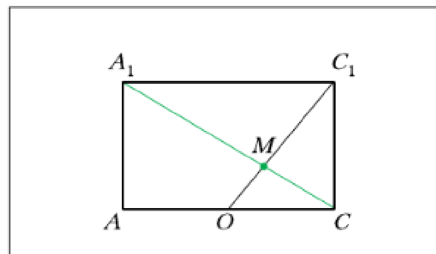


Рис. 12.6

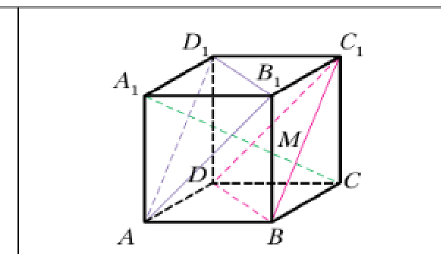


Рис. 12.7

В силу ключевой задачи 3 получаем, что $A_1C \perp DC_1B$. Аналогично можно доказать, что $A_1C \perp AD_1B_1$. С учётом теоремы 10.5 приходим к выводу, что $AB_1D_1 \parallel DC_1B$. Следовательно, расстояние между скрещивающимися прямыми AB_1 и BC_1 равно расстоянию между плоскостями AB_1D_1 и DC_1B.

Ещё раз обращаясь к ключевой задаче 3, мы можем утверждать, что плоскости AB_1D_1 и DC_1B делят отрезок A_1C на три равные части. Значит, искомое расстояние равно $\frac{1}{3}A_1C$.

Задача 5. Основанием треугольной пирамиды $DABC$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($AB = BC$). Известно, что треугольник ADC равносторонний и $DB \perp BC$. Найдите угол между плоскостями ACD и ABD.

Решение. Поскольку $CB \perp AB$ и $CB \perp DB$, то $CB \perp ABD$ (рис. 14.14). Тогда прямая AB является проекцией прямой AC на плоскость ABD. Следовательно, величина угла CAB — угол между прямой AC и плоскостью ABD. С учётом условия задачи можно записать: $\angle CAB = 45^\circ$, $\angle DAC = 60^\circ$.

Пусть величина искомого угла равна α. Поскольку $0^\circ < \alpha \leqslant 90^\circ$, то, найдя $\sin\alpha$, мы сможем найти сам угол α.

Для плоскостей ACD, ABD и прямой AC применим ключевую задачу 4. Имеем: $\sin 45^\circ = \sin\alpha \sin 60^\circ$. Отсюда $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$. ■

Задача 6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и A_1B_1C.

Решение. Поскольку $AD \perp DD_1C$, то $CD_1 \perp AD$ (рис. 14.15). Также $CD_1 \perp DC_1$ как диагонали квадрата. Следовательно, $CD_1 \perp AB_1C_1$. Аналогично можно доказать, что $AD_1 \perp A_1B_1C$. Тогда в силу ключевой задачи 3 получаем, что искомый угол равен величине угла AD_1C. Поскольку треугольник AD_1C равносторонний, то $\angle AD_1C = 60^\circ$.

Ответ: 60°. ■

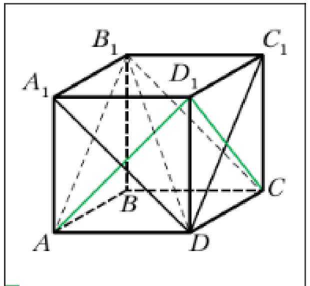


Рис. 14.15

c перпендикулярна прямым n и m_1, то прямая c перпендикулярна плоскости γ. Это означает, что угол между плоскостями α и β равен углу между прямыми a и b.

Воспользовавшись известным фактом планиметрии, приходим к выводу, что угол между прямыми a и b равен углу между прямыми n и m_1. Значит, угол между плоскостями α и β равен углу между прямыми n и m. ■

Задача 4. В одной из двух пересекающихся плоскостей, угол между которыми равен α, проведена прямая, образующая с прямой пересечения плоскостей угол β, а с другой плоскостью угол γ. Докажите, что $\sin\gamma = \sin\alpha \sin\beta$.

Решение. Если $\alpha = 90^\circ$, то доказываемое равенство становится очевидным. Убедитесь в этом самостоятельно.

Пусть прямая AD, принадлежащая плоскости τ, образует с прямой пересечения плоскостей τ и σ угол β (рис. 14.13). Опустим из точки A перпендикуляр AB на прямую пересечения данных плоскостей и перпендикуляр AC на плоскость σ.

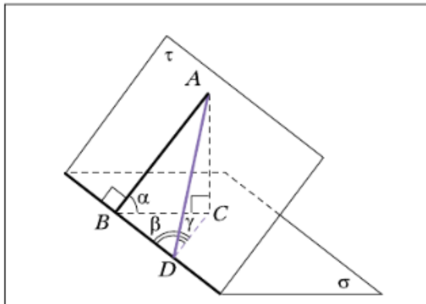


Рис. 14.13

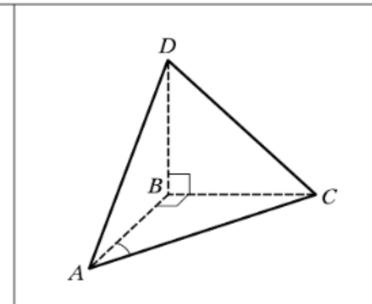


Рис. 14.14

Отрезок BC является проекцией наклонной AB на плоскость σ. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах получаем, что $BC \perp BD$. Следовательно, величина угла ABC является углом между плоскостями τ и σ. По условию $\angle ABC = \alpha$.

Отрезок DC является проекцией наклонной AD на плоскость σ. Следовательно, величина угла ADC является углом между прямой AD и плоскостью σ. По условию $\angle ADC = \gamma$.

Если точка D совпадает с точкой B, то $\beta = 90^\circ$ и $\alpha = \gamma$. Тогда доказываемое равенство является очевидным.

Рассмотрим случай, когда $0^\circ < \beta < 90^\circ$. Из ΔADC имеем: $\sin\gamma = \frac{AC}{AD}$. Из ΔABC имеем: $\sin\alpha = \frac{AC}{AB}$. Из ΔADB имеем: $\sin\beta = \frac{AB}{AD}$. Отсюда $\sin\gamma = \sin\alpha\sin\beta$. ■

 Теоретический материал

11 класс

Так, правильную призму и прямую треугольную призму можно описать около цилиндра.

В предыдущем параграфе мы определили площадь боковой поверхности цилиндра как площадь развёртки его боковой поверхности. Существуют и другие подходы к введению этого понятия.

Материал данного параграфа позволяет ввести понятие площади боковой поверхности цилиндра, используя рассуждения, аналогичные тем, которые применялись при введении понятия длины окружности.

Вы знаете, что длиной окружности называют предел последовательности периметров правильных многоугольников, вписанных в данную окружность, при неограниченном увеличении количества их сторон, т. е. $C = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$, где C — длина окружности, P_n — периметр правильного n-угольника.

На рисунке 8.4 изображены правильные призмы, вписанные в данный цилиндр. При неограниченном увеличении количества сторон оснований призм площади их боковых поверхностей будут как угодно мало отличаться от площади боковой поверхности цилиндра.

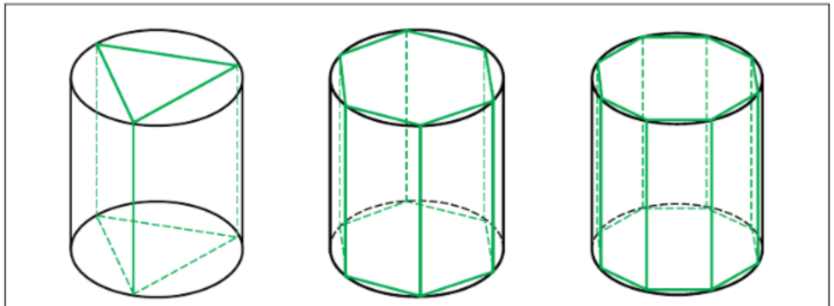


Рис. 8.4

Приведённые соображения показывают, что площадь $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности цилиндра можно определить как предел последовательности S_n площадей боковых поверхностей правильных n-угольных призм, вписанных в данный цилиндр, т. е. $S_{\text{бок}} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Если образующая цилиндра равна h, а радиус основания цилиндра — r, то можно записать: $S_{\text{бок}} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} P_n h = h \lim\limits_{n\to\infty} P_n = h \cdot 2\pi r = 2\pi rh$.

Задача 1. В цилиндр, радиус основания которого равен 13 см, а высота 17 см, вписана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Основание призмы, четырёхугольник $ABCD$, является трапецией, в которой $BC \parallel AD$ и $BC = 10$ см, $AD = 24$ см. Найдите площадь четырёхугольника AB_1C_1D.

Решение. Четырёхугольник, площадь которого требуется найти, изображён на рисунке 8.5. Пусть точки O и O_1 — центры оснований цилиндра. Проведём через точку O высоту MN трапеции $ABCD$ (рис. 8.6). Поскольку трапеция вписана в окружность, то она является равнобокой. Поэтому прямая MN — ось симметрии трапеции, а точки M и N — середины оснований трапеции.

Проведём радиусы OA и OB основания цилиндра (см. рис. 8.6).

Из прямоугольных треугольников AOM и BON найдём отрезки OM и ON.

Имеем: $OM = \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$ (см);

$ON = \sqrt{BO^2 - BN^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$ (см). Тогда $MN = 17$ см.

Пусть точка N_1 — середина ребра B_1C_1 (рис. 8.7). Тогда $NN_1 \parallel BB_1$. Поскольку призма прямая, то отрезок NN_1 является высотой призмы, а значит, и высотой цилиндра. По условию $NN_1 = 17$ см. Получили, что в прямоугольном треугольнике MNN_1 равны катеты. Следовательно, $\angle NMN_1 = 45^\circ$.

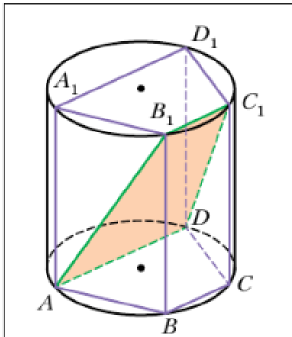


Рис. 8.5

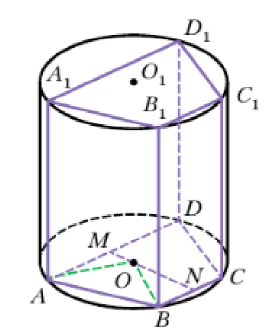


Рис. 8.6

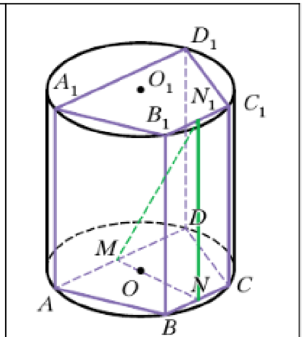


Рис. 8.7

Поскольку $NM \perp AD$ и прямая NM — проекция прямой MN_1 на плоскость основания призмы, то $MN_1 \perp AD$. Следовательно, угол NMN_1 — угол между плоскостями ABC и AB_1C_1.

Воспользовавшись теоремой о площади ортогональной проекции многоугольника, можно записать: $S_{AB_1C_1D} = \dfrac{S_{ABCD}}{\cos 45^\circ}$.

Имеем: $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot MN = 289$ (см²). Тогда $S_{AB_1C_1D} = 289\sqrt{2}$ см².

Пирамиду можно вписать в конус, если около основания этой пирамиды можно описать окружность, а вершина этой пирамиды проектируется в центр описанной окружности основания.

Определение

Пирамиду называют описанной около конуса, если её основание описано около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса (рис. 11.2). **При этом конус называют вписанным в пирамиду.**

Плоскости, содержащие боковые грани пирамиды, описанной около конуса, являются касательными плоскостями к конусу. Покажем это. Рассмотрим грань AKB пирамиды, описанной около конуса (рис. 11.3). Пусть ребро AB касается окружности основания конуса в точке M. Отрезок KM — образующая конуса.

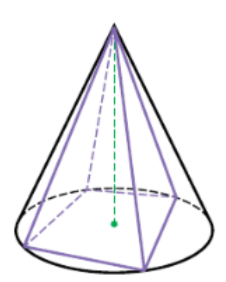


Рис. 11.1

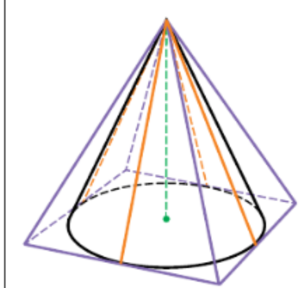


Рис. 11.2

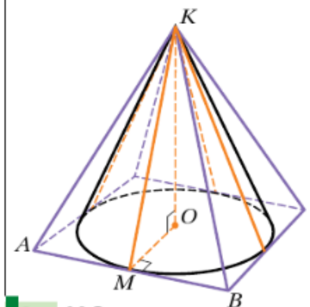


Рис. 11.3

Пусть точка O — центр основания конуса. Имеем: $AB \perp OM$ и $AB \perp KO$. Следовательно, $AB \perp OKM$. Тогда по признаку перпендикулярности плоскостей плоскость AKB перпендикулярна плоскости осевого сечения, проходящей через образующую KM. Отсюда следует, что плоскость AKB является касательной к конусу.

Боковая грань пирамиды, описанной около конуса, проходит через образующую конуса и других общих точек с конусом не имеет (на рисунке 11.2 эти образующие выделены оранжевым цветом). В этом случае говорят, что боковая грань пирамиды **касается** конуса.

Пирамиду можно описать около конуса, если в основание этой пирамиды можно вписать окружность, а вершина этой пирамиды проектируется в центр вписанной окружности основания.

Задача 2. В конус с вершиной K вписана треугольная пирамида $KABC$. Двугранные углы при рёбрах KA, KB и KC равны соответственно 60°, 90° и 120°. Найдите угол между плоскостью AKC и плоскостью, касающейся конуса по образующей KA (рис. 11.8).

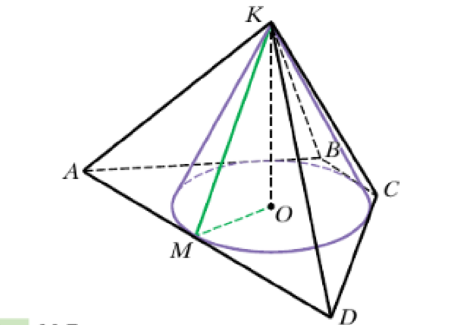


Рис. 11.7

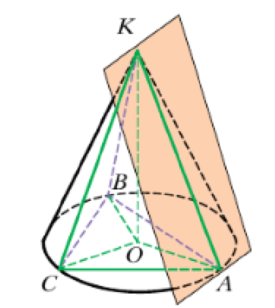


Рис. 11.8

Решение. Проведём высоту конуса KO. Рассмотрим пирамиду $KAOC$. Легко показать (сделайте это самостоятельно), что двугранные углы при рёбрах KA и KC равны. Пусть каждый из них равен α. Аналогично можно показать, что равны двугранные углы при рёбрах KA и KB пирамиды $KAOB$ (обозначим величины этих углов β) и двугранные углы при рёбрах KB и KC пирамиды $KBOC$ (обозначим величины этих углов γ). Тогда с учётом величин двугранных углов при рёбрах KA, KB и KC пирамиды $KABC$ можно записать такую систему:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 60^\circ, \\ \beta + \gamma = 90^\circ, \\ \gamma + \alpha = 120^\circ. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$ и $\gamma = 75^\circ$.

Поскольку касательная плоскость перпендикулярна плоскости KAO, то искомый угол равен $90^\circ - \alpha = 45^\circ$.

Ответ: 45°. ■

Определение

Многогранник называют вписанным в сферу, если все его вершины принадлежат сфере. При этом сферу называют описанной около многогранника.

Из определения следует, что если многогранник вписан в сферу, то центр сферы равноудалён от всех его вершин. Верно и обратное утверждение: *если для данного многогранника существует точка, равноудалённая от всех его вершин, то около этого многогранника можно описать сферу*.

Например, все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны, пересекаются в одной точке и этой точкой делятся пополам. Следовательно, точка пересечения диагоналей прямоугольного параллелепипеда равноудалена от всех его вершин. Значит, около этого многогранника можно описать сферу (рис. 14.1).

На рисунке 14.2 изображён тетраэдр $ABCD$, в котором $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$. Поскольку середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от его вершин, то середина ребра AB является точкой, равноудалённой от всех вершин тетраэдра $ABCD$, т. е. является центром сферы, описанной около данного тетраэдра.

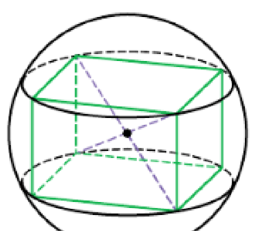


Рис. 14.1

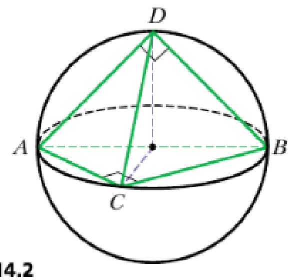


Рис. 14.2

Если многогранник вписан в сферу, то также говорят, что многогранник вписан в шар, ограниченный этой сферой. Например, можно сказать, что на рисунках 14.1 и 14.2 изображены соответственно прямоугольный параллелепипед и тетраэдр, вписанные в шар, или шар, описанный около каждого из указанных многогранников.

Если многогранник вписан в сферу, то плоскости его граней пересекают сферу по окружностям. Следовательно, *каждая грань многогран-*

Геометрическим местом точек, равноудалённых от концов отрезка, является плоскость, перпендикулярная отрезку и проходящая через его середину. Рассмотрим плоскость α, перпендикулярную боковому ребру SA и проходящую через его середину. Очевидно, что эта плоскость не параллельна прямой a и не содержит её. Пусть $a \cap \alpha = O$. Поскольку точка O равноудалена от всех вершин основания и $OS = OA$, то точка O равноудалена от всех вершин пирамиды, а значит, она является центром сферы, описанной около рассматриваемой пирамиды. ■

Из доказанного следует, что *около любого тетраэдра можно описать сферу*.

Также *сферу можно описать около правильной пирамиды. Центр описанной сферы принадлежит прямой, содержащей высоту правильной пирамиды*.

Задача 3. Докажите, что: 1) если около оснований усечённой пирамиды можно описать окружности и прямая, проходящая через центры этих окружностей, перпендикулярна основаниям, то такую усечённую пирамиду можно вписать в сферу; 2) центр сферы, описанной около усечённой пирамиды, принадлежит прямой, проходящей через центры окружностей, описанных около оснований усечённой пирамиды.

Докажите эти утверждения самостоятельно.

Центр окружности, описанной около многоугольника, может принадлежать многоугольнику, в частности лежать на стороне, а может и не принадлежать многоугольнику. Аналогичная ситуация возникает и в пространстве: центр сферы, описанной около многогранника, может ему принадлежать (рис 14.5), в частности лежать на грани (см. рис. 14.2), и может находиться вне многогранника (рис. 14.6).

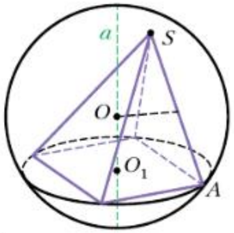


Рис. 14.5

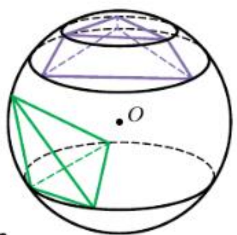


Рис. 14.6

Используя это утверждение, можно доказать (сделайте это самостоятельно), что в любом тетраэдре существует точка, равноудалённая от всех плоскостей, содержащих его грани. Следовательно, *в любой тетраэдр можно вписать сферу*.

Задача 1. Докажите, что если двугранные углы пирамиды при рёбрах её основания равны, то в такую пирамиду можно вписать сферу.

Решение. В курсе геометрии 10 класса было доказано, что если двугранные углы пирамиды при рёбрах её основания равны, то каждая точка высоты пирамиды равноудалена от плоскостей её боковых граней (рис. 15.2). Тогда точка пересечения биссектора двугранного угла при ребре основания с высотой пирамиды равноудалена от всех плоскостей, содержащих грани пирамиды. ■

Из доказанного следует, что *в любую правильную пирамиду можно вписать сферу. Центр вписанной сферы принадлежит высоте пирамиды*.

Заметим, что не во всякой пирамиде, в которую можно вписать сферу, равны двугранные углы при рёбрах основания. Действительно, примером такой пирамиды может служить тетраэдр, у которого не равны двугранные углы при рёбрах некоторой грани.

Задача 2. Докажите, что если в основание прямой призмы можно вписать окружность и высота призмы равна диаметру этой окружности, то в такую призму можно вписать сферу.

Решение. Пусть точки O_1 и O_2 — центры окружностей радиуса r, вписанных в основания прямой призмы (рис. 15.3). Прямая O_1O_2 параллельна плоскости каждой боковой грани призмы. Точка O_1 удалена от плоскости каждой боковой грани призмы на расстояние r. Следовательно, любая точка прямой O_1O_2 удалена от плоскостей боковых граней призмы на расстояние r. Поскольку $O_1O_2 = 2r$, то середина O отрезка O_1O_2 равноудалена от всех плоскостей граней призмы. ■

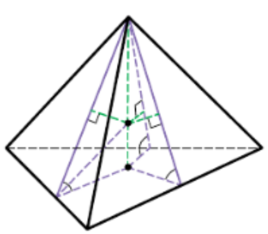


Рис. 15.2

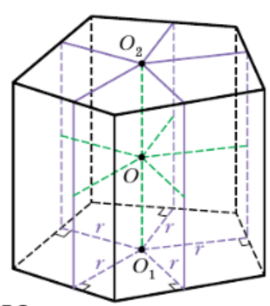


Рис. 15.3

Из доказанного следует, что *в правильную призму, высота которой равна диаметру окружности, вписанной в основание призмы, можно вписать сферу. Центр сферы является серединой отрезка, соединяющего центры оснований призмы*.

Справедливо и такое утверждение: *если в прямую призму можно вписать сферу, то в основание призмы можно вписать окружность радиусом, равным радиусу сферы, а высота призмы равна диаметру сферы*. Докажите это утверждение самостоятельно.

Заметим, что если в многогранник можно вписать сферу, то этот многогранник является выпуклым. Это следует из того очевидного факта, что сфера не может касаться граней двугранного угла, величина которого больше 180°. Однако если многогранник вписан в сферу, то это не означает, что он является выпуклым. Так, на рисунке 15.5 изображён невыпуклый многогранник, вписанный в сферу.

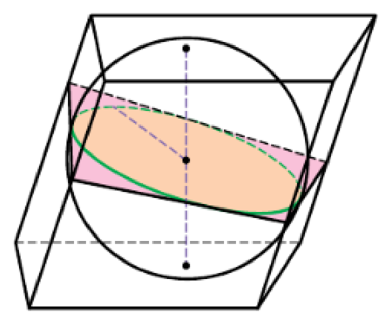


Рис. 15.4

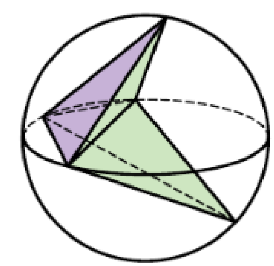


Рис. 15.5

§ 16 Тела вращения, вписанные в сферу

Теорема 16.1

Около любого цилиндра можно описать сферу, причём центр сферы — это середина отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра, а радиус сферы равен радиусу окружности, описанной около осевого сечения цилиндра.

Определение

Конус называют вписанным в сферу, если вершина конуса и окружность его основания принадлежат сфере (рис. 16.3). **При этом сферу называют описанной около конуса.**

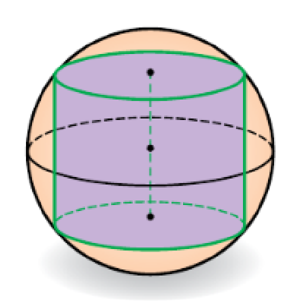


Рис. 16.1

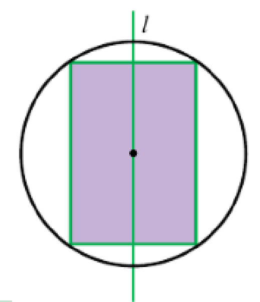


Рис. 16.2

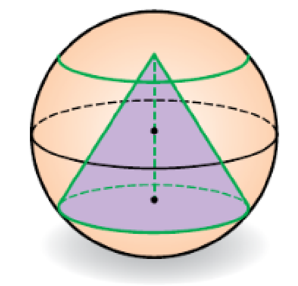


Рис. 16.3

Рассмотрим равнобедренный треугольник, около которого описана окружность. Прямая l, содержащая высоту треугольника, проведённую к основанию, является осью симметрии фигуры, изображённой на рисунке 16.4. Будем вращать треугольник вместе с описанной окружностью вокруг прямой l. В результате получим сферу, описанную около конуса.

Приведённые соображения являются иллюстрацией к следующей теореме.

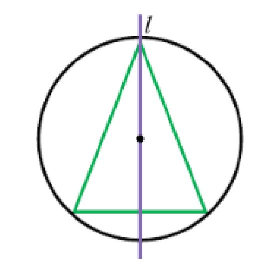


Рис. 16.4

Теорема 16.2

Около любого конуса можно описать сферу, причём центр описанной сферы принадлежит оси конуса, а радиус сферы равен радиусу окружности, описанной около осевого сечения конуса.

§ 17 Тела вращения, описанные около сферы

Теорема 17.1

Если осевым сечением цилиндра является квадрат, то в такой цилиндр можно вписать сферу, причём центр вписанной сферы — это середина отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра, а радиус сферы равен радиусу основания цилиндра.

Определение

Конус называют описанным около сферы, если все образующие конуса и его основание касаются сферы (рис. 17.3). **При этом сферу называют вписанной в конус.**

Рассмотрим равнобедренный треугольник, в который вписана окружность. Прямая l, содержащая высоту треугольника, проведённую к основанию, является осью симметрии фигуры, изображённой на рисунке 17.4. Будем вращать равнобедренный треугольник вместе с вписанной в него окружностью вокруг прямой l. В результате получим сферу, вписанную в конус.

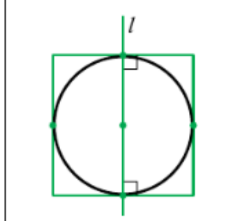


Рис. 17.2

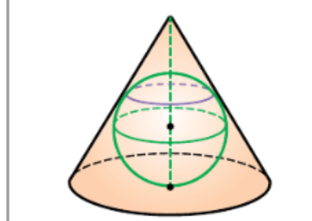


Рис. 17.3

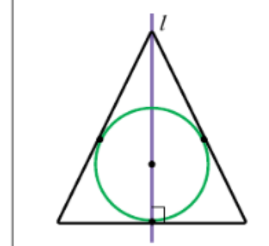


Рис. 17.4

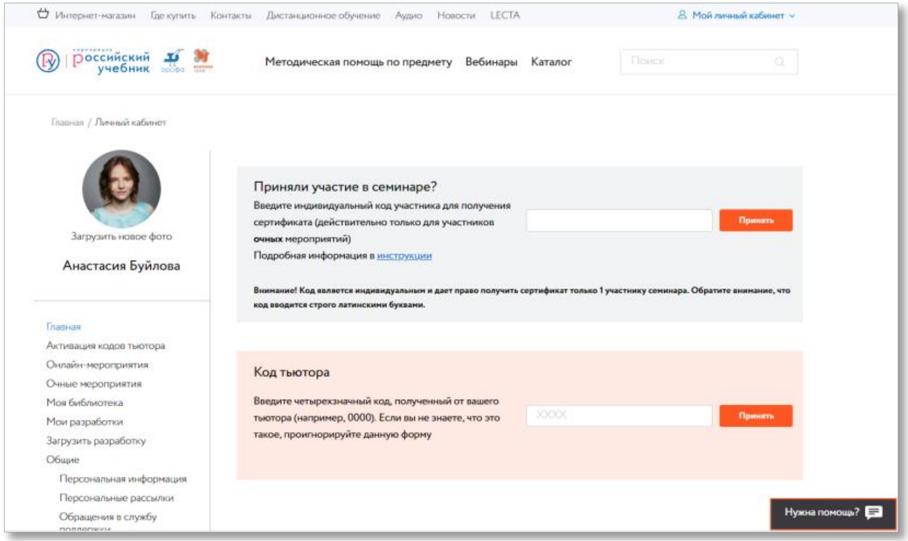
Приведённые соображения являются иллюстрацией к следующей теореме.

Теорема 17.2

В любой конус можно вписать сферу, причём центр вписанной сферы принадлежит высоте конуса, а радиус сферы равен радиусу окружности, вписанной в осевое сечение конуса.

РЕГИСТРИРУЙТЕСЬ НА САЙТЕ ROSUCHEBNIK.RU
И ПОЛЬЗУЙТЕСЬ ПРЕИМУЩЕСТВАМИ ЛИЧНОГО КАБИНЕТА

- **Регистрируйтесь на очные и онлайн-мероприятия**
- **Получайте сертификаты за участие в вебинарах и конференциях**
- **Пользуйтесь цифровой образовательной платформой LECTA**
- **Учитесь на курсах повышения квалификации**
- **Скачивайте рабочие программы, сценарии уроков и внеклассных мероприятий, готовые презентации и многое другое**
- **Создавайте собственные подборки интересных материалов**
- **Участвуйте в конкурсах, акциях и спецпроектах**
- **Становитесь членом экспертного сообщества**
- **Сохраняйте архив обращений в службу техподдержки**
- **Управляйте новостными рассылками**



корпорация российский учебник
дрофа
вентана граф

rosuchebnik.ru, росучебник.рф

Москва, Пресненская наб., д. 6, строение 2
+7 (495) 795 05 35, 795 05 45, info@rosuchebnik.ru

Нужна методическая поддержка?

Методический центр
8-800-2000-550 (звонок бесплатный)
metod@rosuchebnik.ru

Хотите купить?

Официальный интернет-магазин учебной литературы book24.ru

Цифровая среда школы
lecta.rosuchebnik.ru

Отдел продаж
sales@rosuchebnik.ru

Хотите продолжить общение?

youtube.com/user/drofapublishing

fb.com/rosuchebnik

vk.com/ros.uchebnik

ok.ru/rosuchebnik

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!