СТРАТЕГИЧЕСКИЙ ПАРТНЕР

НОВЫЕ ПОДХОДЫ К ПРЕПОДАВАНИЮ ШКОЛЬНОГО КУРСА ГЕОМЕТРИИ

ЛИНИЯ УМК МЕРЗЛЯКА А.Г. ДЛЯ 5 – 11 КЛАССОВ
УЧЕБНИКИ

Математика

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

Алгебра

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

УГЛУБЛЕННЫЙ УРОВЕНЬ

Геометрия

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

УГЛУБЛЕННЫЙ УРОВЕНЬ

НОВИНКА

корпорация российский учебник
дрофа
вентана граф

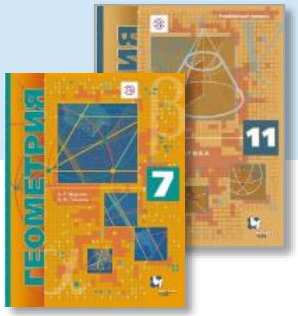
ЛИНИЯ УМК ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ 5 – 11 КЛАССОВ
АВТОРЫ: МЕРЗЛЯК А.Г., ПОЛОНСКИЙ В.Б., ЯКИР М.С.

Математика
5 -6 классы

Алгебра 7 – 11 кл.
Базовый

Алгебра 7 – 11 кл.
Углублённый

Геометрия 7 – 11 кл.
Базовый



Геометрия 7 – 11 кл.
Углублённый

Уникальная единая линия по математике, алгебре и геометрии с 5 по 11 класс, обеспечивающая достижение высокого образовательного результата

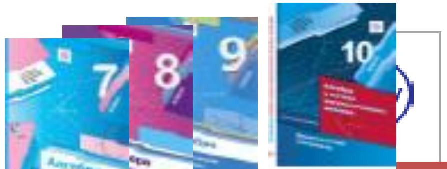
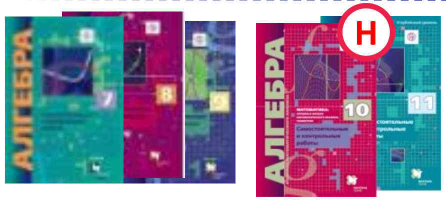
Преимущества:

- богатый задачный материал разного уровня сложности позволяет реализовать принципы уровневой дифференциации и индивидуального подхода в обучении, подготовить учащихся к итоговой аттестации
- доступное изложение теоретического материала
- сочетание традиционной методики и современных подходов в обучении

Состав УМК:

- дидактические материалы
- методические пособия
- рабочая программа
- рабочие тетради
- пособия для подготовки к ВПР
- ЭФУ

ЛИНИЯ УМК МЕРЗЛЯКА А.Г. ДЛЯ 5 – 11 КЛАССОВ, «ШЛЕЙФ»

	Дидактические материалы	Методические пособия для учителя	Рабочие тетради	Пособия для подготовки к ВПР	Рабочие программы
Математика 5-6 класс					
Алгебра 7-11 класс базовый уровень	 ГОТОВИТСЯ	 Н	 Н	ГОТОВИТСЯ	
Геометрия 7-11 класс базовый уровень					
Алгебра 7-11 класс углубленный уровень	 Н	 Н			
Геометрия 7-11 класс углубленный уровень	ГОТОВИТСЯ	 Н Н ГОТОВИТСЯ			

корпорация российский учебник

дрофа вентана граф

ЛИНИЯ УМК ПО ГЕОМЕТРИИ МЕРЗЛЯКА А.Г., ПОЛЯКОВА В.М. УГЛУБЛЕННЫЙ УРОВЕНЬ

Мерзляк А.Г., Поляков В.М.
Геометрия (Углублённое изучение).
7 класс

ФП № 1.2.4.3.6.1

Мерзляк А.Г., Поляков В.М.
Геометрия (Углублённое изучение).
8 класс

ФП № 1.2.4.3.6.2

Мерзляк А.Г., Поляков В.М.
Геометрия (Углублённое изучение).
9 класс

ФП № 1.2.4.3.6.3

ЛИНИЯ УМК ПО ГЕОМЕТРИИ МЕРЗЛЯКА А.Г., ПОЛЯКОВА В.М. УГЛУБЛЕННЫЙ УРОВЕНЬ

НОВИНКА

7 класс

8 класс

9 класс

Углублённое изучение геометрии в 7 - 9 классах обеспечивает достижение высокого образовательного результата

Преимущества:

- курс построен с учетом возрастных особенностей мышления учащихся; существенная роль отводится развитию геометрической интуиции
- материалы учебника предоставляют учителю возможность применения современных педагогических технологий
- большое количество разнообразного дидактического материала позволяет построить индивидуальную образовательную траекторию, подготовить каждого ученика к изучению углублённого курса геометрии в старших классах.

Состав УМК:

- методические пособия
- рабочая программа
- ЭФУ

ВОЗМОЖНОСТИ УЧЕБНИКА «ГЕОМЕТРИЯ 8 КЛАСС. УГЛУБЛЕННЫЙ УРОВЕНЬ» В ПРЕДОСТАВЛЕНИИ КАЧЕСТВЕННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ. ЗАДАЧА 16
ДОСРОЧНАЯ ВОЛНА 2019 ГОДА

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точки M и N являются серединами сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C, пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q (отличных от концов отрезков) соответственно.

а) Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

б) Найдите QN, если отрезки DP и PC перпендикулярны, $AB = 21$, $BC = 4$, $CD = 20$, $AD = 17$.

Вписанные четырёхугольники. Метод вспомогательной окружности

стр. 75

Если при решении задачи удаётся доказать, что некоторые четыре точки лежат на одной окружности, то благодаря этому мы получаем возможность использовать свойства окружности и её элементов. Поэтому поиск такой вспомогательной окружности — красивый и эффективный приём для решения целого ряда задач. Продемонстрируем это на примерах.

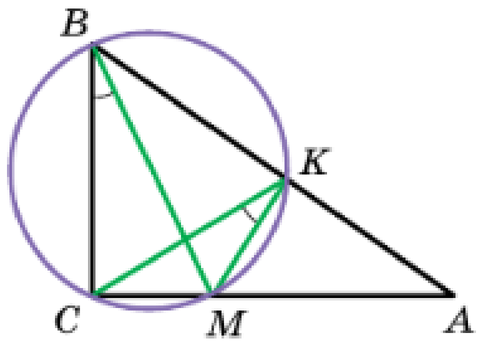


Рис. 10.5

Задача 2. Из произвольной точки M катета AC прямоугольного треугольника ABC опущен перпендикуляр MK на гипотенузу AB. Докажите, что $\angle MKC = \angle MBC$.

Решение. Имеем: $\angle BCA = 90°$, $\angle MKB = 90°$ (рис. 10.5), тогда $\angle BCA + \angle MKB = 180°$. Следовательно, около четырёхугольника $CBKM$ можно описать окружность. Углы MKC и MBC являются вписанными, опирающимися на одну и ту же дугу CM. Отсюда $\angle MKC = \angle MBC$. ■

Если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются условия $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$, то по определению эти треугольники подобны.

Можно ли по меньшему количеству условий определять подобие треугольников? На этот вопрос отвечают признаки подобия треугольников.

Теорема 15.1
(первый признак подобия треугольников: по двум углам)
Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Если $AB = A_1B_1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по второму признаку равенства треугольников, а следовательно, эти треугольники подобны.

Пусть, например, $AB > A_1B_1$. Отложим на стороне BA отрезок BA_2, равный стороне B_1A_1. Через точку A_2 проведём прямую A_2C_2, параллельную стороне AC (рис. 15.1).

Углы A и BA_2C_2 — соответственные при параллельных прямых A_2C_2 и AC и секущей AA_2. Отсюда $\angle A = \angle BA_2C_2$. Но $\angle A = \angle A_1$. Получаем, что $\angle A_1 = \angle BA_2C_2$. Таким образом, треугольники A_2BC_2 и $A_1B_1C_1$ равны по второму признаку равенства треугольников. По лемме о подобных треугольниках $\triangle A_2BC_2 \sim \triangle ABC$. Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. ■

Задача 1. Средняя линия трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) равна 24 см, а её диагонали пересекаются в точке O. Найдите основания трапеции, если $AO : OC = 5 : 3$.

Решение. Рассмотрим треугольники AOD и COB (рис. 15.2). Углы AOD и BOC равны как вертикальные, углы CAD и ACB равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC. Следовательно, треугольники AOD и COB подобны по двум углам.

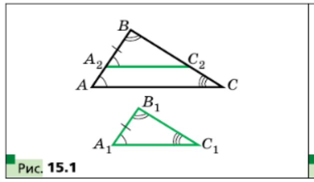


Рис. 15.1

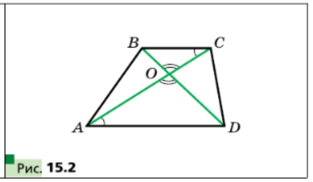


Рис. 15.2

Тогда $\frac{AD}{BC} = \frac{AO}{CO} = \frac{5}{3}$.

Пусть $BC = 3x$ см, тогда $AD = 5x$ см.

Поскольку средняя линия трапеции равна 24 см, то $BC + AD = 48$ см.

Имеем: $3x + 5x = 48$. Отсюда $x = 6$.

Следовательно, $BC = 18$ см, $AD = 30$ см.

Ответ: 18 см, 30 см. ■

Задача 2. В треугольнике ABC ($AB \neq BC$) отрезок BD_1 — биссектриса, луч BD_2 — биссектриса внешнего угла при вершине B. На отрезке D_1D_2 как на диаметре построена окружность (рис. 15.3). Докажите, что для любой точки X этой окружности выполняется равенство $\frac{AX}{XC} = \frac{AB}{BC}$.

Решение. Если точка X совпадает с точкой D_1 или с точкой D_2, то утверждение задачи следует из свойств биссектрисы угла треугольника и биссектрисы внешнего угла треугольника.

Пусть X — произвольная точка окружности, отличная от точек D_1 и D_2. Через точку C проведём прямую, параллельную прямой AX. Пусть эта прямая пересекает прямую XD_1 в точке K, а прямую XD_2 — в точке E.

$$\triangle AD_1X \sim \triangle CD_1K. \text{ Отсюда } \frac{AX}{CK} = \frac{AD_1}{D_1C}. \quad (1)$$

$$\triangle AD_2X \sim \triangle CD_2E. \text{ Отсюда } \frac{AX}{CE} = \frac{AD_2}{D_2C}. \quad (2)$$

Но, согласно свойствам биссектрисы угла треугольника и биссектрисы внешнего угла треугольника, $\frac{AD_1}{D_1C} = \frac{AD_2}{D_2C} = \frac{AB}{BC}$. Тогда из равенств (1) и (2) получаем:

$$\frac{AX}{CK} = \frac{AX}{CE}.$$

Отсюда $CK = CE$.

Поскольку D_1D_2 — диаметр, то $\angle KXE = 90°$. В прямоугольном треугольнике KXE отрезок XC — медиана, проведённая к гипотену-

Клавдий Птолемей (ок. 100 — ок. 178)

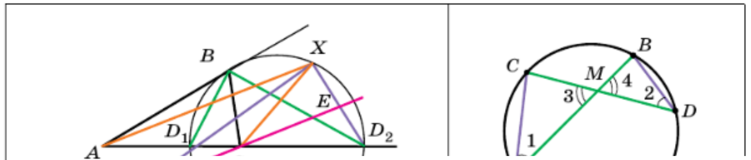
Древнегреческий математик и астроном. Автор геоцентрической модели мира. Разработал математическую теорию движения планет, позволяющую вычислять их положение. Создал прообраз современной системы координат.

Задача 6. Пусть M — произвольная точка описанной окружности равностороннего треугольника ABC. Докажите, что один из отрезков MA, MB, MC равен сумме двух других.

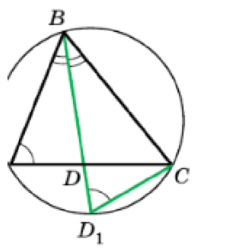
Решение. Если точка M совпадает с одной из вершин треугольника ABC, то утверждение задачи очевидно.

Пусть, например, точка M принадлежит дуге AC, причём отлична от её концов (рис. 15.8). Четырёхугольник $MABC$ является вписанным. Тогда по теореме Птолемея $AC \cdot MB = AB \cdot MC + BC \cdot MA$. Поскольку $AB = BC = AC$, то $MB = MC + MA$. ■

Задача 3 (свойство пересекающихся хорд). Докажите, что если хорды AB и CD пересекаются в точке M, то $AM \cdot MB = DM \cdot MC$ (рис. 15.4).



Решение. Пусть луч BD пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D (рис. 15.6). Имеем: углы BAC и $BD C$



15.6

$AD \cdot DC$. Отсюда

Теорема 15.2
(теорема Птолемея)
Произведение диагоналей вписанного четырёхугольника равно сумме произведений его противолежащих сторон.

Доказательство

На рисунке 15.7 изображён вписанный в окружность четырёхугольник $ABCD$. Докажем, что $AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot AC$.

На диагонали AC отметим точку K так, что $\angle 1 = \angle 2$. Углы 3 и 4 равны как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу BC. Следовательно, треугольники ABK и DBC подобны по первому признаку подобия треугольников. Отсюда $\frac{AB}{BD} = \frac{AK}{DC}$, т. е.

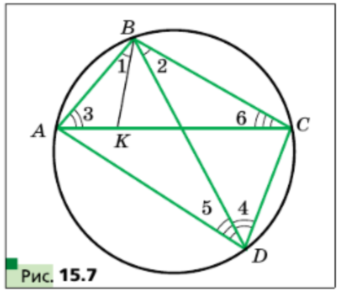


Рис. 15.7

$$AB \cdot DC = BD \cdot AK. \quad (3)$$

Поскольку $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle ABD = \angle KBC$. Углы 5 и 6 равны как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AB. Поэтому $\triangle KBC \sim \triangle ABD$. Отсюда $\frac{BC}{BD} = \frac{KC}{AD}$, т. е.

$$BC \cdot AD = BD \cdot KC. \quad (4)$$

Сложив равенства (3) и (4), получаем:

$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot AK + BD \cdot KC$, т. е.

$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD(AK + KC) = BD \cdot AC$. ■

корпорация российский учебник
дрофа вентана граф

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ (53 ЗАДАЧИ) стр. 108 – 119

15.2. На рисунке 15.10 $DE \perp AB$, $BC \perp AD$. Укажите все пары подобных треугольников, изображённых на этом рисунке.

15.3. На рисунке 15.11 $\angle ABC = \angle BDC$. Какие треугольники на этом рисунке подобны? Запишите равенство отношений их соответственных сторон.

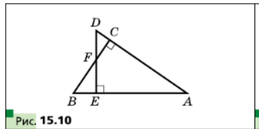


Рис. 15.10

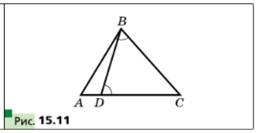


Рис. 15.11

15.4. Укажите пары подобных треугольников, изображённых на рисунке 15.12, найдите длину отрезка x (размеры даны в сантиметрах).

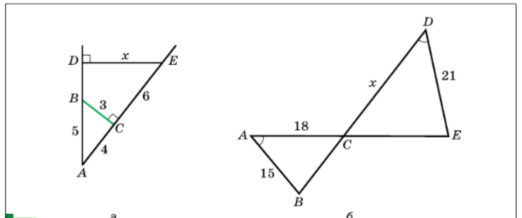


Рис. 15.12

15.5. На стороне CD параллелограмма $ABCD$ отметили точку E, прямые BE и AD пересекаются в точке F (рис. 15.13), $CE = 8$ см, $DE = 4$ см, $BE = 10$ см, $AD = 9$ см. Найдите отрезки EF и FD.

15.6. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $AD = 20$ см, $BC = 15$ см, O — точка пересечения диагоналей, $AO = 16$ см. Найдите отрезок OC.

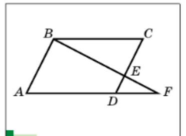


Рис. 15.13

Упражнения

15.1. На рисунке 15.9 $\angle BAC = \angle BED$. Подобны ли треугольники ABC и EDB? В случае утвердительного ответа укажите пары соответственных сторон.

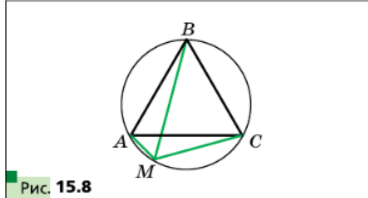


Рис. 15.8

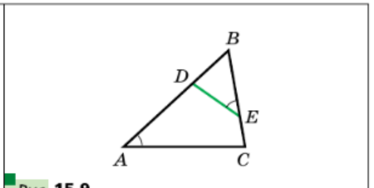


Рис. 15.9

15.7. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке O. Найдите основание AD, если $BO : OD = 3 : 7$, $BC = 18$ см.

15.8. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O. Известно, что $BO = 4$ см, $OD = 20$ см, $AC = 36$ см. Найдите отрезки AO и OC.

15.9. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $AD = 18$ см, $BC = 14$ см, $AC = 24$ см. Найдите отрезки, на которые точка пересечения диагоналей делит диагональ AC.

15.10. Можно ли утверждать, что два равнобедренных треугольника подобны, если у них есть: 1) по равному острому углу; 2) по прямому углу; 3) по равному тупому углу?

15.11. Из вершины прямого угла треугольника опущена высота на гипотенузу. Сколько подобных треугольников образовалось при этом?

15.12. Стороны параллелограмма равны 20 см и 14 см, высота, проведённая к большей стороне, равна 7 см. Найдите высоту параллелограмма, проведённую к меньшей стороне.

15.13. Докажите, что в подобных треугольниках биссектрисы, проведённые из вершин соответственных углов, относятся как соответственные стороны.

15.14. Докажите, что в подобных треугольниках высоты, проведённые из вершин соответственных углов, относятся как соответственные стороны.

15.15. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 28 см и 63 см. Известно, что $\angle ABC = \angle ACD$. Найдите диагональ AC.

15.16. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D такую, что $\angle ABD = \angle ACB$. Известно, что $AB = 20$ см, $BC = 28$ см, $AC = 40$ см. Найдите неизвестные стороны треугольника ABD.

15.17. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 20 см, а больший катет — 16 см. Найдите отрезки, на которые серединный перпендикуляр гипотенузы делит больший катет.

15.18. Объясните с помощью рисунка 15.14, как можно найти ширину BM реки, используя подобие треугольников.

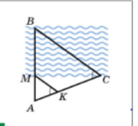


Рис. 15.14

15.19. Дерево находится на расстоянии 60 м от объектива фотоаппарата. Высота его изображения на плёнке равна 8 мм.

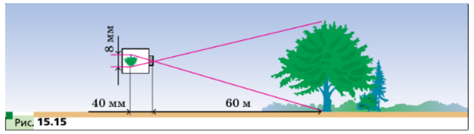


Рис. 15.15

Расстояние от объектива до плёнки равно 40 мм (рис. 15.15). Какова высота дерева?

15.20. Найдите высоту дерева, если длина его тени равна 8,4 м, а длина тени от вертикального столба высотой 2 м в это же время суток равна 2,4 м (рис. 15.16).

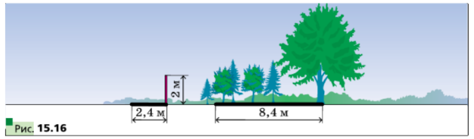


Рис. 15.16

15.21. Может ли прямая пересекать две стороны равнобедренного треугольника, отсекать от него треугольник, ему подобный, и не быть параллельной третьей стороне?

15.22. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Известно, что $AM = 6$ см, $BM = 14$ см, $CM = 12$ см. Найдите отрезок DM.

15.23. Хорды MK и NP окружности пересекаются в точке F. Известно, что $MF = 9$ см, $KF = 12$ см, а отрезок NF в 3 раза длиннее отрезка PF. Найдите длину хорды NP.

15.24. Точка K делит хорду AC окружности пополам, а хорду DE — на отрезки длиной 2 см и 32 см. Найдите длину хорды AC.

15.25. На хорде AB отметили точку M. Докажите, что $MA \cdot MB = R^2 - d^2$, где R — радиус окружности, d — расстояние от точки M до центра окружности.

15.26. Точка E делит хорду CD окружности на отрезки длиной 15 см и 16 см. Найдите радиус окружности, если расстояние от точки E до центра окружности равно 4 см.

15.27. Точка P делит хорду MK окружности на два отрезка длиной 8 см и 12 см. Найдите расстояние от точки P до центра окружности, если её радиус равен 11 см.

15.28. Через точку A проведены к окружности касательная AM (M — точка касания) и секущая, которая пересекает окружность в точках K и P (точка K лежит между точками A и P). Найдите отрезок KP, если $AM = 12$ см, $AP = 18$ см.

15.29. Через точку A, лежащую вне окружности, проведены две прямые, одна из которых касается окружности в точке B, а другая пересекает окружность в точках C и D (точка C лежит между точками A и D), $AB = 18$ см, $AC : CD = 4 : 5$. Найдите отрезок AD.

15.30. Через точку A, лежащую вне окружности (рис. 15.17), проведены две прямые, одна из которых пересекает окружность в точках B и C (точка B лежит между точками A и C), а другая — в точках D и E (точка D лежит между точками A и E).
1) Докажите, что $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.
2) Найдите отрезок AE, если $AB = 18$ см, $BC = 12$ см и $AD : DE = 5 : 7$.

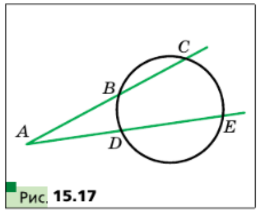


Рис. 15.17

15.31. Через точку M, лежащую вне окружности, проведена прямая, пересекающая данную окружность в точках A и B. Докажите, что $MA \cdot MB = d^2 - R^2$, где R — радиус окружности, d — расстояние от точки M до центра окружности.

15.32. В окружности, радиус которой равен 8 см, проведена хорда AB. На прямой AB вне отрезка AB отметили точку C такую, что $AC : BC = 1 : 4$. Найдите расстояние от точки C до центра окружности, если $AB = 9$ см.

15.33. В равнобедренном треугольнике основание и боковая сторона соответственно равны 5 см и 20 см. Найдите биссектрису треугольника, проведённую к боковой стороне.

15.34. В треугольнике ABC $BC = 18$ см, $AC = 15$ см, $AB = 12$ см. Найдите биссектрису треугольника, проведённую к стороне BC.

15.35. В треугольник ABC вписан квадрат так, что две его соседние вершины принадлежат стороне AC, а две другие — сторонам AB и BC соответственно. Найдите сторону квадрата, если $AC = a$, а высота, проведённая к стороне AC, равна h.

15.36. В треугольнике ABC $BC = 72$ см, AD — высота, $AD = 24$ см. В данный треугольник вписан прямоугольник $MNKP$ так, что вершины M и P принадлежат стороне BC, а вершины N и K — сторонам AB и AC соответственно. Найдите стороны прямоугольника, если $MP : MN = 9 : 5$.

15.37. Через вершины B и C треугольника ABC проходит окружность, пересекающая стороны AB и AC в точках K и M соответственно. Найдите отрезки MK и AM, если $AB = 2$ см, $BC = 4$ см, $AC = 5$ см, $AK = 1$ см.

15.38. На продолжении биссектрисы CF треугольника ABC за точку C отметили точку D так, что $\angle ADB = \frac{1}{2}\angle ACB$. Докажите, что $CD^2 = AC \cdot CB$.

15.39. Продолжение медианы AM треугольника ABC пересекает его описанную окружность в точке D. Известно, что $AC = DC = 1$ см. Найдите сторону BC.

15.40. В окружность вписан треугольник, одна из сторон которого равна 21 см. Параллельно этой стороне через точку пересечения медиан проведена хорда. Отрезки хорды, расположенные вне треугольника, равны 8 см и 11 см. Найдите неизвестные стороны треугольника.

15.41. В окружность вписан треугольник ABC, в котором проведены медианы AF и BK. Медиану AF продлили до пересечения с окружностью в точке D. Найдите стороны AC и BC, если $BK = 63$ см, $AF = 45$ см, $FD = 24,2$ см.

15.42. Высоты AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Докажите, что $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1$.

15.43. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Известно, что $AB - BD = 4$ см, $AC + CD = 9$ см. Найдите отрезок AD.

15.44. В угол вписаны две окружности. Точки A и B — точки касания первой окружности со сторонами угла, точки A_1 и B_1 — точки касания второй окружности со сторонами угла (рис. 15.18). Отрезок AB_1 пересекает эти окружности в точках C и C_1. Докажите, что $AC = B_1C_1$.

15.45. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle BAC = \angle CBD$ и $\angle BCA = \angle CDB$. Через точки A, D и точку пересечения диагоналей четырёхугольника проведена окружность. Через точки B и C к окружности провели касательные BK и CF (K и F — точки касания). Докажите, что $BK = CF$.

15.46. Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения боковых сторон лежат на одной прямой.

15.47. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке F, а лучи BC и AD — в точке E. Точки E и F равноудалены от прямой BD. Докажите, что диагональ AC делит диагональ BD пополам.

15.48. Даны отрезок AB и прямая l, параллельная этому отрезку. С помощью только линейки разделите отрезок AB пополам.

15.49. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность с центром в точке O. Через точки B и C перпендикулярно прямой AO проведены прямые, пересекающие прямые AC и AB в точках M и N соответственно. Докажите, что $BC^2 = BM \cdot CN$.

15.50. На окружности отметили точку K. Провели окружность с центром в точке K, которая касается диаметра первой окружности в точке E и пересекает первую окружность в точках P и M (рис. 15.19). Докажите, что прямая PM делит отрезок KE пополам.

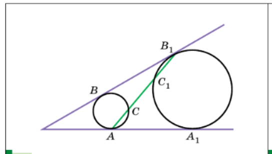


Рис. 15.18

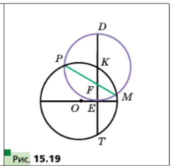


Рис. 15.19

15.51. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Докажите, что $AB + AC < 2AD$.

15.52. На окружности отметили точки A, B, C и D такие, что $\cup AB = \cup BC = \cup CD$. Докажите, что $AC^2 = AB \cdot (BC + AD)$.

15.53. На рисунке 15.20 изображён вписанный в окружность семиугольник $ABCDEFG$, все стороны которого равны. Докажите, что $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB}$.

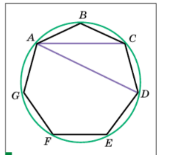


Рис. 15.20

корпорация российский учебник

дрофа вентана граф

§ 25 Площадь треугольника

стр. 180

Если элемент содержания «выпал» из перечня контролируемых элементов усвоения, значит ли это, что он перестал быть элементом интеллектуального развития ученика?

Задача 5. Постройте треугольник по трём его высотам.

Решение. Пусть a, b и c — стороны, а h_a, h_b и h_c — соответствующие высоты искомого треугольника ABC. От произвольной точки M отложим отрезки MM_1, MM_2 и MM_3, соответственно равные h_a, h_b, h_c, так, чтобы точки M_1, M_2 и M_3 не лежали на одной прямой (рис. 25.8). Около треугольника $M_1M_2M_3$ опишем окружность.

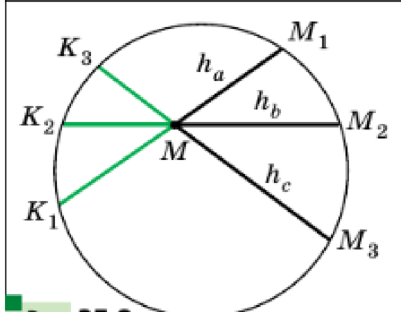


Рис. 25.8

Пусть лучи M_1M, M_2M и M_3M пересекают окружность в точках K_1, K_2 и K_3 соответственно. Имеем: $MM_1 \cdot MK_1 = MM_2 \cdot MK_2 = MM_3 \cdot MK_3$, т. е.

$$h_a \cdot MK_1 = h_b \cdot MK_2 = h_c \cdot MK_3. \qquad (1)$$

Также можем записать:

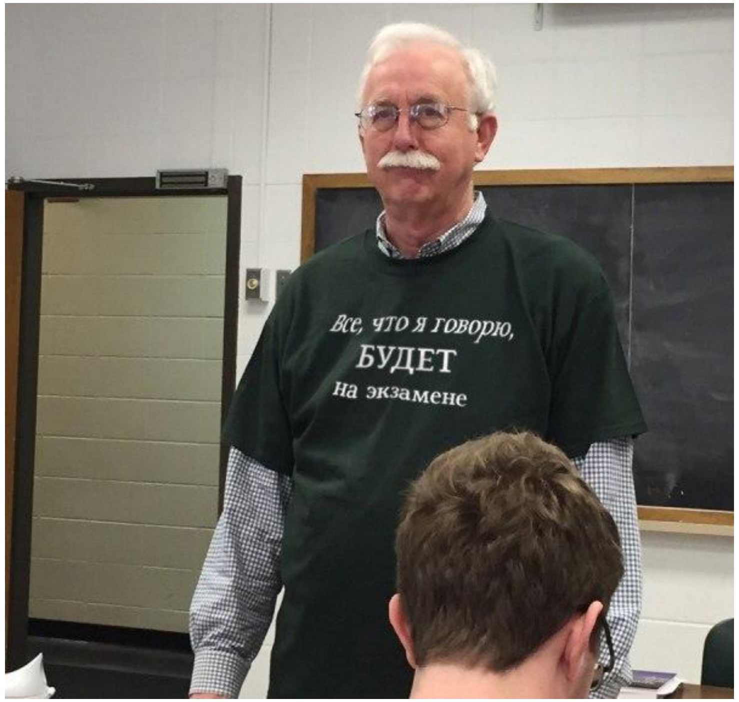
$$h_a \cdot a = h_b \cdot b = h_c \cdot c. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) получаем:

$$\frac{MK_1}{a} = \frac{MK_2}{b} = \frac{MK_3}{c}.$$

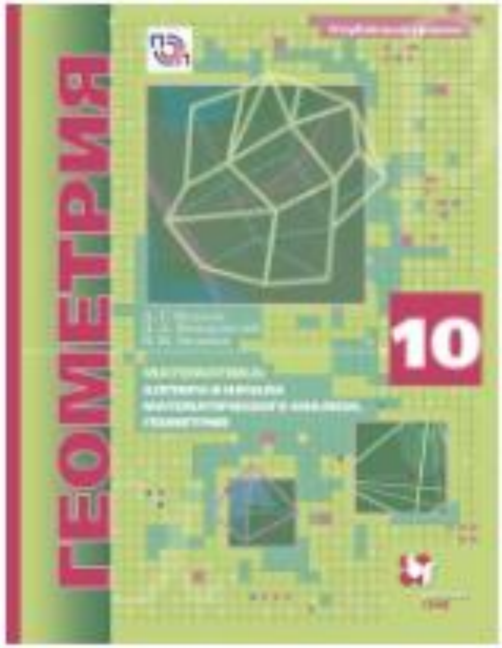
Это значит, что треугольник со сторонами, равными MK_1, MK_2 и MK_3, подобен треугольнику ABC. Построив треугольник, подобный треугольнику ABC, найдём углы искомого треугольника ABC.

Теперь осталось построить треугольник по углам и высотам. Завершите решение самостоятельно. ■



ТРУДНА ЛИ ЗАДАЧА?!

АПРОБАЦИЯ УЧЕБНИКОВ УГЛУБЛЕННОГО КУРСА ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 10 – 11 КЛАССОВ В ПИЛОТНОЙ ШКОЛЕ №875 ГОРОДА МОСКВЫ



Условные обозначения

Простые задачи

Задачи среднего уровня сложности

Сложные задачи

Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

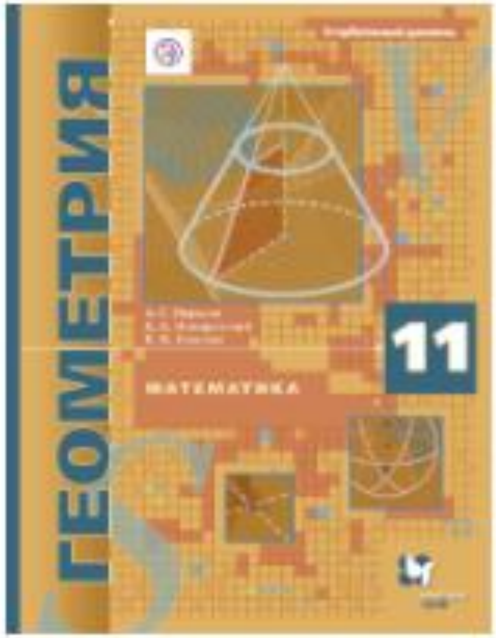
Окончание доказательства теоремы

Окончание решения задачи

Задачи, которые можно решать с помощью компьютера

1.7. Задания, рекомендуемые для устной работы

1.11. Задания, рекомендуемые для домашней работы



российский учебник

дрофа

вентана граф

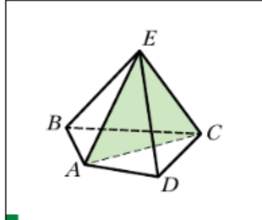


Рис. 3.15

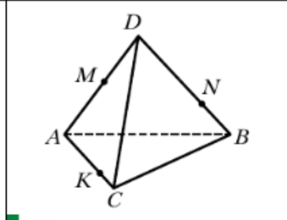


Рис. 3.16

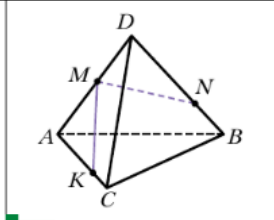


Рис. 3.17

На рисунке 3.15 секущую плоскость задают две пересекающиеся прямые AE и CE. Сечением пирамиды этой плоскостью является треугольник AEC.

Задача 2. На рёбрах AD, DB и AC тетраэдра $DABC$ отмечены соответственно точки M, N и K (рис. 3.16). Постройте сечение тетраэдра плоскостью KMN, если отрезок MN не параллелен ребру AB.

Решение. Точки M и N являются общими для плоскости KMN и плоскости ADB. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой MN. Тогда секущая плоскость пересекает грань ADB по отрезку MN (рис. 3.17). Аналогично делаем вывод, что плоскость KMN пересекает грань ADC по отрезку KM.

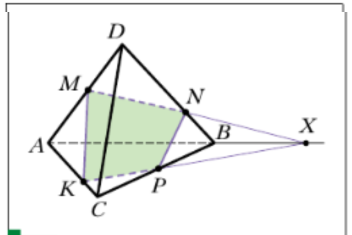


Рис. 3.18

Секущая плоскость KMN и плоскость ABC имеют общую точку K. Следовательно, они пересекаются по прямой, проходящей через точку K. Чтобы эту прямую построить, надо найти ещё одну общую точку плоскостей ABC и KMN. Для этого найдём точку пересечения прямой MN и плоскости ABC.

Пусть прямая MN пересекает прямую AB в точке X (рис. 3.18). Поскольку $AB \subset ABC$, то $X \in ABC$. Поскольку $MN \subset KMN$, то $X \in KMN$. Итак, точки K и X являются общими для плоскостей ABC и KMN. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой KX.

Пусть прямая KX пересекает отрезок CB в точке P. Тогда секущая плоскость пересекает грани ABC и CDB соответственно по отрезкам KP и PN. Итак, четырёхугольник $KMNP$ — искомое сечение. ■

Задача 3. Точка M принадлежит боковому ребру BB_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Прямая a принадлежит плоскости ABC и расположена так, как показано на рисунке 3.19. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через прямую a и точку M.

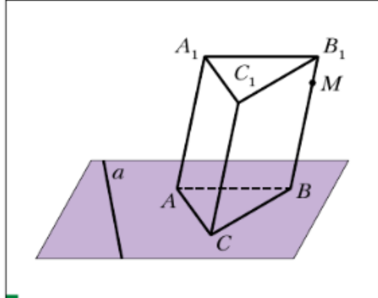


Рис. 3.19

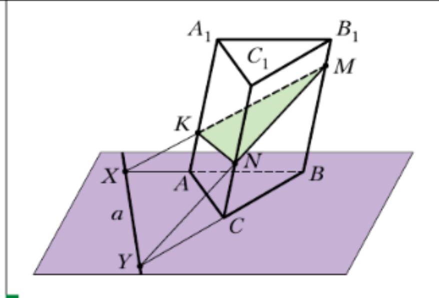


Рис. 3.20

Решение. Пусть прямая AB пересекает прямую a в точке X (рис. 3.20). Точки M и X являются общими для секущей плоскости и плоскости AA_1B_1. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой MX. Пусть прямая MX пересекает ребро AA_1 в точке K. Тогда секущая плоскость пересекает боковую грань AA_1B_1B по отрезку KM.

Аналогично строим отрезок MN, по которому секущая плоскость пересекает грань CC_1B_1B.

Для завершения решения осталось соединить точки N и K. Треугольник KMN — искомое сечение. ■

Задача 4. На рёбрах AD, DD_1 и B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены соответственно точки M, N и K (рис. 3.21). Постройте сечение куба плоскостью MNK.

Решение. Очевидно, что секущая плоскость пересекает грань AA_1D_1D куба по отрезку MN (рис. 3.22).

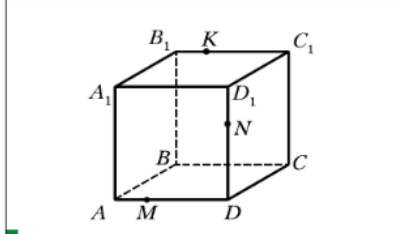


Рис. 3.21

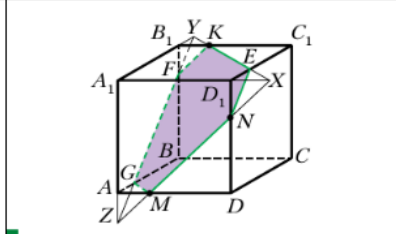


Рис. 3.22

Задачи

3.25. На боковых рёбрах MB и MC пирамиды $MABCD$ отметили соответственно точки E и F (рис. 3.46). Постройте линию пересечения плоскостей AEC и BDF.

3.26. На рёбрах AA_1 и A_1B_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ отмечены точки D и E соответственно (рис. 3.47). Постройте сечение призмы плоскостью CDE.

3.27. Дана пирамида $MABCD$ (рис. 3.48). На боковых рёбрах MB и MC отметили соответственно точки E и F, а на продолжении ребра MA за точку A — точку K. Постройте сечение пирамиды плоскостью EFK.

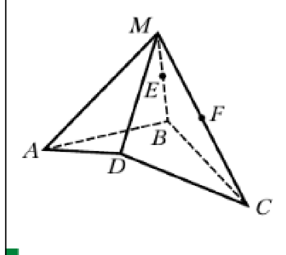


Рис. 3.46

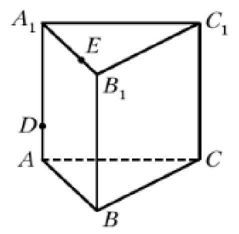


Рис. 3.47

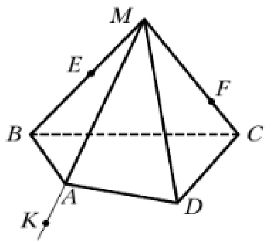


Рис. 3.48

3.28. На боковом ребре BB_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка M (рис. 3.49). Постройте сечение призмы плоскостью CMD.

3.29. На ребре CC_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E (рис. 3.50). Постройте сечение призмы плоскостью BA_1E.

3.30. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Отметьте на его рёбрах три точки так, чтобы сечение куба плоскостью, проходящей через эти точки, было пятиугольником.

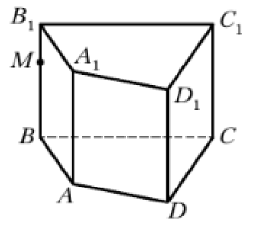


Рис. 3.49

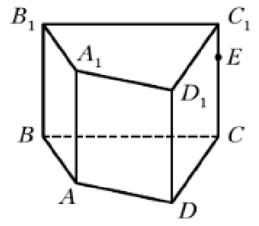


Рис. 3.50

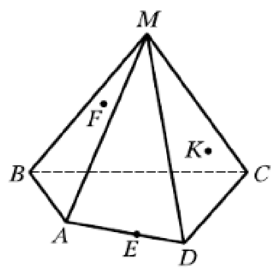


Рис. 3.51

3.31. Дана пирамида $MABCD$ (рис. 3.51). На ребре AD отметили точку E, на грани AMB — точку F, на грани CMD — точку K. Постройте сечение пирамиды плоскостью EFK.

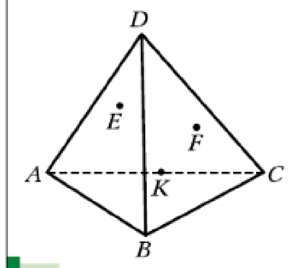


Рис. 3.52

3.32. Точка K принадлежит ребру AC тетраэдра $DABC$, точка E — грани ADB, точка F — грани BDC (рис. 3.52). Постройте сечение тетраэдра плоскостью EFK.

3.33. На рёбрах BC, CA и CD тетраэдра $DABC$ отметили точки M, N и P соответственно (рис. 3.53). Постройте точку пересечения плоскостей ABP, ADM и BDN.

3.34. На рёбрах BC, CA и CD тетраэдра $DABC$ отметили точки M, N и P соответственно (рис. 3.53). Постройте точку пересечения плоскостей BPN, AMP и MND.

3.35. Верно ли, что если все грани многогранника — равные квадраты, то этот многогранник — куб?

3.36. Точки M, N и K принадлежат соответственно граням ADB, BDC и CDA тетраэдра $DABC$ (рис. 3.54). Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

3.37. Точки F, M и K принадлежат соответственно граням ASB, ABC и CSD пирамиды $SABCD$ (рис. 3.55). Постройте сечение пирамиды плоскостью FMK.

3.38. Точки F, M и K принадлежат соответственно граням ASB, ASD и DSC пирамиды $SABCD$ (рис. 3.55). Постройте сечение пирамиды плоскостью FMK.

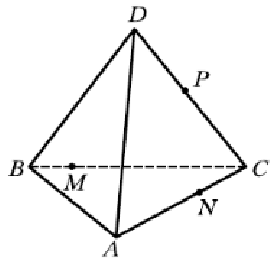


Рис. 3.53

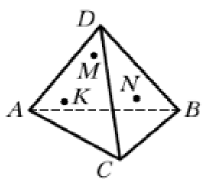


Рис. 3.54

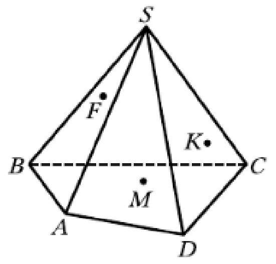


Рис. 3.55

Теперь рассмотрим случай, когда прямая l пересекает плоскость многоугольника.

Из свойств параллельного проектирования следует, что параллельной проекцией треугольника является треугольник (рис. 8.1).

При параллельном проектировании величины углов и отношения отрезков, вообще говоря, не сохраняются. Поэтому, например, изображением равнобедренного и равностороннего треугольников может быть разносторонний треугольник, а изображением прямоугольного треугольника — как тупоугольный треугольник, так и остроугольный.

Покажем, что для произвольного треугольника найдётся равносторонний треугольник, параллельной проекцией которого является данный треугольник.

Рассмотрим произвольный треугольник ABD в плоскости α. Выберем любую из трёх сторон треугольника, например AB. Построим равносторонний треугольник ABC так, чтобы точка C не принадлежала плоскости α (рис. 8.2). В качестве направления параллельного проектирования выберем прямую CD. Тогда треугольник ABD является параллельной проекцией треугольника ABC на плоскость α в направлении прямой CD.

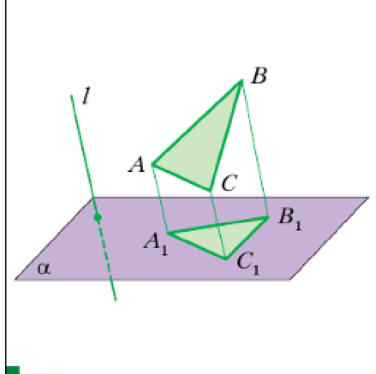


Рис. 8.1

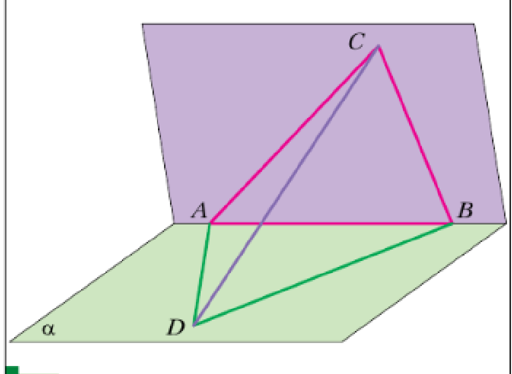


Рис. 8.2

Если в качестве плоскости проектирования выбрать плоскость ABC, то мы также установим и такой факт: равносторонний треугольник может служить параллельной проекцией треугольника любого вида.

Отметим, что в силу теоремы 7.3 медианы данного треугольника изображаются медианами треугольника, являющегося изображением данного. Однако аналогичное свойство для биссектрис и высот треугольника в общем случае не выполняется.

Поскольку при параллельном проектировании сохраняется параллельность отрезков, то изображением параллелограмма (в частности, прямоугольника, ромба, квадрата) является параллелограмм (рис. 8.3).

Также из свойств параллельного проектирования следует, что изображением трапеции является трапеция. Однако вид трапеции (равнобокая, прямоугольная) может не сохраняться.

Параллельной проекцией окружности является фигура, которую называют **эллипсом** (рис. 8.4). Изображение центра окружности называют **центром эллипса**.

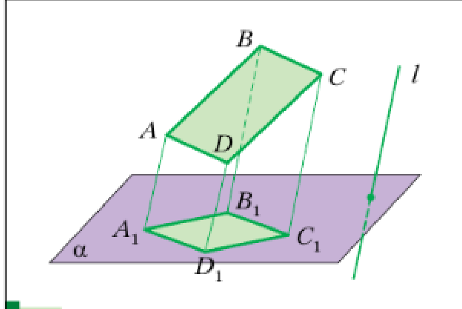


Рис. 8.3

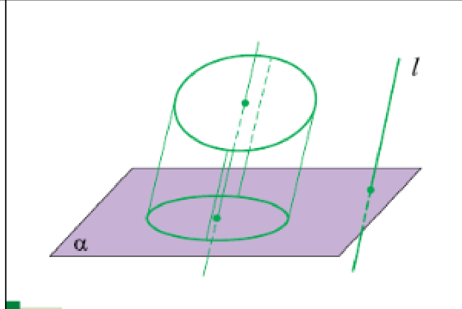


Рис. 8.4

Задача 1. Трапеция $A_1B_1C_1D_1$ является изображением равнобокой трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Постройте изображение высоты трапеции $ABCD$, проведённой из вершины B.

Решение. На рисунке 8.5 изображены равнобокая трапеция $ABCD$ и её параллельная проекция — трапеция $A_1B_1C_1D_1$.

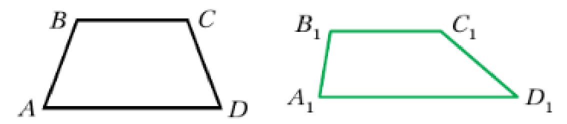


Рис. 8.5

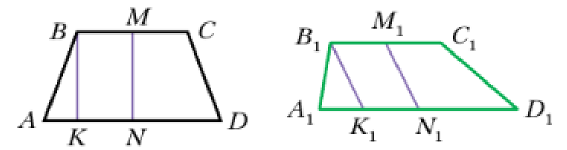


Рис. 8.6

8.11. Треугольник $A_1B_1C_1$ — изображение равнобедренного треугольника ABC с основанием AC. Постройте изображение центра окружности, описанной около треугольника ABC, если высота AM этого треугольника делит сторону BC на отрезки BM и MC так, что $BM = 5MC$.

8.12. Треугольник $A_1B_1C_1$ — изображение треугольника ABC (рис. 8.30), отрезки A_1D_1 и C_1E_1 — изображения соответственно высот AD и CE треугольника ABC. Постройте изображение центра окружности, описанной около треугольника ABC.

8.13. Треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 8.31) — изображение треугольника ABC, точка O_1 — изображение центра окружности, описанной около треугольника ABC. Постройте изображения высот треугольника ABC.

8.14. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ — изображение ромба $ABCD$. Постройте изображение перпендикуляра, опущенного из точки пересечения диагоналей ромба на сторону AD, если $\angle A = 60^\circ$.

8.15. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ — изображение ромба $ABCD$, в котором $\angle A = 60^\circ$. Постройте изображение высоты ромба, проведённой из вершины A к стороне BC ромба.

8.16. Треугольник $A_1B_1C_1$ — изображение прямоугольного равнобедренного треугольника ABC с гипотенузой AB. Постройте изображение квадрата $DEFM$, если $D \in AB$, $M \in AB$, $E \in AC$, $F \in BC$.

8.17. Треугольник $A_1B_1C_1$ — изображение прямоугольного равнобедренного треугольника ABC с гипотенузой AB. Постройте изображение квадрата со стороной AB, лежащего в плоскости ABC и расположенного вне треугольника ABC.

8.18. Эллипс с центром O_1 является изображением окружности с центром O (рис. 8.32), отрезок A_1B_1 — изображение диаметра AB данной окружности. Постройте изображение диаметра, перпендикулярного диаметру AB.

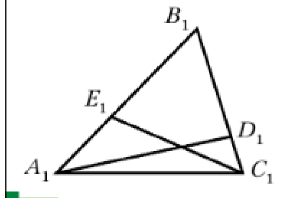


Рис. 8.30

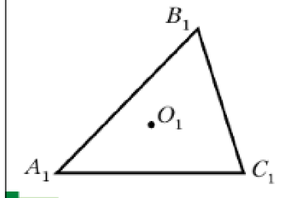


Рис. 8.31

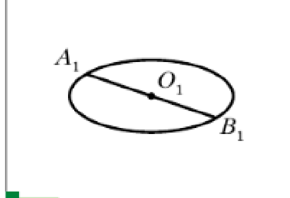


Рис. 8.32

8.19. Эллипс с центром O_1 и треугольник $A_1B_1C_1$ являются изображениями окружности с центром O и вписанного в неё треугольника ABC (рис. 8.33). Постройте изображение высоты треугольника ABC, проведённой из вершины A.

8.27. Эллипс с центром O_1 является изображением окружности с центром O. Постройте изображение квадрата:
1) вписанного в данную окружность;
2) описанного около данной окружности.

8.28. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 8.39) является изображением квадрата $ABCD$, точка M_1 — изображением точки M, принадлежащей стороне AB. Постройте изображение точки N, принадлежащей стороне BC, такой, что $AN \perp DM$.

8.29. Параллелограмм $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 8.40) является изображением квадрата $ABCD$, точка K_1 — изображением точки K, принадлежащей стороне CD. Постройте изображение точки F, принадлежащей стороне AD, такой, что $BF = AK$.

8.30. Четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 8.41) является изображением равнобокой трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$), в которую можно вписать окружность. Постройте изображение точек касания сторон трапеции со вписанной окружностью.

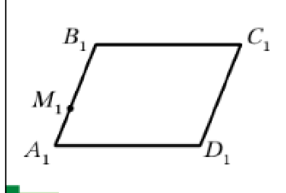


Рис. 8.39

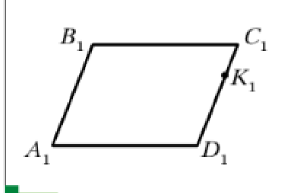


Рис. 8.40

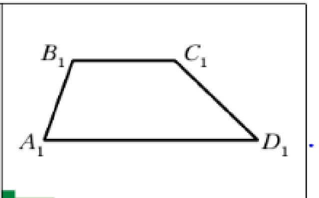


Рис. 8.41

8.31. Четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 8.42) является изображением прямоугольной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $AB \perp AD$), точка O_1 — изображение центра окружности, вписанной в эту трапецию. Постройте изображение точек касания сторон трапеции с вписанной окружностью.

8.32. Постройте изображение призмы $ABCA_1B_1C_1$, если на рисунке 8.43 точки M, N, K, F являются изображениями середин отрезков BB_1, CC_1, AB и A_1C_1 соответственно.

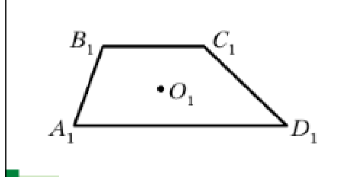


Рис. 8.42

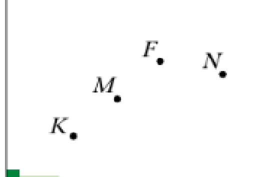


Рис. 8.43

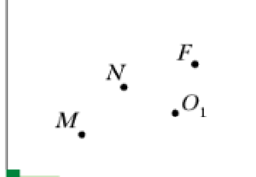


Рис. 8.44

Задача 2. Через вершину O угла AOB проведена прямая OD так, что $\angle DOA = \angle DOB = \alpha$, где $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ (рис. 12.3). Докажите, что проекция прямой OD на плоскость AOB содержит биссектрису угла AOB.

Решение. Если $OD \subset AOB$, то утверждение задачи очевидно.

Пусть прямая OD не принадлежит плоскости AOB. Проведём перпендикуляр DK к плоскости AOB (рис. 12.4). Тогда прямая OK является проекцией прямой OD на плоскость AOB. Опустим перпендикуляры DN и DM соответственно на стороны OA и OB угла AOB. Соединим точку K с точками N и M.

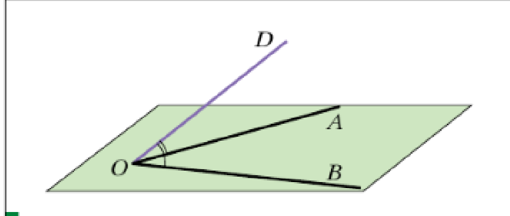


Рис. 12.3

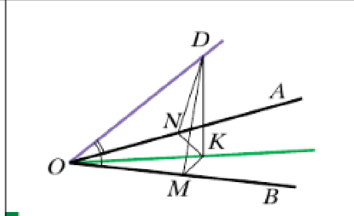


Рис. 12.4

Отрезок KM является проекцией наклонной DM на плоскость AOB. По построению $DM \perp OB$. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах получаем, что $KM \perp OB$. Аналогично доказывается, что $KN \perp OA$.

Прямоугольные треугольники DON и DOM равны по гипотенузе и острому углу. Отсюда $DN = DM$. Тогда прямоугольные треугольники DNK и DMK равны по гипотенузе и катету. Отсюда $KN = KM$. Получаем, что прямоугольные треугольники ONK и OMK тоже равны по гипотенузе и катету. Отсюда $\angle NOK = \angle MOK$. ■

Задача 3. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямая A_1C перпендикулярна плоскости DC_1B, и эта плоскость делит отрезок A_1C в отношении $1 : 2$, считая от точки C (рис. 12.5).

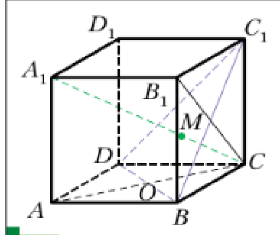


Рис. 12.5

Решение. Поскольку $A_1B_1 \perp BB_1C_1$, то отрезок B_1C является проекцией наклонной A_1C на плоскость BB_1C_1. Имеем: $B_1C \perp BC_1$ как диагонали квадрата. Следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах $A_1C \perp BC_1$.

Аналогично доказывается, что $A_1C \perp BD$. Следовательно, $A_1C \perp DC_1B$.

Рассмотрим прямоугольник AA_1C_1C (рис. 12.6). Пусть отрезки A_1C и C_1O пересекаются в точке M (O — точка пересечения диагоналей AC и BD). Поскольку $C_1O \subset DC_1B$, то M — точка пересечения отрезка A_1C с плоскостью DC_1B. Треугольники CMO и A_1MC_1 подобны. Тогда $\frac{CM}{MA_1} = \frac{CO}{A_1C_1} = \frac{1}{2}$. Следовательно, точка M делит отрезок A_1C в отношении $1 : 2$, считая от точки C. ■

В § 11 мы научились находить расстояние между скрещивающимися прямыми, содержащими диагонали соседних граней куба. Рассмотрим ещё один приём решения этой задачи.

Задача 4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a (рис. 12.7). Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

Решение. Рассмотрим плоскости AB_1D_1 и DC_1B, содержащие рассматриваемые скрещивающиеся прямые AB_1 и BC_1.

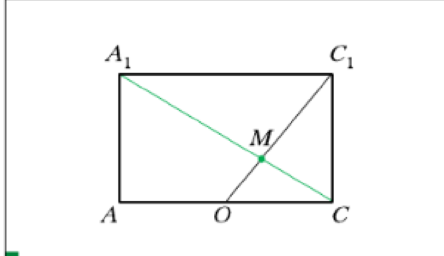


Рис. 12.6

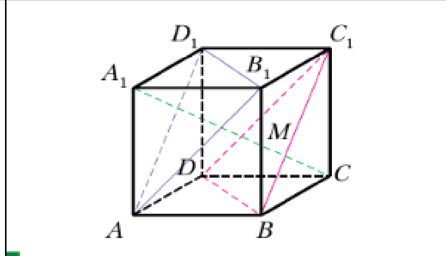


Рис. 12.7

В силу ключевой задачи 3 получаем, что $A_1C \perp DC_1B$. Аналогично можно доказать, что $A_1C \perp AD_1B_1$. С учётом теоремы 10.5 приходим к выводу, что $AB_1D_1 \parallel DC_1B$. Следовательно, расстояние между скрещивающимися прямыми AB_1 и BC_1 равно расстоянию между плоскостями AB_1D_1 и DC_1B.

Ещё раз обращаясь к ключевой задаче 3, мы можем утверждать, что плоскости AB_1D_1 и DC_1B делят отрезок A_1C на три равные части. Значит, искомое расстояние равно $\frac{1}{3}A_1C$.

Задача 4. В одной из двух пересекающихся плоскостей, угол между которыми равен α, проведена прямая, образующая с прямой пересечения плоскостей угол β, а с другой плоскостью угол γ. Докажите, что $\sin\gamma = \sin\alpha \sin\beta$.

Решение. Если $\alpha = 90^\circ$, то доказываемое равенство становится очевидным. Убедитесь в этом самостоятельно.

Пусть прямая AD, принадлежащая плоскости τ, образует с прямой пересечения плоскостей τ и σ угол β (рис. 14.13). Опустим из точки A перпендикуляр AB на прямую пересечения данных плоскостей и перпендикуляр AC на плоскость σ.

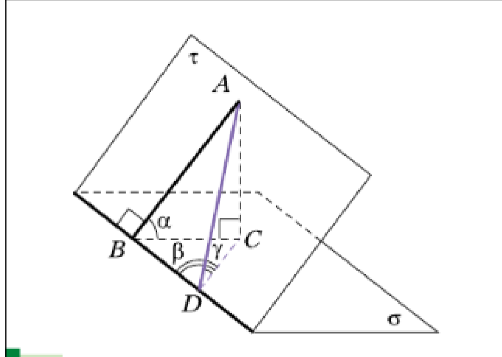


Рис. 14.13

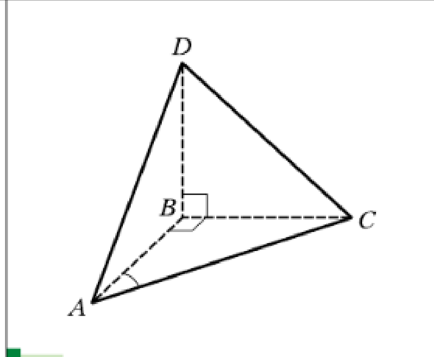


Рис. 14.14

Отрезок BC является проекцией наклонной AB на плоскость σ. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах получаем, что $BC \perp BD$. Следовательно, величина угла ABC является углом между плоскостями τ и σ. По условию $\angle ABC = \alpha$.

Отрезок DC является проекцией наклонной AD на плоскость σ. Следовательно, величина угла ADC является углом между прямой AD и плоскостью σ. По условию $\angle ADC = \gamma$.

Если точка D совпадает с точкой B, то $\beta = 90^\circ$ и $\alpha = \gamma$. Тогда доказываемое равенство является очевидным.

Рассмотрим случай, когда $0^\circ < \beta < 90^\circ$. Из ΔADC имеем: $\sin\gamma = \dfrac{AC}{AD}$. Из ΔABC имеем: $\sin\alpha = \dfrac{AC}{AB}$. Из ΔADB имеем: $\sin\beta = \dfrac{AB}{AD}$. Отсюда $\sin\gamma = \sin\alpha \sin\beta$. ■

Задача 5. Основанием треугольной пирамиды $DABC$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($AB = BC$). Известно, что треугольник ADC равносторонний и $DB \perp BC$. Найдите угол между плоскостями ACD и ABD.

Решение. Поскольку $CB \perp AB$ и $CB \perp DB$, то $CB \perp ABD$ (рис. 14.14). Тогда прямая AB является проекцией прямой AC на плоскость ABD. Следовательно, величина угла CAB — угол между прямой AC и плоскостью ABD. С учётом условия задачи можно записать: $\angle CAB = 45^\circ$, $\angle DAC = 60^\circ$.

Пусть величина искомого угла равна α. Поскольку $0^\circ < \alpha \leqslant 90^\circ$, то, найдя $\sin\alpha$, мы сможем найти сам угол α.

Для плоскостей ACD, ABD и прямой AC применим ключевую задачу 4. Имеем: $\sin 45^\circ = \sin\alpha \sin 60^\circ$. Отсюда $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ■

Задача 6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и A_1B_1C.

Решение. Поскольку $AD \perp DD_1C$, то $CD_1 \perp AD$ (рис. 14.15). Также $CD_1 \perp DC_1$ как диагонали квадрата. Следовательно, $CD_1 \perp AB_1C_1$. Аналогично можно доказать, что $AD_1 \perp A_1B_1C$. Тогда в силу ключевой задачи 3 получаем, что искомый угол равен величине угла AD_1C. Поскольку треугольник AD_1C равносторонний, то $\angle AD_1C = 60^\circ$.

Ответ: 60°. ■

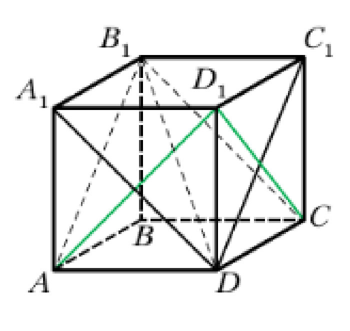


Рис. 14.15

Так, правильную призму и прямую треугольную призму можно описать около цилиндра.

В предыдущем параграфе мы определили площадь боковой поверхности цилиндра как площадь развёртки его боковой поверхности. Существуют и другие подходы к введению этого понятия.

Материал данного параграфа позволяет ввести понятие площади боковой поверхности цилиндра, используя рассуждения, аналогичные тем, которые применялись при введении понятия длины окружности.

Вы знаете, что длиной окружности называют предел последовательности периметров правильных многоугольников, вписанных в данную окружность, при неограниченном увеличении количества их сторон, т. е. $C = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$, где C — длина окружности, P_n — периметр правильного n-угольника.

На рисунке 8.4 изображены правильные призмы, вписанные в данный цилиндр. При неограниченном увеличении количества сторон оснований призм площади их боковых поверхностей будут как угодно мало отличаться от площади боковой поверхности цилиндра.

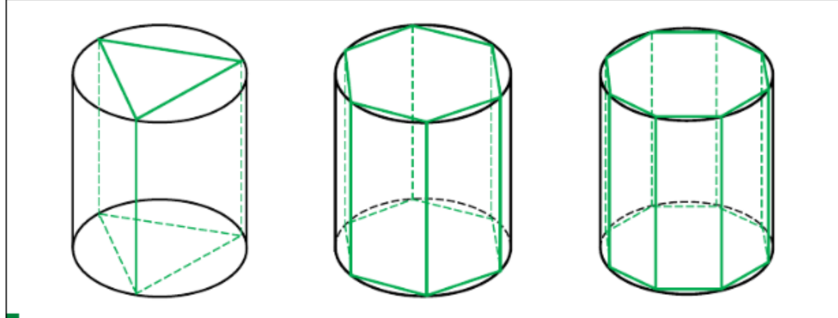


Рис. 8.4

Приведённые соображения показывают, что площадь $S_{\text{бок}}$ боковой поверхности цилиндра можно определить как предел последовательности S_n площадей боковых поверхностей правильных n-угольных призм, вписанных в данный цилиндр, т. е. $S_{\text{бок}} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Если образующая цилиндра равна h, а радиус основания цилиндра — r, то можно записать: $S_{\text{бок}} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} P_n h = h \lim\limits_{n\to\infty} P_n = h \cdot 2\pi r = 2\pi r h.$

Задача 1. В цилиндр, радиус основания которого равен 13 см, а высота 17 см, вписана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Основание призмы, четырёхугольник $ABCD$, является трапецией, в которой $BC \parallel AD$ и $BC = 10$ см, $AD = 24$ см. Найдите площадь четырёхугольника AB_1C_1D.

Решение. Четырёхугольник, площадь которого требуется найти, изображён на рисунке 8.5. Пусть точки O и O_1 — центры оснований цилиндра. Проведём через точку O высоту MN трапеции $ABCD$ (рис. 8.6). Поскольку трапеция вписана в окружность, то она является равнобокой. Поэтому прямая MN — ось симметрии трапеции, а точки M и N — середины оснований трапеции.

Проведём радиусы OA и OB основания цилиндра (см. рис. 8.6).

Из прямоугольных треугольников AOM и BON найдём отрезки OM и ON.

Имеем: $OM = \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$ (см);

$ON = \sqrt{BO^2 - BN^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$ (см). Тогда $MN = 17$ см.

Пусть точка N_1 — середина ребра B_1C_1 (рис. 8.7). Тогда $NN_1 \parallel BB_1$. Поскольку призма прямая, то отрезок NN_1 является высотой призмы, а значит, и высотой цилиндра. По условию $NN_1 = 17$ см. Получили, что в прямоугольном треугольнике MNN_1 равны катеты. Следовательно, $\angle NMN_1 = 45^\circ$.

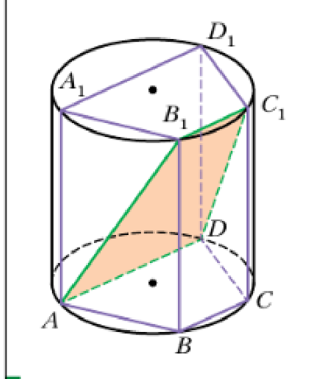


Рис. 8.5

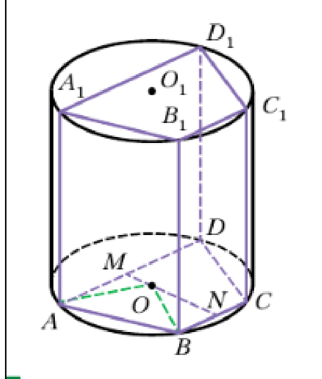


Рис. 8.6

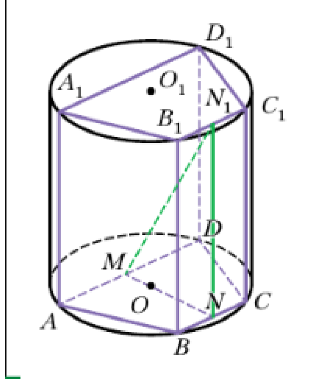


Рис. 8.7

Поскольку $NM \perp AD$ и прямая NM — проекция прямой MN_1 на плоскость основания призмы, то $MN_1 \perp AD$. Следовательно, угол NMN_1 — угол между плоскостями ABC и AB_1C_1.

Воспользовавшись теоремой о площади ортогональной проекции многоугольника, можно записать: $S_{AB_1C_1D} = \dfrac{S_{ABCD}}{\cos 45^\circ}$.

Имеем: $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot MN = 289$ (см²). Тогда $S_{AB_1C_1D} = 289\sqrt{2}$ см².

Пирамиду можно вписать в конус, если около основания этой пирамиды можно описать окружность, а вершина этой пирамиды проектируется в центр описанной окружности основания.

Определение

Пирамиду называют описанной около конуса, если её основание описано около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса (рис. 11.2). **При этом конус называют вписанным в пирамиду.**

Плоскости, содержащие боковые грани пирамиды, описанной около конуса, являются касательными плоскостями к конусу. Покажем это. Рассмотрим грань AKB пирамиды, описанной около конуса (рис. 11.3). Пусть ребро AB касается окружности основания конуса в точке M. Отрезок KM — образующая конуса.

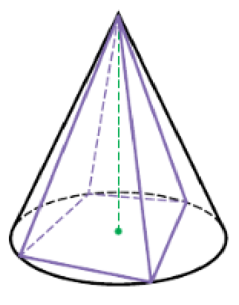


Рис. 11.1

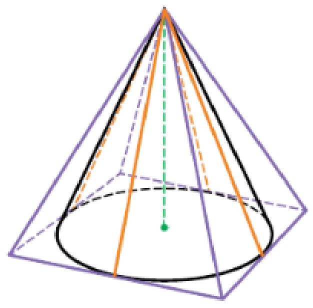


Рис. 11.2

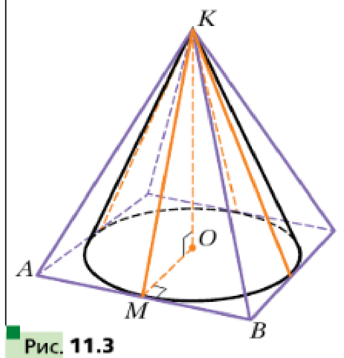


Рис. 11.3

Пусть точка O — центр основания конуса. Имеем: $AB \perp OM$ и $AB \perp KO$. Следовательно, $AB \perp OKM$. Тогда по признаку перпендикулярности плоскостей плоскость AKB перпендикулярна плоскости осевого сечения, проходящей через образующую KM. Отсюда следует, что плоскость AKB является касательной к конусу.

Боковая грань пирамиды, описанной около конуса, проходит через образующую конуса и других общих точек с конусом не имеет (на рисунке 11.2 эти образующие выделены оранжевым цветом). В этом случае говорят, что боковая грань пирамиды **касается** конуса.

Пирамиду можно описать около конуса, если в основание этой пирамиды можно вписать окружность, а вершина этой пирамиды проектируется в центр вписанной окружности основания.

Задача 2. В конус с вершиной K вписана треугольная пирамида $KABC$. Двугранные углы при рёбрах KA, KB и KC равны соответственно 60°, 90° и 120°. Найдите угол между плоскостью AKC и плоскостью, касающейся конуса по образующей KA (рис. 11.8).

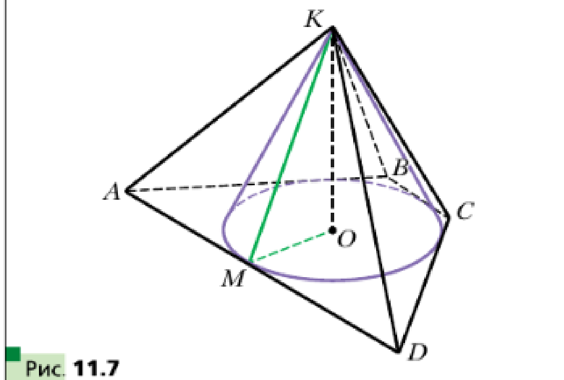


Рис. 11.7

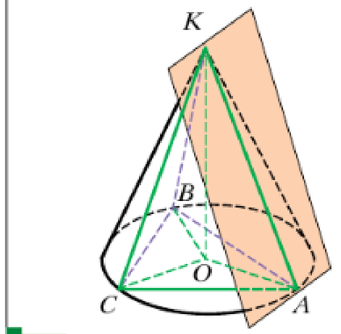


Рис. 11.8

Решение. Проведём высоту конуса KO. Рассмотрим пирамиду $KAOC$. Легко показать (сделайте это самостоятельно), что двугранные углы при рёбрах KA и KC равны. Пусть каждый из них равен α. Аналогично можно показать, что равны двугранные углы при рёбрах KA и KB пирамиды $KAOB$ (обозначим величины этих углов β) и двугранные углы при рёбрах KB и KC пирамиды $KBOC$ (обозначим величины этих углов γ). Тогда с учётом величин двугранных углов при рёбрах KA, KB и KC пирамиды $KABC$ можно записать такую систему:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 60^\circ, \\ \beta + \gamma = 90^\circ, \\ \gamma + \alpha = 120^\circ. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$ и $\gamma = 75^\circ$.

Поскольку касательная плоскость перпендикулярна плоскости KAO, то искомый угол равен $90^\circ - \alpha = 45^\circ$.

Ответ: 45°. ■

Теоретический материал

Определение

Многогранник называют вписанным в сферу, если все его вершины принадлежат сфере. При этом сферу называют описанной около многогранника.

Из определения следует, что если многогранник вписан в сферу, то центр сферы равноудалён от всех его вершин. Верно и обратное утверждение: *если для данного многогранника существует точка, равноудалённая от всех его вершин, то около этого многогранника можно описать сферу.*

Например, все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны, пересекаются в одной точке и этой точкой делятся пополам. Следовательно, точка пересечения диагоналей прямоугольного параллелепипеда равноудалена от всех его вершин. Значит, около этого многогранника можно описать сферу (рис. 14.1).

На рисунке 14.2 изображён тетраэдр $ABCD$, в котором $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$. Поскольку середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от его вершин, то середина ребра AB является точкой, равноудалённой от всех вершин тетраэдра $ABCD$, т. е. является центром сферы, описанной около данного тетраэдра.

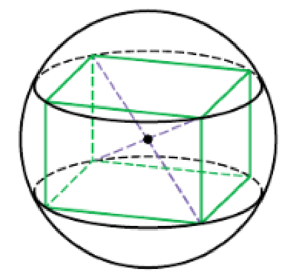


Рис. 14.1

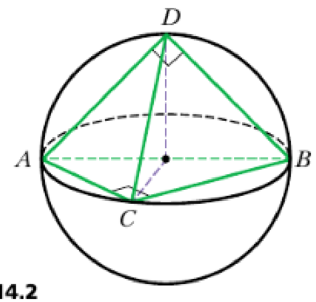


Рис. 14.2

Если многогранник вписан в сферу, то также говорят, что многогранник вписан в шар, ограниченный этой сферой. Например, можно сказать, что на рисунках 14.1 и 14.2 изображены соответственно прямоугольный параллелепипед и тетраэдр, вписанные в шар, или шар, описанный около каждого из указанных многогранников.

Если многогранник вписан в сферу, то плоскости его граней пересекают сферу по окружностям. Следовательно, *каждая грань многогран-*

Геометрическим местом точек, равноудалённых от концов отрезка, является плоскость, перпендикулярная отрезку и проходящая через его середину. Рассмотрим плоскость α, перпендикулярную боковому ребру SA и проходящую через его середину. Очевидно, что эта плоскость не параллельна прямой a и не содержит её. Пусть $a \cap \alpha = O$. Поскольку точка O равноудалена от всех вершин основания и $OS = OA$, то точка O равноудалена от всех вершин пирамиды, а значит, она является центром сферы, описанной около рассматриваемой пирамиды. ■

Из доказанного следует, что *около любого тетраэдра можно описать сферу.*

Также *сферу можно описать около правильной пирамиды. Центр описанной сферы принадлежит прямой, содержащей высоту правильной пирамиды.*

Задача 3. Докажите, что: 1) если около оснований усечённой пирамиды можно описать окружности и прямая, проходящая через центры этих окружностей, перпендикулярна основаниям, то такую усечённую пирамиду можно вписать в сферу; 2) центр сферы, описанной около усечённой пирамиды, принадлежит прямой, проходящей через центры окружностей, описанных около оснований усечённой пирамиды.

Докажите эти утверждения самостоятельно.

Центр окружности, описанной около многоугольника, может принадлежать многоугольнику, в частности лежать на стороне, а может и не принадлежать многоугольнику. Аналогичная ситуация возникает и в пространстве: центр сферы, описанной около многогранника, может ему принадлежать (рис 14.5), в частности лежать на грани (см. рис. 14.2), и может находиться вне многогранника (рис. 14.6).

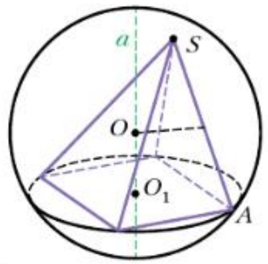


Рис. 14.5

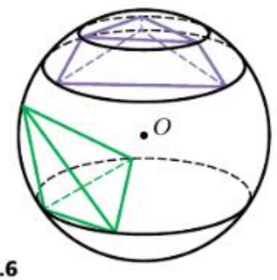


Рис. 14.6

Используя это утверждение, можно доказать (сделайте это самостоятельно), что в любом тетраэдре существует точка, равноудалённая от всех плоскостей, содержащих его грани. Следовательно, *в любой тетраэдр можно вписать сферу*.

Задача 1. Докажите, что если двугранные углы пирамиды при рёбрах её основания равны, то в такую пирамиду можно вписать сферу.

Решение. В курсе геометрии 10 класса было доказано, что если двугранные углы пирамиды при рёбрах её основания равны, то каждая точка высоты пирамиды равноудалена от плоскостей её боковых граней (рис. 15.2). Тогда точка пересечения биссектора двугранного угла при ребре основания с высотой пирамиды равноудалена от всех плоскостей, содержащих грани пирамиды. ■

Из доказанного следует, что *в любую правильную пирамиду можно вписать сферу. Центр вписанной сферы принадлежит высоте пирамиды*.

Заметим, что не во всякой пирамиде, в которую можно вписать сферу, равны двугранные углы при рёбрах основания. Действительно, примером такой пирамиды может служить тетраэдр, у которого не равны двугранные углы при рёбрах некоторой грани.

Задача 2. Докажите, что если в основание прямой призмы можно вписать окружность и высота призмы равна диаметру этой окружности, то в такую призму можно вписать сферу.

Решение. Пусть точки O_1 и O_2 — центры окружностей радиуса r, вписанных в основания прямой призмы (рис. 15.3). Прямая O_1O_2 параллельна плоскости каждой боковой грани призмы. Точка O_1 удалена от плоскости каждой боковой грани призмы на расстояние r. Следовательно, любая точка прямой O_1O_2 удалена от плоскостей боковых граней призмы на расстояние r. Поскольку $O_1O_2 = 2r$, то середина O отрезка O_1O_2 равноудалена от всех плоскостей граней призмы. ■

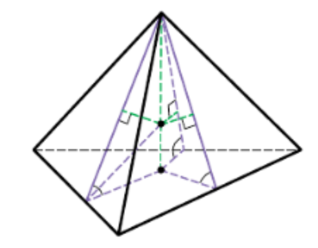


Рис. 15.2

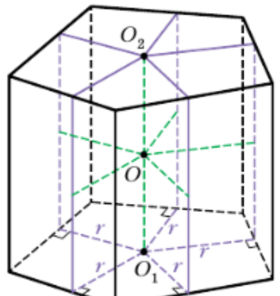


Рис. 15.3

Из доказанного следует, что *в правильную призму, высота которой равна диаметру окружности, вписанной в основание призмы, можно вписать сферу. Центр сферы является серединой отрезка, соединяющего центры оснований призмы*.

Справедливо и такое утверждение: *если в прямую призму можно вписать сферу, то в основание призмы можно вписать окружность радиусом, равным радиусу сферы, а высота призмы равна диаметру сферы*. Докажите это утверждение самостоятельно.

Заметим, что если в многогранник можно вписать сферу, то этот многогранник является выпуклым. Это следует из того очевидного факта, что сфера не может касаться граней двугранного угла, величина которого больше 180°. Однако если многогранник вписан в сферу, то это не означает, что он является выпуклым. Так, на рисунке 15.5 изображён невыпуклый многогранник, вписанный в сферу.

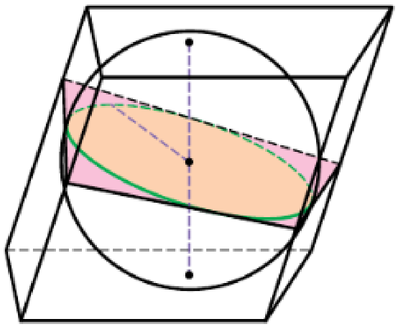


Рис. 15.4

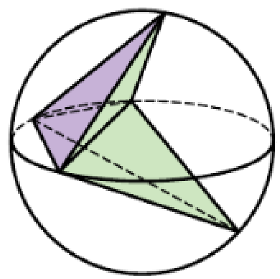


Рис. 15.5

§ 16 Тела вращения, вписанные в сферу

Теорема 16.1

Около любого цилиндра можно описать сферу, причём центр сферы — это середина отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра, а радиус сферы равен радиусу окружности, описанной около осевого сечения цилиндра.

Определение

Конус называют вписанным в сферу, если вершина конуса и окружность его основания принадлежат сфере (рис. 16.3). **При этом сферу называют описанной около конуса.**

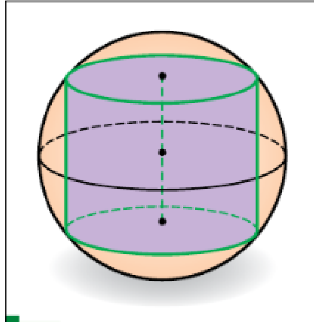


Рис. 16.1

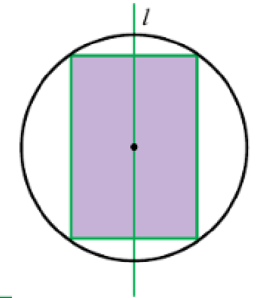


Рис. 16.2

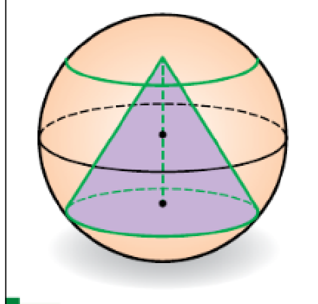


Рис. 16.3

Рассмотрим равнобедренный треугольник, около которого описана окружность. Прямая l, содержащая высоту треугольника, проведённую к основанию, является осью симметрии фигуры, изображённой на рисунке 16.4. Будем вращать треугольник вместе с описанной окружностью вокруг прямой l. В результате получим сферу, описанную около конуса.

Приведённые соображения являются иллюстрацией к следующей теореме.

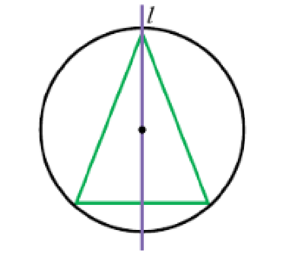


Рис. 16.4

Теорема 16.2

Около любого конуса можно описать сферу, причём центр описанной сферы принадлежит оси конуса, а радиус сферы равен радиусу окружности, описанной около осевого сечения конуса.

§ 17 Тела вращения, описанные около сферы

Теорема 17.1

Если осевым сечением цилиндра является квадрат, то в такой цилиндр можно вписать сферу, причём центр вписанной сферы — это середина отрезка, соединяющего центры оснований цилиндра, а радиус сферы равен радиусу основания цилиндра.

Определение

Конус называют описанным около сферы, если все образующие конуса и его основание касаются сферы (рис. 17.3). **При этом сферу называют вписанной в конус.**

Рассмотрим равнобедренный треугольник, в который вписана окружность. Прямая l, содержащая высоту треугольника, проведённую к основанию, является осью симметрии фигуры, изображённой на рисунке 17.4. Будем вращать равнобедренный треугольник вместе с вписанной в него окружностью вокруг прямой l. В результате получим сферу, вписанную в конус.

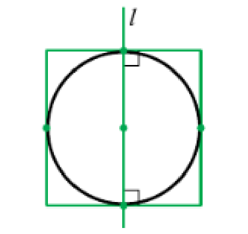


Рис. 17.2

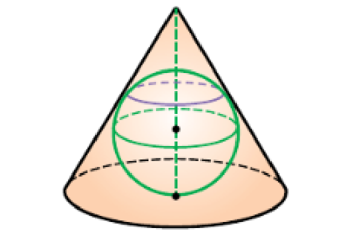


Рис. 17.3

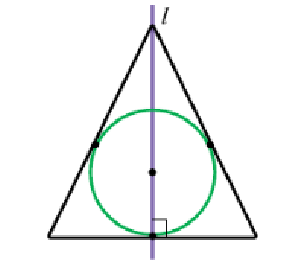


Рис. 17.4

Приведённые соображения являются иллюстрацией к следующей теореме.

Теорема 17.2

В любой конус можно вписать сферу, причём центр вписанной сферы принадлежит высоте конуса, а радиус сферы равен радиусу окружности, вписанной в осевое сечение конуса.

rosuchebnik.ru, росучебник.рф

Москва, Пресненская наб., д. 6, строение 2
+7 (495) 795 05 35, 795 05 45, info@rosuchebnik.ru

Нужна методическая поддержка?

Методический центр
8-800-2000-550 (звонок бесплатный)
metod@rosuchebnik.ru

Хотите купить?

Официальный интернет-магазин учебной литературы book24.ru

Цифровая среда школы
lecta.rosuchebnik.ru

Отдел продаж
sales@rosuchebnik.ru

Хотите продолжить общение?

youtube.com/user/drofapublishing

fb.com/rosuchebnik

vk.com/ros.uchebnik

ok.ru/rosuchebnik

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!