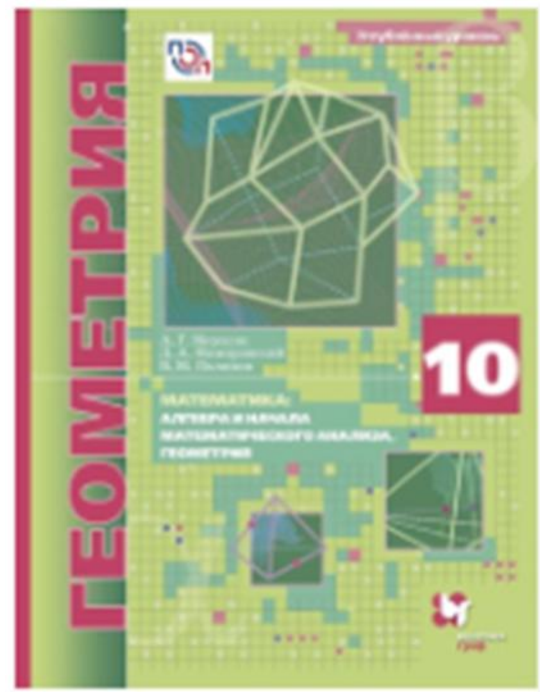
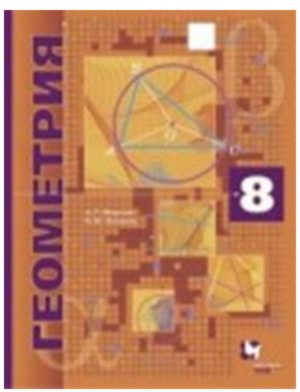
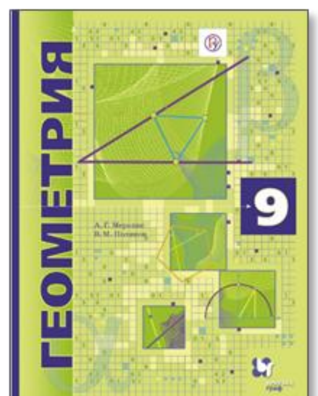
ОТ ОГЭ ДО ЕГЭ: ЛОГИЧЕСКАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ В ГЕОМЕТРИИ

Ким Н.А. учитель математики ГБОУ города Москвы «Школа №875»

Апробация учебников углубленного курса геометрии 10-11 в пилотной школе №875 города Москвы







ОГЭ. Математика. Задания повышенного и высокого уровней сложности (ФИПИ)
Автор книги: Крайнева Лариса Борисовна

Издательство: Бином

Пособие предназначено для подготовки к основному государственному экзамену по математике за курс основной школы. Издание включает разбор типовых экзаменационных заданий по математике II части в формате вариантов ОГЭ 2018 года. Пособие поможет школьникам проверить свои знания и умения по предмету, подготовиться к экзамену, а учителям - обеспечить плановую подготовку к экзамену.

Математика. Основной государственный экзамен. Готовимся к итоговой аттестации
Авторы/составители: Ященко И.В., Семенов А.В., Трепалин А.С.
Издательство: Интеллект-Центр

Издание включает типовые задания по всем содержательным линиям экзаменационной работы, а также 30 тренировочных вариантов в формате ОГЭ 2020 года.
Пособие поможет школьникам проверить свои знания и умения по предмету, а учителям — оценить степень достижения требований образовательных стандартов отдельными учащимися и обеспечить их целенаправленную подготовку к экзамену.

ОГЭ. Математика. Новый полный справочник для подготовки к ОГЭ
Авторы/составители: Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.
Издательство: АСТ

Новый справочник содержит весь теоретический материал по курсу математики, необходимый для сдачи основного государственного экзамена в 9 классе. Он включает в себя все элементы содержания, проверяемые контрольно-измерительными материалами, и помогает обобщить и систематизировать знания и умения за курс средней (полной) школы.
Теоретический материал изложен в краткой и доступной форме. Каждая тема сопровождается примерами тестовых заданий. Практические задания соответствуют формату ОГЭ. В конце пособия приведены ответы к тестам. Пособие адресовано школьникам и учителям.

ОГЭ. Математика. Разделы "Алгебра" и "Арифметика" на основном государственном экзамене
Авторы/составители: Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.

Справочник включает темы школьного курса математики по разделам «Арифметика» и «Алгебра» и соответствует современным образовательным стандартам и программам. Материал изложен сжато и системно: математические понятия, аксиомы, теоремы, свойства и т.д. Большое внимание уделяется практической части подготовки к экзамену. Для этого в справочник включены разборы типовых экзаменационных заданий, которые были на ОГЭ в последние годы, и заданий для отработки полученных знаний и навыков. В конце пособия даны ответы для самопроверки.

Математика. 9 класс. ОГЭ 2020. 30 тестов по новому плану (15 проверочных работ)
Редактор: Мальцев Д.А.
Издательство: Народное образование, НИИ школьных технологий

Данное пособие предназначено для подготовки к итоговой аттестации по математике в 9 классе. Оно содержит:
- 30 тестов по новому плану ОГЭ 2020;
- подборку дополнительных задач части 2.

Регулярные занятия по данному пособию позволят ученику не только успешно подготовиться к ОГЭ по математике в 9 классе, но также помогут развить математические навыки и существенно повысить уровень математической грамотности. А это, в свою очередь, окажет неоценимую помощь в дальнейшем обучении - вне зависимости от выбранного колледжа или ВУЗа и выбранной специальности.

ОГЭ 2019. По математике от А до Я. Модульный курс. Геометрия. ФГОС
Авторы/составители: Ященко И.В., Шестаков С.А.
Издательство: Московский центр непрерывного математического образования (МЦНМО)

Настоящее пособие является второй частью модульного курса «ОГЭ по математике от А до Я» и предназначено для подготовки к Основному государственному экзамену (ОГЭ) по математике, модуль «Геометрия». Пособие состоит из двух частей. Первая часть содержит описание типов и особенностей заданий демоверсии и открытого банка задач, методические рекомендации и примеры решения задач 15—20 и 24—26 модуля «Геометрия». Наряду с методическими рекомендациями и большим числом разобранных примеров она включает в себя 18 тренингов из 10 задач каждый: по два тренинга к каждому из перечисленных выше заданий модуля «Геометрия» ОГЭ по математике. Вторую часть пособия составили тренировочные варианты ОГЭ по математике (задания 15—20 и 24—26 модуля «Геометрия»).

ОГЭ-2019. Математика. 15 новых вариантов от "Просвещения". Учебное пособие

Авторы/составители: Семенов А.В., Ященко И.В., Высоцкий И.В., Трепалин А.С., Кукса Е.А.

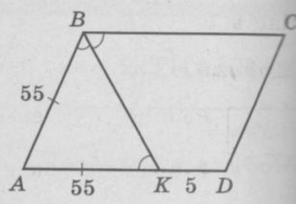
Издательство: Просвещение

Пособие содержит 15 вариантов типовых экзаменационных заданий по математике, составленных с учётом всех особенностей и требований основного государственного экзамена по математике. В пособие также включены тематические задания, сгруппированные в соответствии с заданиями ОГЭ за курс основной школы. Содержание пособия сформировано с использованием обновлённого открытого банка заданий. Пособие создано авторским коллективом из числа членов Федеральной комиссии по разработке контрольных измерительных материалов ОГЭ и экспертов ОГЭ по математике. В сборнике даны ответы на все задания вариантов. Приведён полный разбор и критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом. Кроме того, приведен лист достижений для выявления тем, требующих повторения.

https://uztest.ru -Подготовка к ЕГЭ по математике, варианты, тесты, конспекты по математике, алгебре, геометрии.

На сайте представлен список тестов для подготовки к ЕГЭ, ОГЭ, для контроля знаний по основным темам школьной математики.
Выбрав один из тестов сначала вы увидите шаблон, т. е. из каких заданий тест состоит и можете провести некоторые изменения: удалить некоторые задания, поменять порядок.
Внизу страницы есть кнопка "генерировать тест", по нажатии на которой программа по заданному составу создает тест, который можно решить и проверить, распечатать, вывести на экран электронной доски 2 варианта.

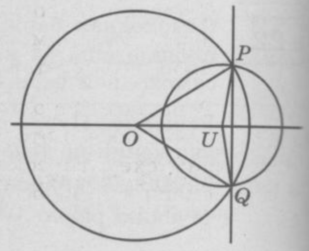
24 В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса BK, причём точка K лежит на стороне AD. Известно, что $AK = 55$, $KD = 5$. Найдите периметр параллелограмма.



Решение. Углы ABK и CBK равны по условию, углы CBK и AKB равны как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BK. Значит, треугольник ABK — равнобедренный, $AB = AK = 55$, а периметр параллелограмма равен $2 \cdot (55 + 60) = 230$.

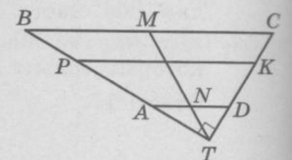
Ответ: 230.

25 Окружность с центром в точке O пересекает окружность с центром в точке U в двух точках: P и Q, причём прямая PQ не пересекает отрезок OU. Докажите, что прямые OU и PQ перпендикулярны.



Доказательство. Точки O и U равноудалены от точек P и Q, поскольку $OP = OQ$ и $UP = UQ$ как радиусы окружностей. Значит, каждая из точек O и U лежит на серединном перпендикуляре к отрезку PQ, следовательно, прямые OU и PQ перпендикулярны.

26 В трапеции $ABCD$ известно, что углы ABC и BCD равны 23 и 67 градусам соответственно. Точки M и N — середины оснований BC и AD соответственно. Средняя линия трапеции равна 32, а $MN = 20$. Найдите AD.



Решение. Продолжим боковые стороны BA и CD трапеции до их пересечения в точке T. Треугольник BCT прямоугольный, поскольку сумма его углов TBC и TCB равна $23° + 67° = 90°$, и, значит, угол T — прямой. Поэтому $TM = \frac{1}{2}BC$ (как медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла).

Аналогично $TN = \frac{1}{2}AD$, поскольку треугольник ATD прямоугольный.

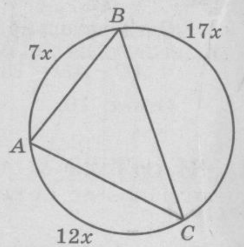
Таким образом, $MN = TM - TN = \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AD$. Средняя линия PK трапеции равна полусумме её оснований, поэтому $PK = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AD$.

Значит,

$$PK - MN = AD \text{ и } AD = 32 - 20 = 12.$$

Ответ: 12.

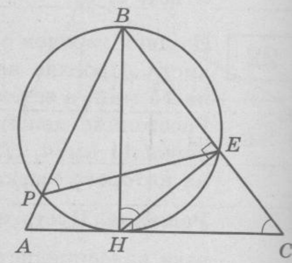
24 Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся как 7 : 12 : 17. Найдите радиус окружности, если вторая по длине сторона треугольника равна $8\sqrt{3}$.



Решение. Пусть ABC — данный треугольник, в котором $AB < AC < BC$. Обозначим в соответствии с условием градусные меры дуг, стягиваемых сторонами треугольника, через $7x$, $12x$ и $17x$. Тогда $7x + 12x + 17x = 36x = 360°$, откуда $x = 10°$, а $12x = 120°$. Значит, вторая по длине сторона AC треугольника стягивает дугу $120°$, а противолежащий ей вписанный угол ABC измеряется половиной этой дуги и равен $60°$. Искомый радиус R находим из теоремы синусов: $R = \dfrac{AC}{2\sin 60°} = \dfrac{8\sqrt{3}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8.$

Ответ: 8.

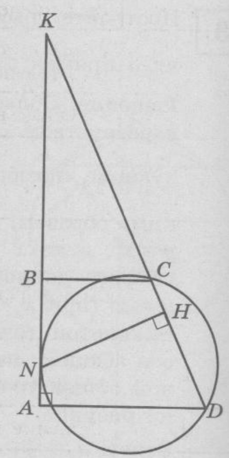
25 На высоте BH остроугольного треугольника ABC построена как на диаметре окружность, пересекающая стороны AB и BC в точках P и E соответственно. Докажите, что треугольники ABC и EBP подобны.



Доказательство. Треугольник BHC — прямоугольный, поэтому $\angle HBE = 90° - \angle ACB$. Поскольку BH — диаметр окружности, то и треугольник HBE — прямоугольный. Поэтому $\angle BHE = 90° - \angle HBE = \angle ACB$. Остаётся заметить, что углы BPE и BHE равны как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Значит, треугольники ABC и EBP подобны по двум углам.

26 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке N. Найдите площадь треугольника CND, если $AD = 8$, $BC = 7$, $CD = 10$.

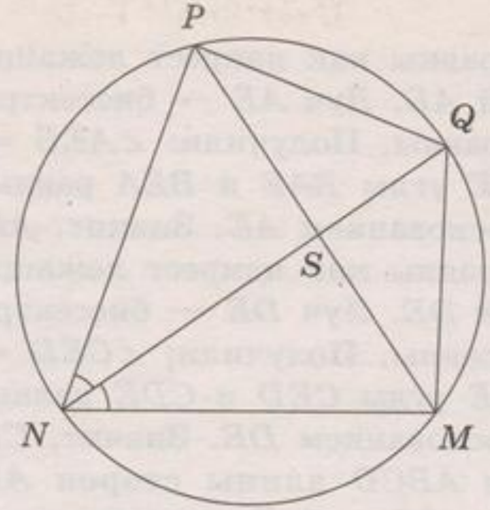
Решение. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке K, а NH — перпендикуляр, опущенный из точки N к прямой CD. Прямоугольные треугольники AKD и BKC подобны по острому углу, а значит, $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{KC + CD}{KC}$, откуда $KC = 70$. По теореме о касательной и секущей $KN^2 = KC \cdot KD$, $KN = 20\sqrt{14}$. Прямоугольные треугольники HKN и BKC подобны по острому углу, а значит, $\dfrac{NH}{KN} = \dfrac{BC}{KC}$, откуда $NH = 2\sqrt{14}$. Площадь треугольника CND равна $\dfrac{CD \cdot NH}{2} = 10\sqrt{14}$.



Ответ: $10\sqrt{14}$.

26 В выпуклом четырёхугольнике $NPQM$ диагональ NQ является биссектрисой угла PNM и пересекается с диагональю PM в точке S. Найдите NS, если известно, что около четырёхугольника $NPQM$ можно описать окружность, $PQ = 55$, $SQ = 1$.

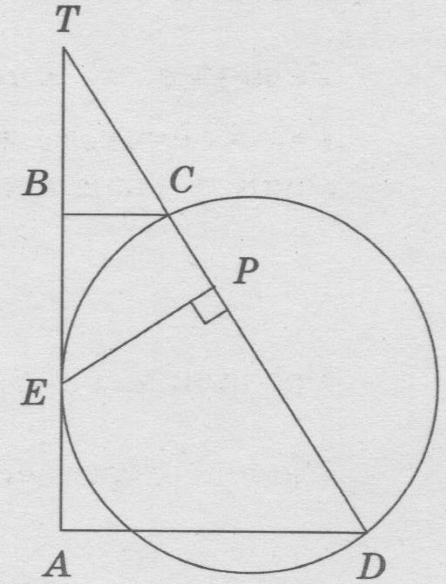
Решение. Поскольку диагональ NQ является биссектрисой угла PNM, $\angle PNQ = \angle MNQ$.



Около четырёхугольника $NPQM$ можно описать окружность, следовательно, углы MNQ и MPQ являются вписанными в эту окружность и опираются на одну и ту же дугу, значит, $\angle MNQ = \angle MPQ$.
Получили: $\angle QPS = \angle MNQ = \angle QNP$.
В треугольниках PQS и NQP углы QPS и QNP равны, а угол при вершине Q общий, следовательно, треугольники PQS и NQP подобны (по двум углам), поэтому $\dfrac{SQ}{PQ} = \dfrac{PQ}{QN}$.
По условию $PQ = 55$, $SQ = 1$, а $QN = QS + SN$, тогда $\dfrac{1}{55} = \dfrac{55}{SN + 1}$, откуда $NS = 3024$.

Ответ: $NS = 3024$.

26 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 8$, $BC = 4$.



Решение. Опустим перпендикуляр EP к стороне CD, и пусть прямые AB и CD пересекаются в точке T. Поскольку основания AD и BC трапеции параллельны, соответственные углы TBC и TAD равны, прямоугольные треугольники TBC и TAD с общим углом при вершине T подобны, следовательно, $\frac{TC}{TD} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}$, $TD = 2TC$.

Окружность касается прямой AB в точке E, следовательно, TE — касательная, а TD — секущая. По теореме о касательной и секущей

$$TE^2 = TD \cdot TC = 2TC^2, \text{ то есть } TE = \sqrt{2} \cdot TC.$$

Прямоугольные треугольники TPE и TBC с общим углом при вершине T подобны, значит, $\frac{TE}{TC} = \frac{PE}{BC}$, откуда

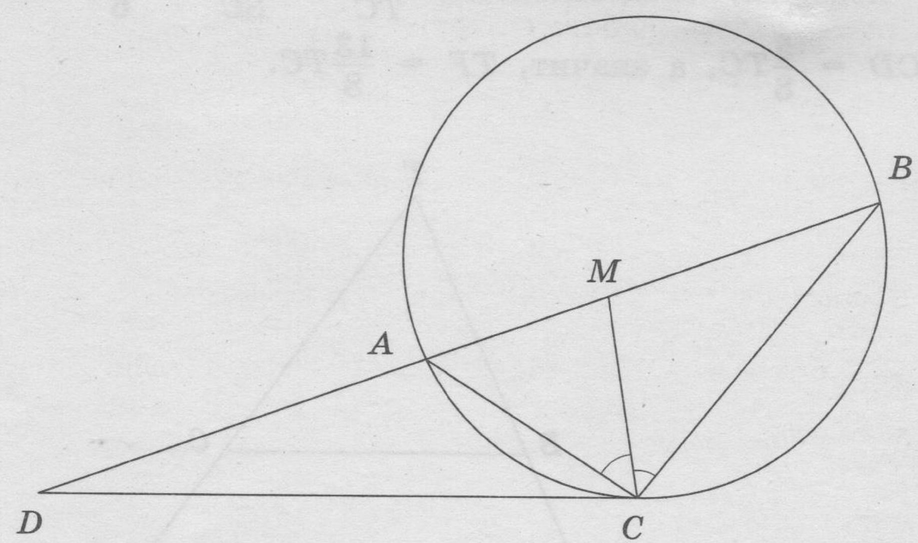
$$PE = \frac{TE \cdot BC}{TC} = \frac{\sqrt{2} \cdot TC \cdot BC}{TC} = \sqrt{2} \cdot BC = 4\sqrt{2}.$$

Ответ: $4\sqrt{2}$.

26 Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AM = 10$ и $MB = 18$. Касательная к описанной около треугольника ABC окружности проходит через точку C и пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD.

Решение. По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AM}{MB} = \frac{5}{9}.$$



Углы DCA и DBC равны по свойству угла между касательной и хордой (см. рис.). Следовательно, треугольники DAC и DCB с общим углом при вершине D подобны по двум углам. Значит,

$$\frac{BD}{CD} = \frac{CD}{AD} = \frac{CB}{AC} = \frac{9}{5};\ \frac{BD}{CD} = \frac{CD}{BD - 28} = \frac{9}{5};\ BD = \frac{9}{5}CD,$$

$$\frac{5}{9}CD = BD - 28,$$

откуда $\frac{5}{9}CD = \frac{9}{5}CD - 28$; $CD = 22{,}5$.

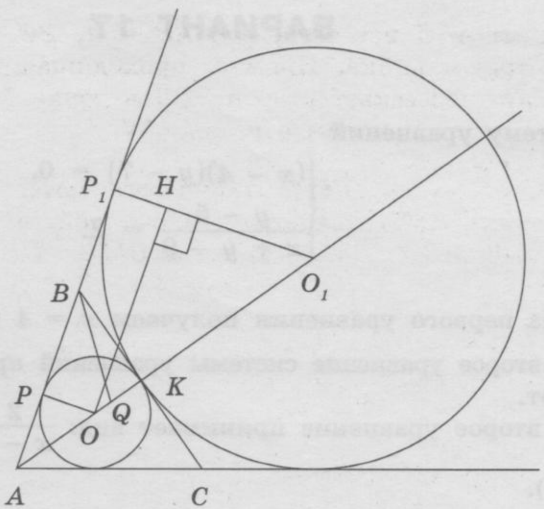
Ответ: $CD = 22{,}5$.

26 Две касающиеся внешним образом в точке K окружности, радиусы которых равны 6 и 24, касаются сторон угла с вершиной A. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку K, пересекает стороны угла в точках B и C. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение. Пусть малая окружность с центром O касается стороны угла AB в точке P; большая окружность с центром O_1 касается луча AB в точке P_1 (см. рис.). Малая и большая окружности касаются в точке K.
По теореме о равенстве отрезков касательных $BP = BK = BP_1$, $PP_1 = 2BK$.
Проведём радиусы OP и O_1P_1 и опустим перпендикуляр OH на O_1P_1.
В треугольнике OO_1H гипотенуза $OO_1 = 6 + 24 = 30$, а катет $O_1H = 24 - 6 = 18$, следовательно,

$$OH = \sqrt{OO_1^2 - O_1H^2} = \sqrt{30^2 - 18^2} = \sqrt{576} = 24.$$

Заметим, что PP_1HO — прямоугольник, значит, углы HOO_1 и BAK равны как соответственные при параллельных прямых AP_1 и OH и секущей AO_1, $OH = PP_1 = 2BK$, откуда $BK = 12$.



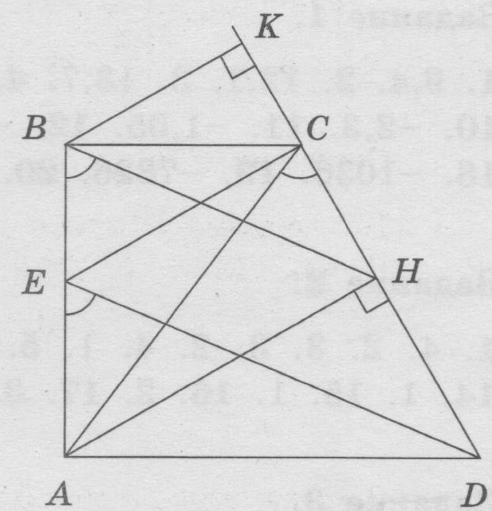
Прямоугольные треугольники ABK и OO_1H подобны, следовательно,

$$\frac{AK}{BK} = \frac{OH}{O_1H};\ AK = \frac{BK \cdot OH}{O_1H} = \frac{OH^2}{2O_1H} = \frac{576}{2 \cdot 18} = 16.$$

Пусть Q — центр окружности, описанной около треугольника ABC, R — её радиус. Точка Q лежит на отрезке AK.
В прямоугольном треугольнике BQK: $BK = 12$, $BQ = R$, $QK = AK - AQ = 16 - R$. По теореме Пифагора имеем: $12^2 + (16 - R)^2 = R^2$, откуда $R = 12{,}5$.

Ответ: 12,5.

26 В прямоугольной трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям, $AD > BC$. Из точки A на сторону CD опустили перпендикуляр AH. На стороне AB отмечена точка E так, что прямые CD и CE перпендикулярны, $\angle BCD = 120°$, $ED = 8$. Найдите BH.



Решение. Рассмотрим четырёхугольник $ABCH$. Поскольку $\angle ABC = \angle AHC = 90°$, около четырёхугольника $ABCH$ можно описать окружность. Вписанные в эту окружность углы ABH и ACH опираются на одну и ту же дугу, следовательно, $\angle ABH = \angle ACH$.

Рассмотрим четырёхугольник $AECD$.

Поскольку $\angle ECD = \angle EAD = 90°$, около четырёхугольника $AECD$ можно описать окружность. Вписанные в эту окружность углы ACD и AED опираются на одну и ту же дугу, следовательно, $\angle ACD = \angle AED$.

Рассмотрим прямые BH и ED и секущую AB. Поскольку $\angle ABH = \angle ACH = \angle ACD = \angle AED$, прямые BH и ED параллельны.

Опустим из точки B перпендикуляр BK на прямую CD. Треугольники BKH и ECD подобны, т. к. их соответственные стороны KH и CD лежат на одной прямой, а стороны BK и EC, BH и ED попарно параллельны.

Получаем, $\dfrac{BK}{EC} = \dfrac{BH}{ED}$.

В прямоугольном треугольнике BKC катет $BK = BC \cdot \sin 60°$.

В прямоугольном треугольнике BEC катет $BC = EC \cdot \cos 30°$.

Получаем, $BK = BC \cdot \sin 60° = EC \cdot \cos 30° \cdot \sin 60° = \dfrac{3}{4}EC$, тогда $\dfrac{BK}{EC} = \dfrac{3}{4}$.

Значит, $\dfrac{BH}{ED} = \dfrac{BK}{EC} = \dfrac{3}{4}$, откуда $BH = \dfrac{3ED}{4} = 6$.

Ответ: $BH = 6$.

ЗАДАНИЕ 26

1 В выпуклом четырёхугольнике $NPQM$ диагональ NQ является биссектрисой угла PNM и пересекается с диагональю PM в точке S. Найдите NS, если известно, что около четырёхугольника $NPQM$ можно описать окружность, $PQ = 55$, $SQ = 1$.

2 В выпуклом четырёхугольнике $NPQM$ диагональ NQ является биссектрисой угла PNM и пересекается с диагональю PM в точке S. Найдите NS, если известно, что около четырёхугольника $NPQM$ можно описать окружность, $PQ = 92$, $SQ = 16$.

3 В выпуклом четырёхугольнике $NPQM$ диагональ NQ является биссектрисой угла PNM и пересекается с диагональю PM в точке S. Найдите NS, если известно, что около четырёхугольника $NPQM$ можно описать окружность, $PQ = 81$, $SQ = 9$.

4 В выпуклом четырёхугольнике $NPQM$ диагональ NQ является биссектрисой угла PNM и пересекается с диагональю PM в точке S. Найдите NS, если известно, что около четырёхугольника $NPQM$ можно описать окружность, $PQ = 86$, $SQ = 43$.

5 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 8$, $BC = 4$.

6 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 6$, $BC = 5$.

7 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 20$, $BC = 15$.

8 В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 12$, $BC = 9$.

9 Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AM = 10$ и $MB = 18$. Касательная к описанной около треугольника ABC окружности проходит через точку C и пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD.

10 Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AM = 9$ и $MB = 12$. Касательная к описанной около треугольника ABC окружности проходит через точку C и пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD.

11 Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AM = 8$ и $MB = 13$. Касательная к описанной около треугольника ABC окружности проходит через точку C и пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD.

12 Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки $AM = 4$ и $MB = 9$. Касательная к описанной около треугольника ABC окружности проходит через точку C и пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD.

13 Две касающиеся внешним образом в точке K окружности, радиусы которых равны 6 и 24, касаются сторон угла с вершиной A. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку K, пересекает стороны угла в точках B и C. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

14 Две касающиеся внешним образом в точке K окружности, радиусы которых равны 36 и 45, касаются сторон угла с вершиной A. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку K, пересекает стороны угла в точках B и C. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

15 Две касающиеся внешним образом в точке K окружности, радиусы которых равны 36 и 48, касаются сторон угла с вершиной A. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку K, пересекает стороны угла в точках B и C. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

16 Две касающиеся внешним образом в точке K окружности, радиусы которых равны 38 и 46, касаются сторон угла с вершиной A. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку K, пересекает стороны угла в точках B и C. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Упражнения для повторения

1.29. В треугольнике ABC сторона AC равна 30 см. Медианы AM и CN соответственно равны 39 см и 42 см. Найдите площадь треугольника ABC.

1.30. Диагональ AC равнобокой трапеции $ABCD$ ($AB = CD$) делит угол BAD пополам (рис. 1.20). Точка E — середина отрезка AB. Прямая, проходящая через точку E параллельно основаниям трапеции, пересекает отрезок AC в точке K, а отрезок CD — в точке F. Найдите периметр трапеции $ABCD$, если $EK = 3$ см, $KF = 5$ см.

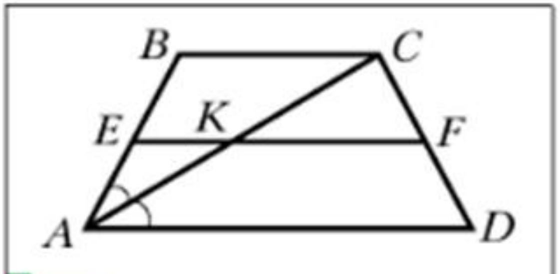


Рис. 1.20

Упражнения для повторения

3.42. Диагональ равнобокой трапеции разбивает её на два равнобедренных треугольника. Найдите углы трапеции.

3.43. Через точку пересечения медиан треугольника ABC параллельно стороне AC проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Найдите отношение площади треугольника EBF к площади треугольника ABC.

Упражнения для повторения

4.35. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AM и CK. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника MBK, если $AC = 4\sqrt{3}$ см и $\angle ABC = 30^\circ$.

4.36. Точка E — середина медианы BM треугольника ABC. Прямая AE пересекает сторону BC в точке K. Найдите отношение, в котором точка K делит отрезок BC, считая от вершины B.

Упражнения для повторения

5.55. В прямоугольном треугольнике ABC катет BC равен 7 см, а радиус описанной окружности — 9 см. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины острого угла B.

5.56. Боковые стороны прямоугольной трапеции относятся как 3 : 5, а разность оснований равна 16 см. Найдите площадь трапеции, если её меньшая диагональ равна 13 см.

Упражнения для повторения

6.46. Сумма диагоналей ромба равна 14 см, а его площадь — 24 см^2. Найдите сторону ромба.

6.47. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) медиана AM пересекает высоту CD в точке K. Найдите отношение $CK : KD$, если $\angle BAC = 60°$.

Упражнения для повторения

7.23. В трапеции $ABCD$ основания BC и AD равны соответственно 10 см и 35 см. Сумма углов A и D равна 90°, а высота трапеции равна 12 см. Найдите боковые стороны трапеции.

7.24. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CP. Найдите площадь треугольника BPK, если площадь треугольника ABC равна 16 см^2 и угол ABC равен 30°.

Упражнения для повторения

8.39. В прямоугольном треугольнике ABC катеты BC и AC равны соответственно 25 см и 60 см. Найдите биссектрису AK треугольника ABC.

8.40. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 2 см и 14 см. На сторонах AB и CD отметили точки M и K так, что отрезок MK параллелен основаниям трапеции и делит трапецию на две равновеликие части. Найдите отрезок MK.

Упражнения для повторения

9.23. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ равны соответственно 4 см и 10 см, $AD = 13$ см. Найдите периметр параллелограмма.

9.24. На стороне AC треугольника ABC отметили точку M так, что $AM : MC = 3 : 2$. На отрезке BM отметили точку K так, что $BK : KM = 4 : 1$. Прямая AK пересекает сторону BC в точке P. Найдите площадь треугольника ABP, если площадь треугольника ABC равна 34 см^2.

Упражнения для повторения

10.53. Окружность с центром на гипотенузе прямоугольного треугольника касается большего катета и проходит через вершину противолежащего острого угла. Найдите радиус окружности, если катеты равны 3 см и 4 см.

10.54. Биссектриса тупого угла ABC равнобокой трапеции $ABCD$ ($AB = CD$) пересекает основание AD в точке E. Известно, что $BE \perp AC$, а четырёхугольник $BCDE$ — параллелограмм. Найдите: 1) основание BC трапеции, если её периметр равен 40 см; 2) углы трапеции.

Упражнения для повторения

11.53. Основания трапеции равны 2 см и 18 см. В эту трапецию вписана окружность, и вокруг этой трапеции описана окружность. Найдите радиусы окружностей.

11.54. Боковая сторона равнобедренного треугольника делится точкой касания вписанной окружности в отношении 12 : 25, считая от вершины угла при основании треугольника. Найдите радиус вписанной окружности, если площадь треугольника равна 1680 см^2.

Упражнения для повторения

12.36. Точка M принадлежит гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC. Расстояния от точки M до катетов AC и BC равны соответственно 8 см и 4 см. Площадь треугольника ABC равна 100 см^2. Найдите катеты треугольника.

12.37. Диагонали равнобокой трапеции делят её острые углы пополам, а точкой пересечения делятся в отношении 5 : 13. Найдите площадь трапеции, если её высота равна 9 см.

Упражнения для повторения

13.43. Через точку A проведены прямые, касающиеся окружности радиусом 4 см в точках B и C. Угол BAC равен $60°$. Найдите площадь треугольника ABC.

13.44. Медианы треугольника равны 6 см, 10 см и $4\sqrt{5}$ см. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

Упражнения для повторения

14.53. Через середину диагонали AC прямоугольника $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD прямоугольника в точках M и K соответственно, $AC = 15$ см, $AK = 4$ см, $KD = 8$ см. Найдите площадь четырёхугольника $AMCK$.

14.54. Две стороны треугольника равны 15 см и 25 см, а медиана, проведённая к третьей стороне, — 16 см. Найдите третью сторону треугольника.

Упражнения для повторения

15.48. Диагональ равнобокой трапеции является биссектрисой её острого угла и перпендикулярна боковой стороне. Найдите площадь трапеции, если её меньшее основание равно a.

15.49. Найдите площадь ромба, сторона которого равна 15 см, а сумма диагоналей — 42 см.

Упражнения для повторения

16.28. В окружность вписан квадрат со стороной $6\sqrt{2}$ см. Найдите сторону правильного треугольника, описанного около этой окружности.

16.29. В треугольнике ABC известно, что $AB = 4$ см, $\angle BAC = 30^\circ$ и радиус описанной окружности равен 3 см. Докажите, что высота, проведённая к стороне AB, меньше 3 см.

Упражнения для повторения

17.31. В окружность вписаны две равнобокие трапеции с соответственно параллельными сторонами. Докажите, что диагональ одной из них равна диагонали другой трапеции.

17.32. Окружность, вписанная в треугольник, точкой касания делит одну из сторон на отрезки, равные 3 см и 4 см, а противолежащий этой стороне угол равен 120°. Найдите площадь треугольника.

Упражнения для повторения

18.17. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC и пересекающие прямые BC и AB в точках K и M соответственно. Найдите сторону AB, если $BM = 8$ см, $KC = 1$ см.

18.18. Стороны параллелограмма равны a и b, а диагонали — m и n. Докажите, что $a^4 + b^4 = m^2n^2$ тогда и только тогда, когда острый угол параллелограмма равен $45°$.

Упражнения для повторения

19.47. Одна окружность описана около равностороннего треугольника ABC, а вторая касается прямых AB и AC и первой окружности. Найдите отношение радиусов этих окружностей.

19.48. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов CAD и CBD пересекаются в точке, принадлежащей стороне CD. Докажите, что биссектрисы углов ACB и ADB пересекаются в точке, принадлежащей стороне AB.

Упражнения для повторения

20.31. Дан квадрат $ABCD$. Построена окружность с центром в вершине D, проходящая через вершины A и C. Через середину M стороны AB проведена касательная к этой окружности, пересекающая сторону BC в точке K. Найдите отношение $BK : KC$.

20.32. Основание равнобедренного треугольника равно 20 см, а боковая сторона — 30 см. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины угла при основании.

Упражнения для повторения

21.54. Стороны параллелограмма равны 3 см и 1 см, а угол между диагоналями равен 45°. Найдите площадь параллелограмма.

21.55. В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 25$ см, $AC = 14$ см. К окружности, вписанной в данный треугольник, проведена касательная, параллельная основанию AC и пересекающая стороны AB и BC в точках M и K соответственно. Найдите площадь треугольника MBK.

Упражнения для повторения

22.18. Центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, удалён от концов гипотенузы на $\sqrt{5}$ см и $\sqrt{10}$ см. Найдите катеты.

22.19. В треугольнике ABC биссектриса AD делит сторону BC в отношении $BD : DC = 2 : 1$. В каком отношении, считая от вершины A, медиана CE делит эту биссектрису?

Упражнения для повторения

23.29. В треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. В каком отношении, считая от вершины C, центр вписанной окружности треугольника делит биссектрису CD?

23.30. В треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $BC = a$ и $\angle ABC = 120°$. Найдите расстояние между основаниями высот треугольника, проведённых из вершин A и C.

Задание 26

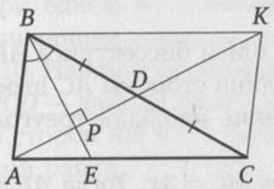
Краткие методические рекомендации

Последнее, 26-е задание ОГЭ по математике представляет собой планиметрическую задачу на вычисление, более сложную по сравнению с задачей 24. Последнюю можно рассматривать как своего рода подготовительную задачу: многие идеи и методы, необходимые для её решения, используются и при решении задания 26. Значительная часть задач связана с окружностью. Рассмотрим типичные примеры.

Треугольники

Пример 1. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 12. Найдите стороны треугольника ABC.

Решение. Пусть P — точка пересечения отрезков BE и AD (см. рисунок).



Треугольник ABD равнобедренный, так как его биссектриса BP является высотой. Поэтому

$$AP = PD = 6; \quad BC = 2BD = 2AB.$$

По свойству биссектрисы треугольника ABC имеем

$$\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB} = 2, \quad \text{откуда } AC = 3AE.$$

Проведём через вершину B прямую, параллельную AC. Пусть K — точка пересечения этой прямой с продолжением медианы AD. Тогда

$$BK = AC = 3AE.$$

Из подобия прямоугольных треугольников APE и KPB следует, что

$$\frac{PE}{BP} = \frac{AE}{BK} = \frac{1}{3}.$$

Поэтому $PE = 3$ и $BP = 9$. Следовательно,

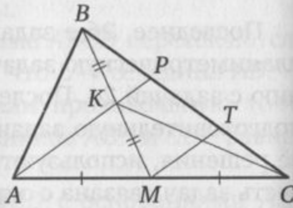
$$AB = \sqrt{AP^2 + BP^2} = 3\sqrt{13}; \quad BC = 2AB = 6\sqrt{13};$$

$$AE = \sqrt{AP^2 + EP^2} = 3\sqrt{5}; \quad AC = 3AE = 9\sqrt{5}.$$

Ответ. $3\sqrt{13}$; $6\sqrt{13}$; $9\sqrt{5}$.

Пример 2. Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника $KPCM$.

Решение. Проведём $MT \parallel AP$. Тогда MT — средняя линия треугольника APC и $CT = TP$, а KP — средняя линия треугольника BMT и $TP = BP$. Обозначим площадь треугольника BKP через S. Тогда площадь треугольника KPC, имеющего ту же высоту и вдвое большее основание, равна $2S$. Значит, площадь треугольника CBK равна $3S$ и равна площади треугольника CMK, которая в свою очередь равна площади треугольника AMK. Площадь треугольника ABK равна площади треугольника AMK. Итак,



$$S_{BKP} = S, \quad S_{KPC} = 2S, \quad S_{CMK} = 3S = S_{AMK} = S_{ABK}, \quad S_{KPCM} = 5S.$$

Значит, $S_{ABK} : S_{KPCM} = 3:5$.

Ответ. $3:5$.

Пример 3. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K, длина стороны AC втрое больше длины стороны AB. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади треугольника ABC.

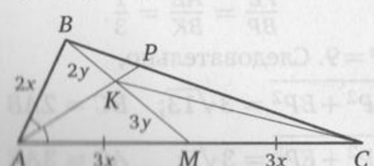
Решение. Пусть $AM = MC = 3x$. Тогда $AB = 2x$. Так как AK — биссектриса треугольника ABM, имеем $BK : KM = AB : AM = 2:3$, а так как AP — биссектриса треугольника ABC, имеем

$$BP : PC = AB : AC = 1:3.$$

Обозначим площадь треугольника BKP через S. Тогда площадь треугольника KPC, имеющего ту же высоту и втрое большее основание, равна $3S$. Значит, площадь треугольника CBK равна $4S$, а площадь треугольника CMK равна $6S$ и равна площади треугольника AMK. Тогда площадь треугольника ABK равна $4S$. Итак,

$$S_{BKP} = S, \quad S_{KPC} = 3S, \quad S_{CMK} = 6S = S_{AMK}, \quad S_{ABK} = 4S.$$

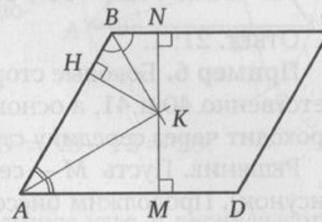
Значит, $S_{ABK} : S_{ABC} = (4S) : (20S) = 1:5$.



Ответ. $1:5$.

Пример 4. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 19$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 7.

Решение. Пусть KH, KN и KM — перпендикуляры, опущенные из точки K к сторонам AB, BC и AD соответственно (см. рисунок). Тогда $KM = KH = KN = 7$.



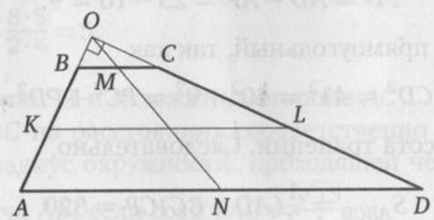
Кроме того, точки M, K и N лежат на одной прямой, и высота MN параллелограмма $ABCD$ равна $MK + KN = 14$. По формуле площади параллелограмма находим

$$S_{ABCD} = BC \cdot MN = 19 \cdot 14 = 266.$$

Ответ. 266.

Пример 5. Углы при одном из оснований трапеции равны $77°$ и $13°$, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 11 и 10. Найдите основания трапеции.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, AD — большее основание, K и L — середины сторон AB и CD соответственно. Сумма углов при одном из оснований равна $77° + 13° = 90°$, так что это большее основание AD.



Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке O (см. рисунок). Легко видеть, что

$$\angle AOD = 180° - (77° + 13°) = 90°.$$

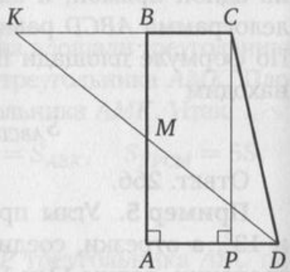
Пусть N — середина основания AD. Тогда $ON = \frac{AD}{2}$ — медиана прямоугольного треугольника AOD. Поскольку медиана ON делит пополам любой отрезок с концами на сторонах AO и DO треугольника AOD, параллельный стороне AD, она пересекает основание BC также в его середине M.

Значит, $OM = \frac{BC}{2}$. Таким образом, $MN = \frac{AD-BC}{2}$. Средняя линия KL трапеции при этом равна $\frac{AD+BC}{2}$. Получаем

$$AD = MN + KL = 11 + 10 = 21, \quad BC = KL - MN = 11 - 10 = 1.$$

Ответ. 21; 1.

Пример 6. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 40 и 41, а основание BC равно 16. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.



Решение. Пусть M — середина AB (см. рисунок). Продолжим биссектрису DM угла ADC до пересечения с продолжением основания BC в точке K. Поскольку

$$\angle CKD = \angle ADK = \angle CDK,$$

треугольник KCD равнобедренный, $KC = CD = 41$, тогда

$$KB = KC - BC = 41 - 16 = 25.$$

Из равенства треугольников AMD и BMK следует, что $AD = BK = 25$.

Проведём через вершину C прямую, параллельную стороне AB, до пересечения с основанием AD в точке P, и тогда

$$PD = AD - AP = 25 - 16 = 9.$$

Треугольник CPD прямоугольный, так как

$$CD^2 = 41^2 = 40^2 + 9^2 = PC^2 + PD^2.$$

Поэтому CP — высота трапеции. Следовательно,

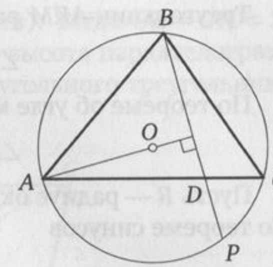
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC)CP = 820.$$

Ответ. 820.

Окружности

Пример 7. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 84$, $AC = 98$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD, перпендикулярная прямой AO, пересекает сторону AC в точке D. Найдите CD.

Решение. Пусть продолжение отрезка BD за точку D пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке P (см. рисунок). Тогда хорда BP перпендикулярна радиусу OA этой окружности.



Значит, точка A — середина дуги BP, не содержащей вершину C. Отсюда следует, что

$$\angle ABD = \angle ABP = \angle ACB$$

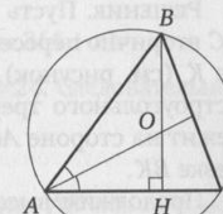
(как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги). Поэтому треугольники ABD и ACB подобны по двум углам (угол A общий).

Следовательно, $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$, откуда

$$AD = \frac{AB^2}{AC} = 72; \quad CD = AC - AD = 98 - 72 = 26.$$

Ответ. 26.

Пример 8. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $5:3$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 8$.

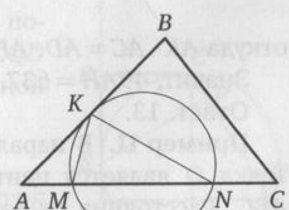


Решение. Пусть BH — высота треугольника, которую биссектриса пересекает в точке O (см. рисунок).

По теореме о биссектрисе в треугольнике ABH имеем $\frac{BA}{AH} = \frac{BO}{OH} = \frac{5}{3}$. Следовательно, $\cos A = \frac{AH}{AB} = \frac{3}{5}$. Тогда $\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$. По теореме синусов для треугольника ABC искомый радиус равен $\frac{BC}{2\sin A} = \frac{8 \cdot 5}{2 \cdot 4} = 5$.

Ответ. 5.

Пример 9. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$.



Решение. Пусть K — точка касания окружности с лучом AB (см. рисунок). По теореме о касательной и секущей

$$AK^2 = AM \cdot AN = 4 \cdot 15 = 60.$$

По теореме косинусов

$$KM^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK \cos\angle BAC =$$

$$= 16 + 60 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{60} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 16.$$

Значит, $KM = 4$.

Треугольник AKM равнобедренный, поэтому

$$\angle AKM = \angle KAM = \angle BAC.$$

По теореме об угле между касательной и хордой

$$\angle KNM = \angle AKM = \angle BAC.$$

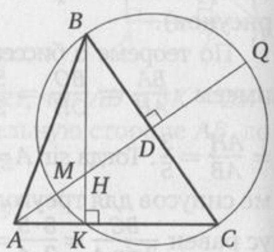
Пусть R — радиус окружности, проходящей через точки M, N и K. По теореме синусов

$$R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM} = \frac{4}{2\sqrt{1-\frac{15}{16}}} = 8.$$

Ответ. 8.

Пример 10. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 49$, $MD = 42$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Решение. Пусть окружность с диаметром BC вторично пересекается с прямой AC в точке K (см. рисунок). Поскольку BK — высота остроугольного треугольника ABC, точка K лежит на стороне AC, а точка H лежит на отрезке BK.



Продолжим высоту AD за точку D до пересечения с окружностью в точке Q. Тогда $DQ = MD = 42$. По следствию из теоремы о касательной и секущей

$$AK \cdot AC = AM \cdot AQ = 7 \cdot 91 = 637.$$

Из подобия прямоугольных треугольников AKH и ADC следует, что

$$\frac{AK}{AH} = \frac{AD}{AC},$$

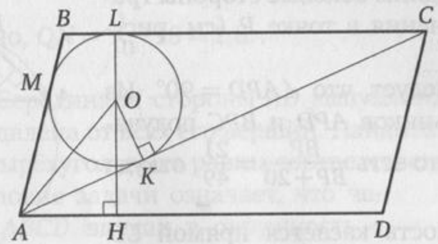
откуда $AK \cdot AC = AD \cdot AH = 49AH$.

Значит, $49AH = 637$. Следовательно, $AH = 13$.

Ответ. 13.

Пример 11. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC. Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC. Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 5, 4 и 3. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

Решение. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC в точках M, L и K соответственно (см. рисунок), H — проекция точки O на прямую AD (точка H может лежать либо на стороне AD, либо на её продолжении). Тогда $OL = OK = 3$, точки O, L и H лежат на одной прямой, HL — высота параллелограмма $ABCD$, $HL = OL + OH = 3 + 4 = 7$. Из прямоугольного треугольника AOK находим, что $AK = \sqrt{OA^2 - OK^2} = 4$.



Пусть p и S — полупериметр и площадь треугольника ABC, $r = 3$ — радиус окружности, вписанной в него. Обозначим $BC = x$. Тогда

$$p = AK + CL + BL = AK + BC = 4 + x,$$

$$S = \frac{1}{2}BC \cdot HL = \frac{1}{2}x \cdot 7 = 3{,}5x, \qquad S = p \cdot r = 3(4 + x).$$

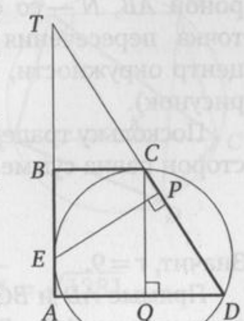
Из уравнения $3{,}5x = 3(4 + x)$ находим, что $BC = x = 24$. Следовательно,

$$S_{ABCD} = 2S = 2pr = 168.$$

Ответ. 168.

Пример 12. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 14$, $BC = 12$.

Решение. Пусть T — точка пересечения прямых AB и CD, P — проекция точки E на прямую CD, Q — проекция точки C на прямую AD (см. рисунок). Обозначим $CD = x$.



Поскольку $QD = AD - AQ = AD - BC = 2$, из подобия прямоугольных треугольников TBC и CQD находим, что $TC = 6x$. По теореме о касательной и секущей

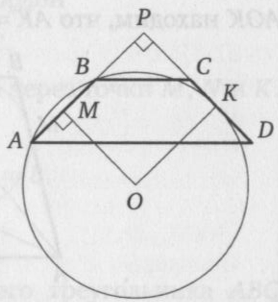
$$TE^2 = TD \cdot TC = 42x^2.$$

Из подобия прямоугольных треугольников TPE и TBC имеем

$$EP = \frac{BC \cdot TE}{TC} = \frac{12 \cdot x\sqrt{42}}{6x} = 2\sqrt{42}.$$

Ответ. $2\sqrt{42}$.

Пример 13. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 49 и 21, а сумма углов при основании AD равна 90°. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD, если $AB=20$.



Решение. Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке P (см. рисунок).

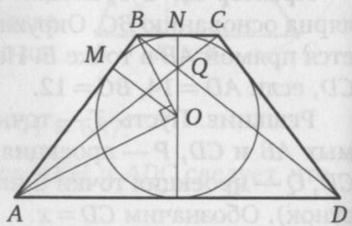
Из условия следует, что $\angle APD = 90°$. Из подобия треугольников APD и BPC получаем, что $\frac{BP}{AP} = \frac{BC}{AD}$, то есть $\frac{BP}{BP+20} = \frac{21}{49}$, откуда $BP = 15$.

Пусть окружность касается прямой CD в точке K, а O — её центр. Опустим из точки O перпендикуляр OM на хорду AB. Точка M — середина AB. Так как $OMPK$ — прямоугольник, находим искомый радиус:

$$OK = MP = BP + \frac{1}{2}AB = 15 + 10 = 25.$$

Ответ. 25.

Пример 14. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 120, а площадь равна 540, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.



Решение. Пусть BC — меньшее основание, AB — боковая сторона, AD — большее основание трапеции $ABCD$, M — точка касания окружности со стороной AB, N — со стороной BC, Q — точка пересечения диагоналей, O — центр окружности, r — её радиус (см. рисунок).

Поскольку трапеция описана около окружности, сумма её боковых сторон равна сумме оснований и равна 60, поэтому $AB = CD = 30$ и

$$S_{ABCD} = 2r \cdot \frac{AD+BC}{2} = 60r.$$

Значит, $r = 9$.

Прямые AD и BC параллельны. Значит, $\angle ABC + \angle BAD = 180°$. Поскольку лучи AO и BO — биссектрисы углов BAD и ABC соответственно, получаем $\angle ABO + \angle BAO = 90°$. Значит, треугольник AOB прямоугольный, а OM — его высота, опущенная на гипотенузу, поэтому

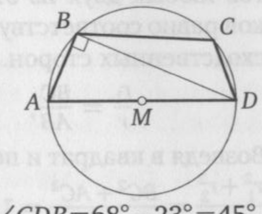
$$AM \cdot MB = OM^2 = r^2; \quad AM(AB - AM) = r^2; \quad AM(30 - AM) = 81.$$

Учитывая, что $AM > BM$, из этого уравнения находим, что $AM = 27$. Тогда $AD = 54$, $BC = 6$. Треугольник AQD подобен треугольнику CQB с коэффициентом подобия 9, значит, высота QN треугольника BQC составляет $\frac{1}{10}$ высоты трапеции, то есть диаметра вписанной в неё окружности.

Следовательно, $QN = \frac{1}{10} \cdot 18 = 1{,}8$.

Ответ. 1,8.

Пример 15. Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 10$, а углы B и C четырёхугольника равны соответственно 112° и 113°.



Решение. Условие задачи означает, что четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром M, а AD — её диаметр (см. рисунок).

Так как сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180°, получаем, что $\angle DAB = 67°$ и $\angle ADC = 68°$.

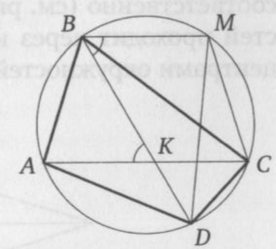
Угол ABD прямой, так как он опирается на диаметр, поэтому $\angle ADB = 90° - 67° = 23°$, откуда $\angle CDB = 68° - 23° = 45°$.

По теореме синусов для треугольника CDB получаем

$$AD = \frac{BC}{\sin 45°} = 10\sqrt{2}.$$

Ответ. $10\sqrt{2}$.

Пример 16. Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 25$ и $CD = 16$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K, причём $\angle AKB = 60°$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.



Решение. Через точку B проведём хорду BM, параллельную диагонали AC (см. рисунок). Тогда

$$CM = AB = 25, \quad \angle DBM = \angle AKB = 60°.$$

Поскольку четырёхугольник $BMCD$ вписанный, получаем

$$\angle DCM = 180° - \angle DBM = 180° - 60° = 120°.$$

По теореме косинусов

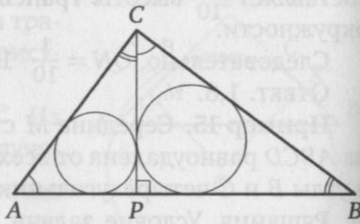
$$DM = \sqrt{CM^2 + CD^2 - 2CM \cdot CD \cos \angle DCM} = \sqrt{1281}.$$

По теореме синусов радиус окружности равен

$$\frac{DM}{2\sin \angle DBM} = \frac{\sqrt{1281}}{\sqrt{3}} = \sqrt{427}.$$

Ответ. $\sqrt{427}$.

Пример 17. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP. Радиус окружности, вписанной в треугольник BCP, равен 8, тангенс угла BAC равен $\frac{4}{3}$. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.



Решение. Обозначим радиусы вписанных окружностей треугольников ABC, BCP и ACP через r, r_1 и r_2 соответственно. Треугольники ABC, CBP и ACP подобны по двум углам. Поэтому отношение сходственных элементов любых двух из этих треугольников равно соответствующему коэффициенту подобия, т. е. отношению сходственных сторон. Значит,

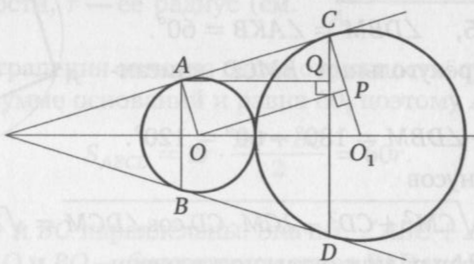
$$\frac{r_1}{r} = \frac{BC}{AB}, \quad \frac{r_2}{r} = \frac{AC}{AB}, \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg}(\angle BAC) = \frac{4}{3}.$$

Возведя в квадрат и почленно сложив два первых равенства, получим $\frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = 1$, откуда $r^2 = r_1^2 + r_2^2$. Но $\frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{3}$, следовательно, $r_2 = \frac{3}{4} r_1 = 6$. Тогда $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Ответ. 10.

Пример 18. Окружности радиусов 25 и 100 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D — на второй. При этом AC и BD — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

Решение. Пусть O и O_1 — центры первой и второй окружностей соответственно (см. рисунок). Линия центров касающихся окружностей проходит через их точку касания, поэтому расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов, то есть 125.



Опустим перпендикуляр OP из центра меньшей окружности на радиус O_1C второй окружности. Тогда

$$O_1P = O_1C - PC = O_1C - OA = 100 - 25 = 75.$$

Из прямоугольного треугольника OPO_1 находим, что $OP^2 = 10000$, а так как четырёхугольник $AOPC$ — прямоугольник, $AC = OP = 100$.

Опустим перпендикуляр AQ из точки A на прямую CD, тогда

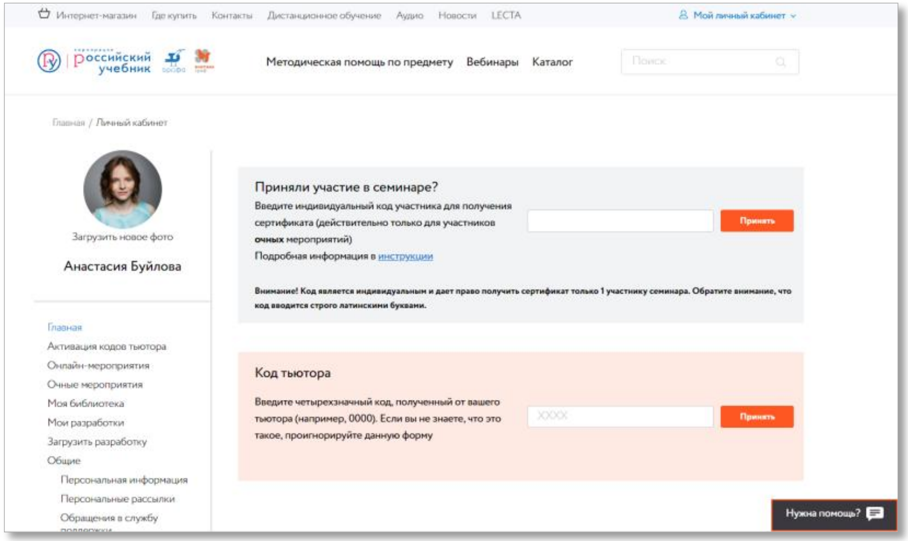
$$\angle O_1OP = 90^\circ - \angle OO_1P = \angle O_1CD = 90^\circ - \angle ACQ = \angle CAQ.$$

Прямоугольные треугольники AQC и OPO_1 подобны по двум углам, поэтому $\frac{AQ}{AC} = \frac{OP}{OO_1}$. Следовательно, $AQ = \frac{OP \cdot AC}{OO_1} = \frac{OP^2}{OO_1} = 80$.

Ответ. 80.

РЕГИСТРИРУЙТЕСЬ НА САЙТЕ ROSUCHEBNIK.RU И ПОЛЬЗУЙТЕСЬ ПРЕИМУЩЕСТВАМИ ЛИЧНОГО КАБИНЕТА

- Регистрируйтесь на очные и онлайн-мероприятия
- Получайте сертификаты за участие в вебинарах и конференциях
- Пользуйтесь цифровой образовательной платформой LECTA
- Учитесь на курсах повышения квалификации
- Скачивайте рабочие программы, сценарии уроков и внеклассных мероприятий, готовые презентации и многое другое
- Создавайте собственные подборки интересных материалов
- Участвуйте в конкурсах, акциях и спецпроектах
- Становитесь членом экспертного сообщества
- Сохраняйте архив обращений в службу техподдержки
- Управляйте новостными рассылками



rosuchebnik.ru, росучебник.рф

Москва, Пресненская наб., д. 6, строение 2
+7 (495) 795 05 35, 795 05 45, info@rosuchebnik.ru

Нужна методическая поддержка?

Методический центр
8-800-2000-550 (звонок бесплатный)
metod@rosuchebnik.ru

Хотите купить?

Официальный интернет-магазин учебной литературы book24.ru

Цифровая среда школы
lecta.rosuchebnik.ru

Отдел продаж
sales@rosuchebnik.ru

Хотите продолжить общение?

youtube.com/user/drofapublishing

fb.com/rosuchebnik

vk.com/ros.uchebnik

ok.ru/rosuchebnik

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!