корпорация российский учебник

LECTA

ИЗМЕНЕНИЯ В ФПУ. ЛИНИЯ УМК МЕРЗЛЯК А.Г., ПОЛОНСКИЙ В.Б., ЯКИР М.С. ПО АЛГЕБРЕ И ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ 10-11 КЛАССОВ.

Методист по математике
Сунцова Светлана Владимировна
Suntsova.SV@rosuchebnik.ru

ОПУБЛИКОВАН ПРИКАЗ №632 ОБ ИЗМЕНЕНИЯХ ФПУ

https://docs.edu.gov.ru/document/444714232cf3aff28e7b363309aa7fcb/download/2549/

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
(МИНПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИИ)

ПРИКАЗ

« 22 » ноября 2019 г. № 632

Москва

О внесении изменений в федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования, сформированный приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 28 декабря 2018 г. № 345

УМК ПО МАТЕМАТИКЕ КОРПОРАЦИИ «РОССИЙСКИЙ УЧЕБНИК»

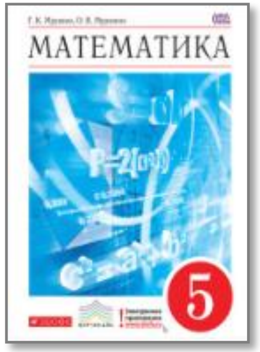
Линия УМК Мерзляка А.Г.

Линия УМК Г.К.Муравина, О.В.Муравиной

ОСНОВНАЯ ШКОЛА

ФП 1.2.4.1.8.1.1

ФП 1.2.4.1.8.2.1



Учебные пособия

Учебные пособия

Учебники ФП 2019

УМК ПО АЛГЕБРЕ КОРПОРАЦИИ «РОССИЙСКИЙ УЧЕБНИК»

	Линия УМК Мерзляка А.Г., Полонского В.Б., Якира М.С. (базовый уровень)	Линия УМК Мерзляка А.Г., Полякова В.М. (углубленный уровень)	Линия УМК Г.К.Муравина, К.С.Муравина, О.В.Муравиной (базовый уровень)	Линия УМК Г.К.Муравина, О.В.Муравиной (базовый и углубленный уровни)
ОСНОВНАЯ ШКОЛА	 ФП 1.2.4.2.6.1-3	 ФП 1.2.4.2.7.1-3	 Учебные пособия	
СТАРШАЯ ШКОЛА	НОВИНКА  ФП 1.3.4.1.17.1-2	НОВИНКА  ФП 1.3.4.2.5.1-2		 ФП 1.3.4.1.10.1-2  ФП 1.3.4.2.2.1-2

Учебные пособия

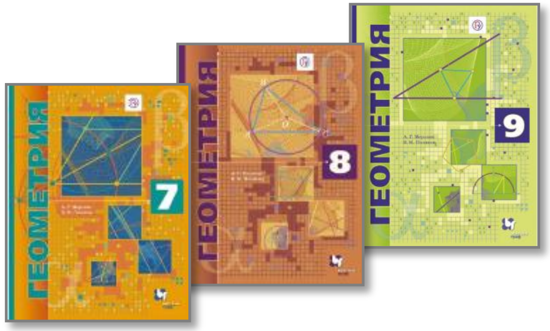
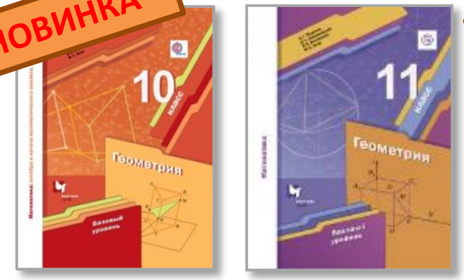
Учебники ФП 2019

корпорация российский учебник

дрофа

вентана граф

УМК ПО ГЕОМЕТРИИ КОРПОРАЦИИ «РОССИЙСКИЙ УЧЕБНИК»

	Линия УМК Мерзляка А.Г., Полонского В.Б., Якира М.С. (базовый уровень)	Линия УМК Мерзляка А.Г., Полякова В.М. (углублённый уровень)	Линия УМК Шарыгина И.Ф	Линия УМК Потоскуева Е.В., Звавича Л.И. (базовый и углублённый уровни)
ОСНОВНАЯ ШКОЛА	 ФП 1.2.4.3.5.1-3.1	 ФП 1.2.4.3.6.1-3.1	 ФП 2.2.4.1.6.1  ФП 1.2.4.3.9.1	
СТАРШАЯ ШКОЛА	НОВИНКА  ФП 1.3.4.1.18.1-2	НОВИНКА  ФП 1.3.4.2.6.1-2	 ФП 1.3.4.1.16.1	  ФП 1.3.4.2.3.1-2

Учебные пособия

Учебники ФП 2019

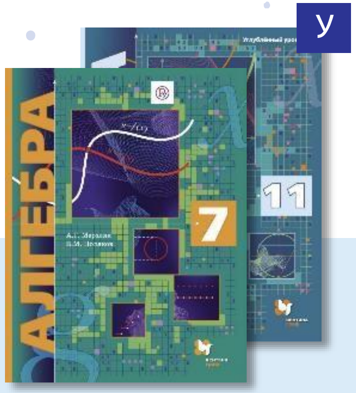
корпорация российский учебник дрофа вентана граф

ЛИНИЯ УМК ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ 5-11 КЛАССОВ МЕРЗЛЯКА А.Г., ПОЛОНСКОГО В.Б. И ДР.

СТАРШАЯ ШКОЛА ВОШЛА В ФПУ

Математика
5-6 классы

Алгебра 7-11 кл.



Алгебра 7-11 кл.

Геометрия 7-11 кл.

Геометрия 7-11 кл.

Уникальная единая линия по математике, алгебре и геометрии с 5 по 11 класс, обеспечивающая достижение высокого образовательного результата

Преимущества:

- Богатый задачный материал разного уровня сложности позволяет реализовать принципы уровневой дифференциации и индивидуального подхода в обучении, подготовиться к сдаче ЕГЭ
- Доступное изложение теоретического материала
- Сочетание традиционной методики и современных подходов в обучении

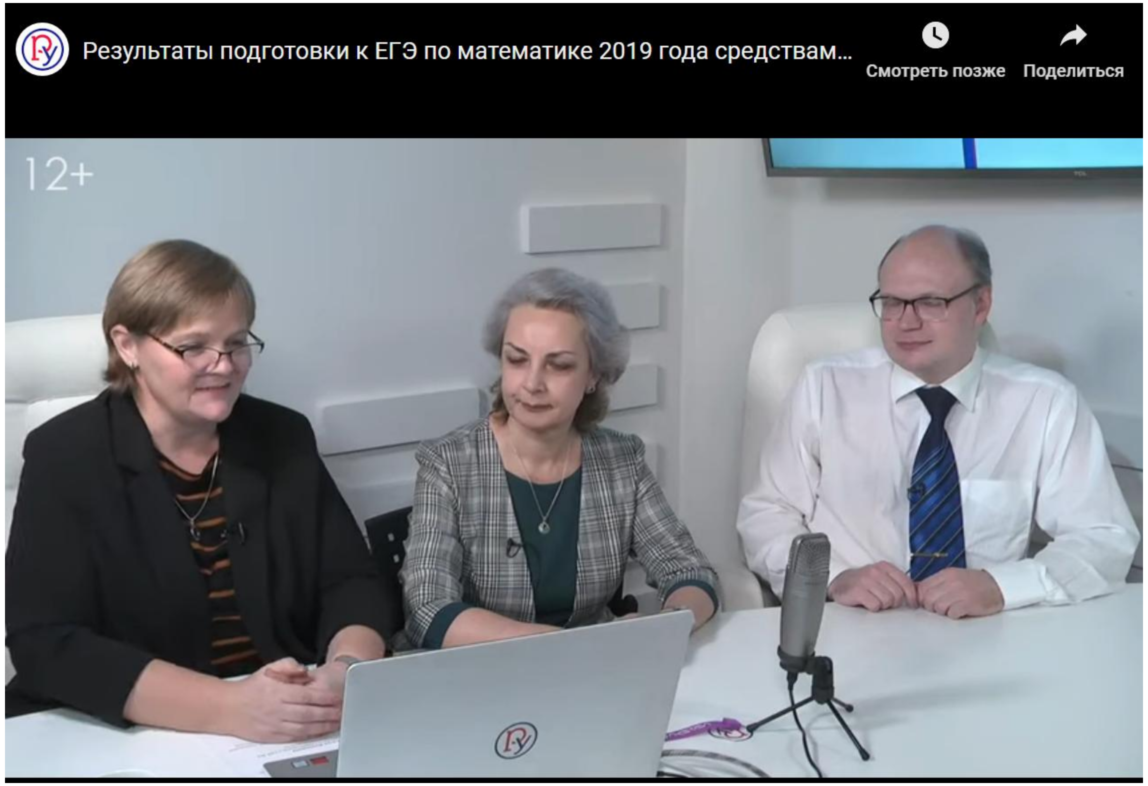
Состав УМК:

- дидактические материалы
- методические пособия
- подготовка к ВПР
- рабочая программа
- ЭФУ

ЛИНИЯ УМК МЕРЗЛЯКА А.Г. ДЛЯ 5 – 11 КЛАССОВ, «ШЛЕЙФ»

	Дидактические материалы	Методические пособия для учителя	Рабочие тетради	Пособия для подготовки к ВПР	Рабочие программы
Математика 5-6 класс	ГОТОВИТСЯ				
Алгебра 7-11 класс базовый уровень	Н			Н	
Геометрия 7-11 класс базовый уровень	Н				
Алгебра 7-11 класс углубленный уровень	Н				
Геометрия 7-11 класс углубленный уровень	ГОТОВИТСЯ Н	ГОТОВИТСЯ			

15 ЯНВАРЯ СОСТОЯЛАСЬ ОНЛАЙН-КОНФЕРЕНЦИЯ «РЕЗУЛЬТАТЫ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ 2019 ГОДА СРЕДСТВАМИ УМК А.Г.МЕРЗЛЯКА»



корпорация российский учебник дрофа вентана граф

ОРГАНИЗАЦИЯ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Условные обозначения

Простые задачи

Задачи средней сложности

Сложные задачи

Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

Окончание доказательства теоремы

Окончание решения задачи

5.6. Задания, рекомендованные для устной работы

5.7. Задания, рекомендованные для домашней работы

Система аналогичных задач

1.8. На промежутке [2; 5] найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = -\dfrac{10}{x}$; 2) $f(x) = \dfrac{20}{x}$.

1.9. Найдите:

1) $\max\limits_{[1;2]}(-x^2 + 6x)$; 2) $\min\limits_{[1;4]}(-x^2 + 6x)$; 3) $\max\limits_{[4;5]}(-x^2 + 6x)$.

1.10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 + 2x - 8$ на промежутке:

1) $[-5; -2]$; 2) $[-5; 1]$; 3) $[0; 3]$.

Рис. 3.4

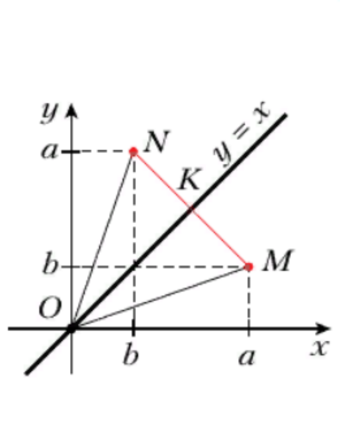
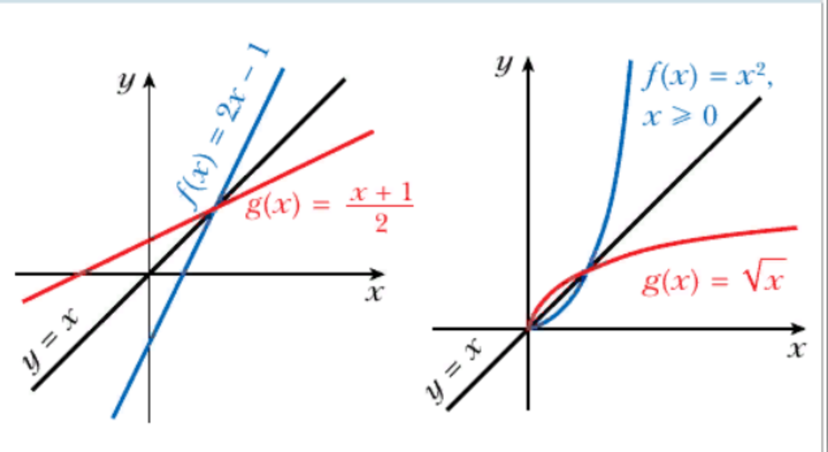


Рис. 3.5



Упражнения для повторения

5.26. Решите графически уравнение:

1) $x^2 = 2x + 3$; 2) $x^2 = \dfrac{8}{x}$.

5.27. Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ 2x + 5y = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2, \\ 3x + 2y = -6. \end{cases}$

Система пропедевтических задач к каждому параграфу

Готовимся к изучению новой темы

1.47. График какой функции получим, если график функции $y = x^2$ параллельно перенесём:

1) на 5 единиц вверх;
2) на 8 единиц вправо;
3) на 10 единиц вниз;
4) на 6 единиц влево.

1.48. Постройте график функции $y = x^2$. Используя этот график, постройте график функции:

1) $y = x^2 - 2$; 2) $y = (x + 3)^2$; 3) $y = (x - 3)^2 + 1$.

СВЕДЕНИЯ ИЗ РАНЕЕ ИЗУЧЕННОГО КУРСА
ОПЕРАТИВНЫЙ ДОСТУП К ИНФОРМАЦИИ

Готовимся к изучению новой темы

7.19. Найдите значение выражения:

1) $5\sqrt{4}-\sqrt{25}$; 2) $\frac{1}{3}\sqrt{0{,}09}-2$; 3) $(\sqrt{13})^2-3\cdot(\sqrt{8})^2$.

7.20. Решите уравнение:

1) $x^2=25$; 2) $x^2=0{,}49$; 3) $x^2=3$; 4) $x^2=-25$.

7.21. При каких значениях x имеет смысл выражение:

1) $\sqrt{-x}$; 3) $\sqrt{-x^2}$; 5) $\sqrt{x^2+8}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{(x-8)^2}}$;

2) $\sqrt{x^2}$; 4) $\sqrt{x-8}$; 6) $\sqrt{(x-8)^2}$; 8) $\frac{1}{\sqrt{x}-3}$?

7.22. Сравните числа:

1) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{\frac{1}{5}}$; 3) $\sqrt{33}$ и 6; 5) $\sqrt{30}$ и $2\sqrt{7}$;

2) $\sqrt{32}$ и $\sqrt{26}$; 4) $3\sqrt{5}$ и $\sqrt{42}$; 6) $7\sqrt{\frac{1}{7}}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{20}$.

7.23. Решите графически уравнение:

1) $\sqrt{x}=-x-1$; 2) $\sqrt{x}=2-x$; 3) $\sqrt{x}=\frac{1}{x}$.

Повторите содержание п. 4, 5, 22 на с. 326, 327, 332.

§ 8. Определение корня n-й степени. Функция $y=\sqrt[n]{x}$

Итоги главы 2

Степенная функция

Функцию $y=x^n$, $n\in N$, называют степенной функцией с натуральным показателем.

Функцию $y=x^n$, $n\in Z$, называют степенной функцией с целым показателем.

Корень n-й степени

Корнем n-й степени из числа a, где $n\in N$, $n>1$, называют такое число, n-я степень которого равна a.

Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a, где $n\in N$, $n>1$, называют такое неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Для любого a и $k\in N$ выполняются равенства: $\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1}=$

Сведения из курса алгебры 7–9 классов

Выражения и их преобразования

1. Степень с натуральным показателем

Степенью числа a с натуральным показателем n, бо́льшим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a. При этом каждый из множителей называют основанием степени, количество множителей — показателем степени.

Степень с основанием a и показателем n обозначают a^n и читают: «a в n-й степени».

Степенью числа a с показателем 1 называют само это число. Это позволяет любое число считать степенью с показателем 1.

2. Степень с целым отрицательным показателем

Для любого числа a, не равного нулю, и натурального числа n

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}.$$

Для любого числа a, не равного нулю, $a^0=1$.

Выражение 0^n при целых n, меньших или равных нулю, не имеет смысла.

3. Свойства степени с целым показателем

Для любого $a\neq 0$ и любых целых m и n выполняются равенства:

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n};$$
$$a^m:a^n=a^{m-n};$$
$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

Для любых $a\neq 0$ и $b\neq 0$ и любого целого n выполняются равенства:

$$(ab)^n=a^nb^n;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Квадратные корни

4. Квадратные корни. Арифметический квадратный корень

Квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a.

Арифметическим квадратным корнем из числа a называют неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Арифметический квадратный корень из числа a обозначают $\sqrt{a}$. Знак «$\sqrt{\ }$» называют знаком квадратного корня или радикалом.

Запись $\sqrt{a}$ читают «квадратный корень из a», опуская при чтении слово «арифметический».

Выражение, стоящее под знаком радикала, называют подкоренным выражением.

Если $\sqrt{a}=b$, то $b\geqslant 0$ и $b^2=a$.

Для любого неотрицательного числа a справедливо, что $\sqrt{a}\geqslant 0$ и $(\sqrt{a})^2=a$.

5. Свойства арифметического квадратного корня

Для любого действительного числа a выполняется равенство

$$\sqrt{a^2}=|a|.$$

Для любых действительного числа a и натурального числа n выполняется равенство

$$\sqrt{a^{2n}}=|a^n|.$$

Для любых действительных чисел a и b таких, что $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$, выполняется равенство

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}.$$

Для любых действительных чисел a и b таких, что $a\geqslant 0$ и $b>0$, выполняется равенство

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Для любых неотрицательных чисел a_1 и a_2 таких, что $a_1>a_2$, выполняется неравенство

$$\sqrt{a_1}>\sqrt{a_2}.$$

Сведения по планиметрии

Соотношения в треугольнике

Неравенство треугольника. Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

В треугольнике против равных сторон лежат равные углы.

В треугольнике против равных углов лежат равные стороны.

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и наоборот, против большего угла лежит бо́льшая сторона.

Признаки равенства треугольников

Первый признак равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними. Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Второй признак равенства треугольников: по стороне и двум прилежащим к ней углам. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Третий признак равенства треугольников: по трём сторонам. Если три стороны одного треугольника равны соответственно трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Свойства равнобедренного треугольника

В равнобедренном треугольнике:

1) углы при основании равны;

2) медиана, проведённая к основанию, является биссектрисой и высо-

ДОСТУПНОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ МАТЕРИАЛА
ДАЕТ ВОЗМОЖНОСТЬ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ИЗУЧЕНИЯ ПРЕДМЕТА

Пример 1. Постройте график функции $y = \sqrt{3x-2}$.

Решение. Схема построения имеет следующий вид (рис. 2.4):

$$y=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{Вправо на 2 ед.}} y=\sqrt{x-2} \xrightarrow{\text{Сжатие в 3 раза к оси ординат}} y=\sqrt{3x-2}$$

Если данную функцию представить в виде $y=\sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}$, то построение графика можно вести и по следующей схеме (рис. 2.5):

$$y=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{Сжатие в 3 раза к оси ординат}} y=\sqrt{3x} \xrightarrow{\text{Вправо на } \frac{2}{3} \text{ ед.}} y=\sqrt{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}$$

Рис. 2.4

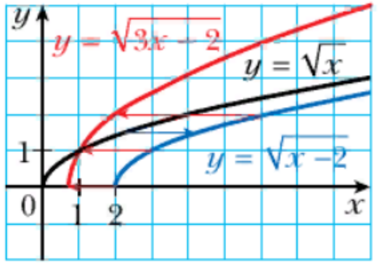
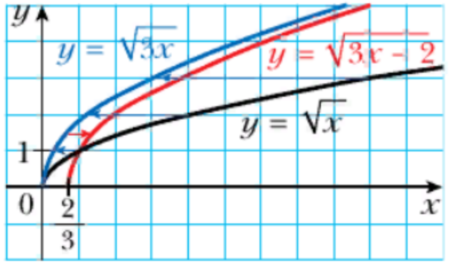


Рис. 2.5



Пример 2. Решите неравенство $(x+1)(3-x)(x-2)^2 > 0$.

Решение. Функция $f(x) = (x+1)(3-x)(x-2)^2$ непрерывна на $\boldsymbol{R}$. Отметим нули функции f на координатной прямой (рис. 5.7). Они разбивают множество $D(f) = \boldsymbol{R}$ на промежутки знакопостоянства функции f.

Рис. 5.7

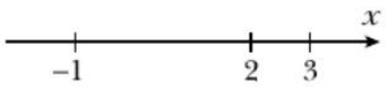
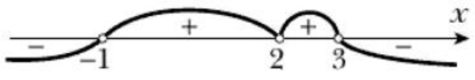


Рис. 5.8



Исследуем знак функции f на каждом из этих промежутков. Результат исследования показан на рисунке 5.8.

Ответ: $(-1; 2) \cup (2; 3)$.

Рис. 4.2 **Рис. 4.3**

Казанский собор в Санкт-Петербурге

Брёвна сруба

Корабельный лес

Линия электропередачи

Рис. 1.9

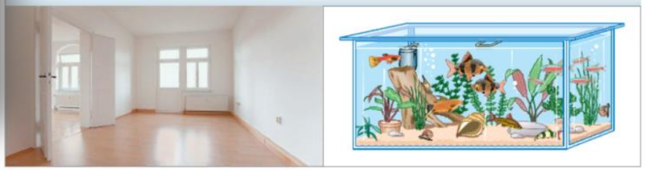
Рис. 1.10

Рис. 1.11

Можно записать, что $M \in ABC$ и $MN \subset ABC$.

. 6.2).

Рис. 6.2



Из определения параллельных плоскостей следует, что *любая прямая, лежащая в одной из двух параллельных плоскостей, параллельна другой плоскости*. Докажите это утверждение самостоятельно.

Рис. 3.12

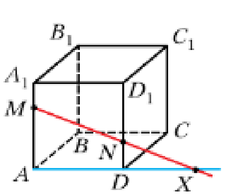


Рис. 3.13

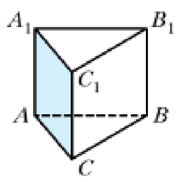
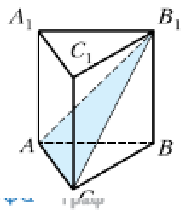


Рис. 3.14



БОЛЬШОЕ КОЛИЧЕСТВО ЗАДАНИЙ РАЗНОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ ПОЗВОЛЯЕТ ВЫСТРАИВАТЬ ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Упражнения

5.1. Решите неравенство:

1) $(x+1)(x-2)(x+5) > 0$; 4) $(2x+3)(3x-1)(x+4) > 0$;

5.5. Решите неравенство:

1) $(x+2)(x^2-1) > 0$; 4) $\frac{x^2-4}{x^2-9} > 0$;

5.6. Найдите множество решений неравенства:

1) $(x^2-64)(x^2-10x+9) \geqslant 0$; 3) $\frac{x^2-x-12}{x^2-36} \leqslant 0$;

2) $(x^2+7x)(x^2-7x+6) < 0$;

3) $(x^2+2x-15)(x^2-4x+3)(x-1) \leqslant 0$;

4) $(1-2x)(x-3)^9(2x+7)^6(x+4)(x-2)^2 > 0$.

5.16. Решите неравенство:

1) $(3-x)^3(x+2)^2(x-1)(2x-5) < 0$;

2) $(x^2-4)(x^2+x-2) \leqslant 0$;

3) $(x^3-4x)(x^2+2x-8)(x^2+7x+10) \leqslant 0$.

5.17. Найдите множество решений неравенства:

1) $\frac{x^3(x-1)^4(x+5)}{(x-8)(1-4x)} > 0$; 4) $\frac{x^5|3x-1|(x+3)}{x-2} \leqslant 0$;

2) $\frac{(x-2)(2x+1)^3}{(3-x)^4(1-5x)^5} > 0$; 5) $\frac{(2-x)(4x+3)}{(x-3)^3(x+1)^2} < 0$;

3) $\frac{(x-3)(5x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)^2} \geqslant 0$; 6) $\frac{(x+6)^3(x+4)(6-x)^5}{|x+5|} \geqslant 0$.

5.12. Решите неравенство:

1) $\frac{x^2+x-20}{x^2-6x+9} > 0$; 4) $\frac{x^2+x-20}{x^2-6x+9} \leqslant 0$; 7) $\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8} < 0$;

2) $\frac{x^2+x-20}{x^2-6x+9} \geqslant 0$; 5) $\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8} > 0$;

3) $\frac{x^2+x-20}{x^2-6x+9} < 0$; 6) $\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-8} \geqslant 0$;

5.21. Решите неравенство:

1) $(x^2-4)\sqrt{x^2-1} < 0$; 5) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10} < 0$;

2) $(x^2-4)\sqrt{x^2-1} > 0$; 6) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10} > 0$;

3) $(x^2-4)\sqrt{x^2-1} \leqslant 0$; 7) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10} \leqslant 0$;

4) $(x^2-4)\sqrt{x^2-1} \geqslant 0$; 8) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10} \geqslant 0$.

5.22. Решите неравенство:

1) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2} > 0$; 5) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2} < 0$;

2) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2} \geqslant 0$; 6) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2} > 0$;

3) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2} < 0$; 7) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2} \leqslant 0$;

4) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2} \leqslant 0$; 8) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2} \geqslant 0$.

5.25. Для каждого значения a решите неравенство:

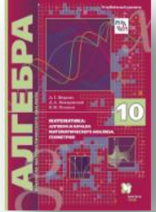
1) $(x-3)(x-a) < 0$; 5) $(x-a)(x+5)^2 \leqslant 0$;

2) $(x-3)(x-a)^2 > 0$; 6) $\frac{x-5}{x-a} \geqslant 0$;

3) $(x-3)(x-a)^2 \geqslant 0$; 7) $\frac{(x+1)(x-a)}{x+1} \geqslant 0$;

4) $(x-a)(x+5)^2 < 0$; 8) $\frac{(x+1)(x-a)}{x-a} \leqslant 0$.

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ



6.19. Сколько корней в зависимости от значения a имеет уравнение:
1) $x^{12} = a - 6$; 2) $x^{24} = a^2 + 7a - 8$?

6.20. Сколько корней в зависимости от значения a имеет уравнеı
$x^8 = 9a - a^3$?

30.21. При каких значениях a имеет корни уравнение:
1) $\sin^2 x - (3a - 3)\sin x + a(2a - 3) = 0$;
2) $\cos^2 x + 2\cos x + a^2 - 6a + 10 = 0$?

30.22. При каких значениях a имеет корни уравнение:
1) $\cos^2 x - \cos x + a - a^2 = 0$; 2) $\sin^2 x - 2a\sin x + 2a^2$

39.20. При каких значениях a функция $y = x^3 - 3ax^2 + 27x - 5$ имеет только одну критическую точку?

39.21. При каких значениях a функция $y = \frac{1}{3}x^3 - 2ax^2 + 4x - 15$ имеет толь-

32.31. При каких положительных значениях параметра a промежуток $[0; a]$ содержит ровно три корня уравнения:
1) $2\sin^2 x - \sin x = 0$; 2) $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$?

32.32. Определите, при каких положительных значениях параметра a промежуток $[0; a]$ содержит ровно n корней уравнения:
1) $2\sin^2 x + \sin x = 0$, $n = 4$; 2) $2\cos^2 x + \cos x = 0$, $n = 3$.

32.33. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $\sin^2 x - \left(a + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin x + \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0$ имеет на промежутке $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$: 1) два корня; 2) три корня; 3) не менее трёх корней.

32.34. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $\cos^2 x - \left(a - \frac{1}{3}\right)\cos x - \frac{a}{3} = 0$ имеет на промежутке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{3}\right)$: 1) два корня; 2) три корня; 3) не менее трёх корней.

Пример 7. При каких значениях параметра a уравнение $\sin^2 3x - \left(a + \frac{1}{2}\right)\sin 3x + \frac{a}{2} = 0$ имеет на промежутке $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ ровно: 1) два корня; 2) три корня?

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно $\sin 3x$. Тогда получим равносильную совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} \sin 3x = \frac{1}{2}, \\ \sin 3x = a. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности имеет на промежутке $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ ровно два корня. В этом можно убедиться непосредственно, найдя эти корни, или графически (рис. 32.1). Поэтому для задачи 1 надо, чтобы второе уравнение совокупности не давало новых корней на промежутке $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$.

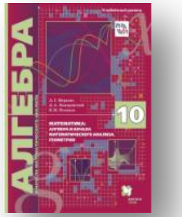
При $a = \frac{1}{2}$ очевидно, что корни уравнений совокупности совпадают.

При $a \geqslant 1$ или $a < 0$ уравнение $\sin 3x = a$ не имеет корней на промежутке $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$. В этом опять-таки можно убедиться, например, графически (см. рис. 32.1).

Для задачи 2 второе уравнение совокупности на рассматриваемом промежутке должно добавлять к множеству всех корней только один корень. Ясно, что это будет выполняться только при $a = 1$.

Ответ: 1) $a > 1$, или $a < 0$, или $a = \frac{1}{2}$; 2) $a = 1$. ■

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ



§ 8 Метод интервалов

8.22. Для каждого значения a решите неравенство:

1) $(x-3)(x-a) < 0$;
2) $(x-3)(x-a)^2 > 0$;
3) $(x-3)(x-a)^2 \geqslant 0$;
4) $(x-a)(x+5)^2 < 0$;
5) $(x-a)(x+5)^2 \leqslant 0$;
6) $\dfrac{(x+1)(x-a)}{x-a} \leqslant 0$.

§ 9 Степенная функция с натуральным показателем

9.12. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^8$ на промежутке $[-1; a]$, где $a > -1$.

9.13. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^6$ на промежутке $[a; 2]$, где $a < 2$.

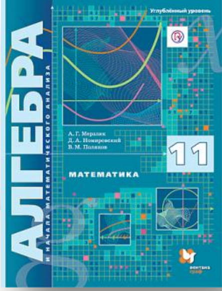
§ 11 Определение корня n-й степени. Функция $y = \sqrt[n]{x}$

11.24. В зависимости от значения параметра a определите количество корней уравнения:

1) $(x-a)\sqrt[4]{x+1} = 0$;
2) $(x-a)(\sqrt[4]{x}+1) = 0$;
3) $(x-a)(\sqrt[4]{x}-1) = 0$.

11.25. В зависимости от значения параметра a определите количество корней уравнения:

1) $(x+1)\sqrt[4]{x-a} = 0$;
2) $(x-1)(\sqrt[4]{x}-a) = 0$.



§ 2 Показательные уравнения

Пример 8. При каких значениях параметра a уравнение $4^x - (a+3)2^x + 4a - 4 = 0$ имеет единственный корень?

Решение. Пусть $2^x = t$. Имеем: $t^2 - (a+3)t + 4a - 4 = 0$. Отсюда $t_1 = 4$, $t_2 = a - 1$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 4, \\ 2^x = a - 1. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности имеет единственный корень $x = 2$. Второе уравнение совокупности при каждом значении параметра a или имеет один корень, или вообще не имеет корней.

Для выполнения условия задачи второе уравнение совокупности должно либо не иметь корней, либо иметь единственный корень, равный 2.

Если $a - 1 \leqslant 0$, т. е. $a \leqslant 1$, то уравнение $2^x = a - 1$ корней не имеет.

Число 2 является корнем второго уравнения совокупности, если $2^2 = a - 1$. Отсюда $a = 5$.

Ответ: $a \leqslant 1$ или $a = 5$. ■

§ 6 Логарифмические уравнения

6.42. Сколько решений имеет уравнение $(\log_2(x+1) - 3)\sqrt{x-a} = 0$ в зависимости от значения параметра a?

6.43. Сколько решений имеет уравнение $(\log_3(x-2) - 2)\sqrt{x-a} = 0$ в зависимости от значения параметра a?

6.44. При каких значениях параметра a уравнение $(x-a)\log_2(3x-7) = 0$ имеет единственный корень?

6.45. При каких значениях параметра a уравнение $(x+a)\log_3(2x-5) = 0$ имеет единственный корень?

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

1.14. Прямая m – линия пересечения плоскостей α и β (рис. 1.18). Точки A и B принадлежат плоскости α, а точка C – плоскости β. Постройте линии пересечения плоскости ABC с плоскостью α и с плоскостью β.

Рис. 1.17

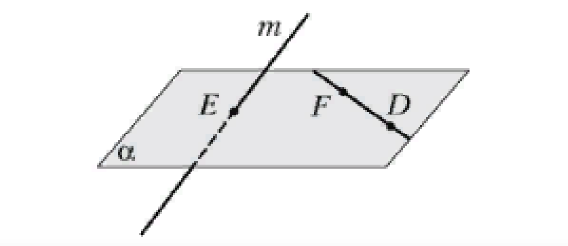
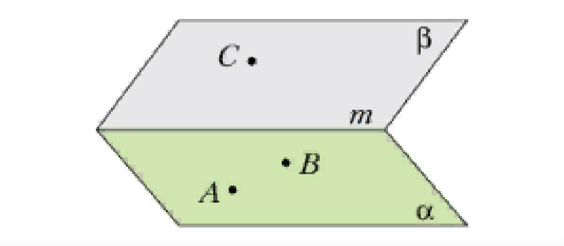


Рис. 1.18



1.15. Квадраты $ABCD$ и ABC_1D_1 не лежат в одной плоскости (рис. 1.19). На отрезке AD отметили точку E, а на отрезке BC_1 – точку F. Постройте точку пересечения:
1) прямой CE с плоскостью ABC_1;
2) прямой FD_1 с плоскостью ABC.

1.16. Верно ли утверждение: любая прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей данного треугольника, лежит в плоскости этого треугольника?

Рис. 1.19

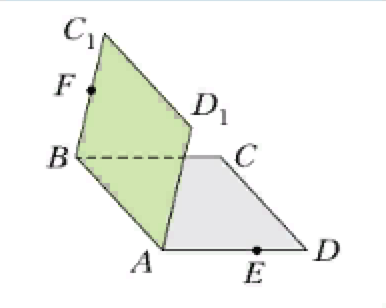


Рис. 3.33

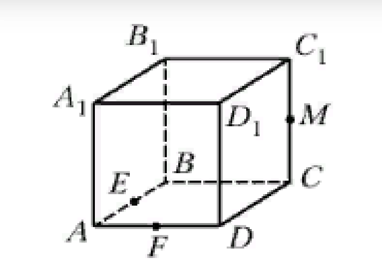


Рис. 3.34

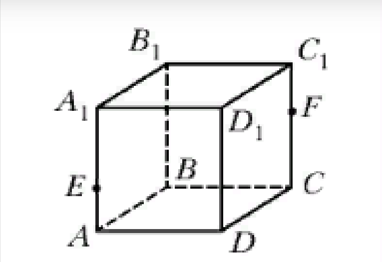
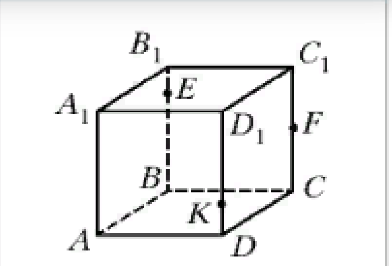


Рис. 3.35



3.22. На рёбрах AB, BD и CD тетраэдра $DABC$ отмечены соответственно точки M, K и N (рис. 3.36). Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

3.23. На рёбрах AB, BC и CD тетраэдра $DABC$ отмечены соответственно точки M, K и N (рис. 3.37). Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK.

3.24. На рёбрах AC и BD тетраэдра $DABC$ отметили соответственно точки E и F, а на ребре CD – точки M и K так, что точка K лежит между точками C и M (рис. 3.38). Постройте линию пересечения плоскостей ABM и EFK.

Рис. 3.36

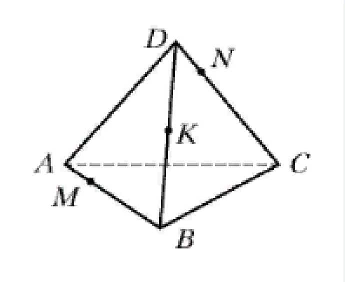


Рис. 3.37

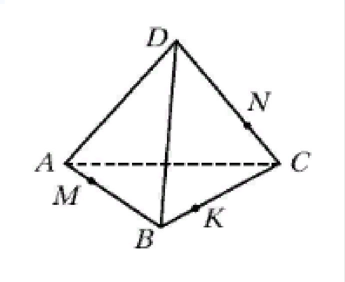
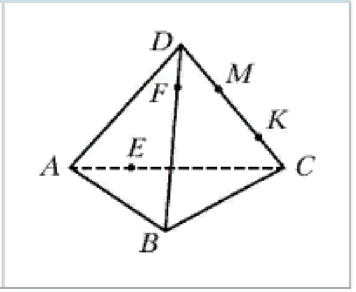


Рис. 3.38



3.25. На боковых рёбрах MB и MC пирамиды $MABCD$ отметили соответственно точки E и F (рис. 3.39). Постройте линию пересечения плоскостей AEC и BDF.

3.26. Дана пирамида $MABCD$ (рис. 3.40). На боковых рёбрах MB и MC отметили соответственно точки E и F, а на продолжении ребра MA за точку A – точку K. Постройте сечение пирамиды плоскостью EFK.

3.27. На ребре CC_1 призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E (рис. 3.41). Постройте сечение призмы плоскостью BA_1E.

Рис. 3.39

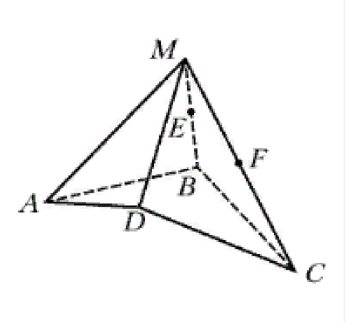


Рис. 3.40

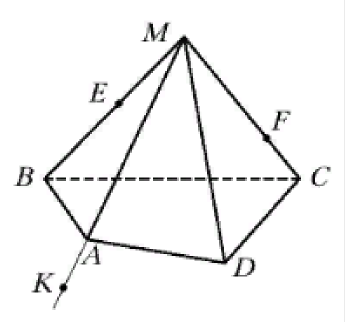
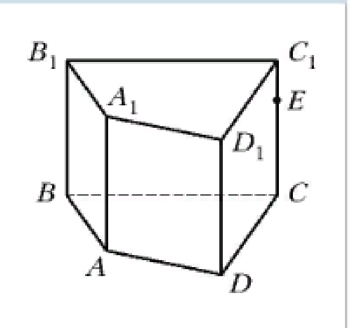


Рис. 3.41



ОРГАНИЗАЦИЯ ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Рис. 3.12

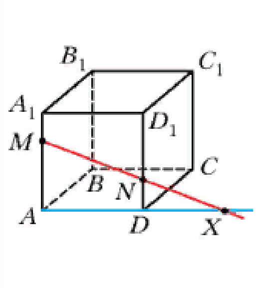


Рис. 3.13

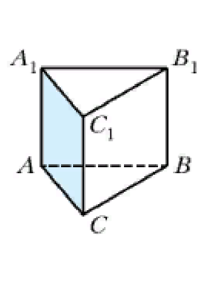


Рис. 3.14

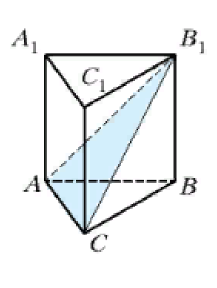


Рис. 3.15

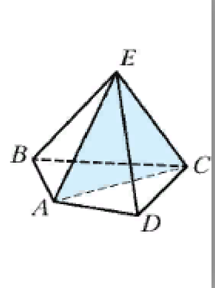


Рис. 3.16

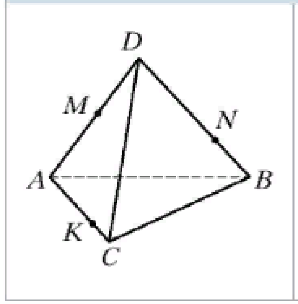


Рис. 3.17

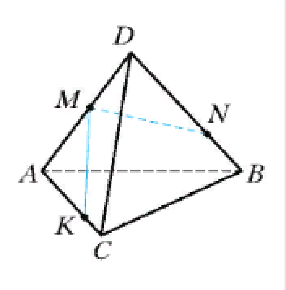


Рис. 3.18

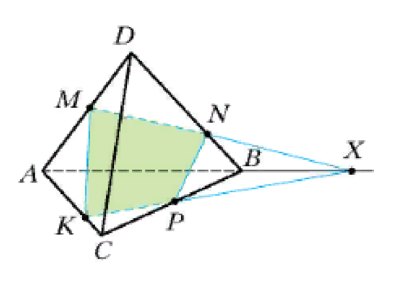


Рис. 3.19

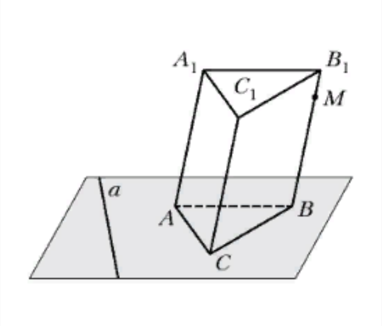


Рис. 3.20

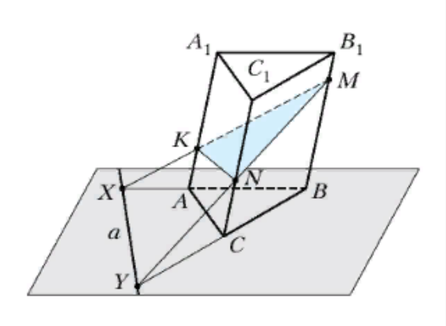
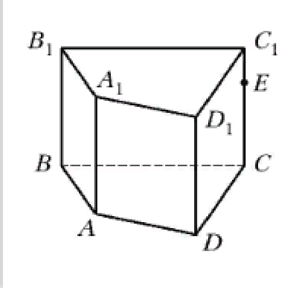


Рис. 3.41



Когда сделаны уроки

Метод сечений

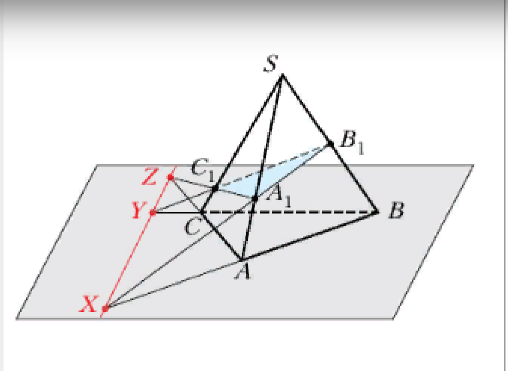
В предыдущем параграфе вы познакомились с понятием сечения многогранника и начали учиться строить сечения. Умение правильно строить сечения позволяет корректно изображать фигуры, получающиеся при пересечении многогранников и плоскостей. Кроме того, построение сечения может являться ключом к решению ряда стереометрических задач. Продемонстрируем сказанное на примерах.

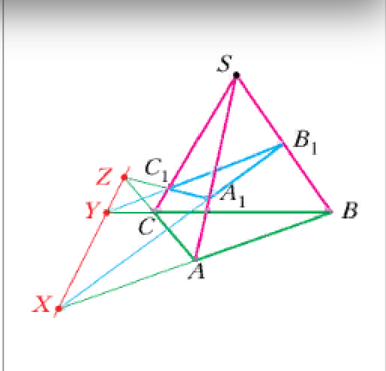
Задача 1. На рёбрах SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ отметили соответственно точки A_1, B_1 и C_1. Известно, что прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке X, прямые BC и B_1C_1 — в точке Y, а прямые AC и A_1C_1 — в точке Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

Решение. Рассмотрим плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 3.44). Поскольку точка X принадлежит прямой A_1B_1, то точка X принадлежит и плоскости $A_1B_1C_1$. Кроме того, точка X принадлежит прямой AB, а значит, принадлежит плоскости ABC. Таким образом, точка X принадлежит прямой пересечения плоскостей $A_1B_1C_1$ и ABC. Аналогично доказывается, что точки Y и Z также принадлежат прямой пересечения плоскостей $A_1B_1C_1$ и ABC. Следовательно, точки X, Y и Z лежат на одной прямой. ◄

Теорема Дезарга

Если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ расположены на плоскости так, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке, то точки пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 принадлежат одной прямой.





ОРГАНИЗАЦИЯ ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Когда сделаны уроки

Примеры решения более сложных иррациональных уравнений и неравенств, а также их систем

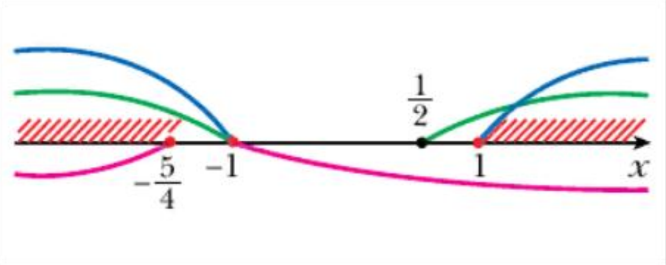
Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}$.

Решение. Разложим квадратные трёхчлены, стоящие под радикалами, на множители: $\sqrt{(x+1)(4x+5)}-\sqrt{(x+1)(2x-1)}=\sqrt{(x-1)(x+1)}$.

Теперь важно не сделать распространённую ошибку, а именно применить теорему о корне из произведения в таком виде: $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$. На самом деле записанная формула справедлива лишь для $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$. Если же $a \leqslant 0$ и $b \leqslant 0$, то $\sqrt{ab}=\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}$.

Поскольку областью определения данного уравнения является множество $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right] \cup [1; +\infty) \cup \{-1\}$ (рис. 13.3), то данное уравнение равносильно совокупности двух систем и одного уравнения.

Рис. 13.3



Проектная работа

Эта рубрика адресована прежде всего тем, кто хочет научиться приобретать знания самостоятельно, творчески мыслить, формировать, выражать и отстаивать свою точку зрения, выдвигать гипотезы, находить наиболее рациональные и нестандартные решения.

Проект — это самостоятельное исследование по выбранной теме, которое может выполняться как индивидуально, так и группой учащихся.

Работа может быть оформлена в виде реферата, доклада, компьютерной презентации. Примерный объём реферата — 10–15 страниц, доклада или компьютерной презентации — 10–20 минут.

Ниже приводятся темы, рекомендуемые для проектной работы и списки литературы. При работе над проектами можно также использовать интернет-ресурсы.

1. Кристаллы

Рекомендуемая литература

Галиулин Р. Как устроены кристаллы // Квант. — 1983. — № 11.

Корепин В. Узоры Пенроуза и квазикристаллы // Квант. — 1987. — № 6.

Кузьмичёва Г.М. Основные разделы кристаллографии: учебное пособие. — М.: МИТХТ, 2002.

Шаскольская М.П. Кристаллы. — М.: Наука, 1985.

Браве О. Кристаллографические этюды. — Л.: Наука, 1974.

2. Можно ли из тетраэдра сделать куб?

Рекомендуемая литература

Каган В. О преобразовании многогранников. — Одесса: Матезис, 1913.

Фукс Д. Можно ли из тетраэдра сделать куб? // Квант. — 1990. — № 11.

Болтянский В.Г. Равновеликие и равносоставленные фигуры // Сер. Популярные лекции по математике. Вып. 22. — М.: ГИТТЛ, 1956.

Болтянский В.Г. Третья проблема Гильберта. — М.: Наука, 1977.

Александров П.С., Маркушевич А.И., Хинчин А.Я. Энциклопедия элементарной математики. Кн. V: геометрия. — М.: Наука, 1966.

3. Теоремы о трёхгранном угле

Рекомендуемая литература

Ивлев Б. Двугранные и трёхгранные углы // Квант. — 1984. — № 12.

Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии. — М.: Наука, 1989.

4. Геометрия поверхностей

Рекомендуемая литература

Фукс Д. Лента Мёбиуса // Квант. — 1990. — № 1.

Ефремович В. Пространство и внутренняя геометрия поверхностей // Квант. — 1977. — № 1.

Фукс Д. Геометрия листа бумаги // Квант. — 1988. — № 9.

Оригами // Квант. — 1984. — № 8.

Смирнов С.Г. Прогулки по замкнутым поверхностям. — М.: МЦНМО, 2003.

Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии. — М.: Наука, 1989.

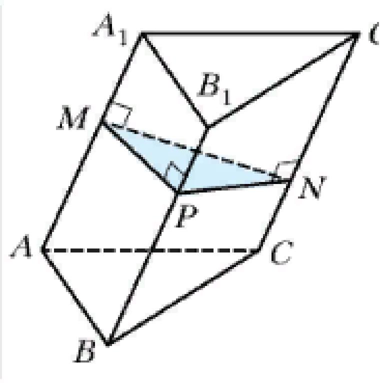
КЛЮЧЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Задача. В наклонной призме проведено сечение, пересекающее все боковые рёбра призмы и перпендикулярное им. Докажите, что площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра сечения и бокового ребра.

Решение. Доказательство проведём для треугольной призмы. Для других n-угольных призм, где $n > 3$, доказательство будет аналогичным.

Пусть треугольник MNP – сечение, о котором говорится в условии задачи (рис. 16.11).

Рис. 16.11



Докажем, что $S_{бок} = P_{MNP} \cdot AA_1$. Имеем: $AA_1 \perp MPN$. Следовательно, $AA_1 \perp MP$. Тогда отрезок MP – высота параллелограмма AA_1B_1B. Аналогично можно доказать, что отрезки PN и NM соответственно высóты параллелограммов CC_1B_1B и CC_1A_1A.

Поскольку площадь параллелограмма равна произведению высоты и стороны параллелограмма, к которой проведена высота, то можно записать:

$S_{бок} = MN \cdot AA_1 + MP \cdot BB_1 + PN \cdot CC_1$. Поскольку $AA_1 = BB_1 = CC_1$, то $S_{бок} = MP \cdot AA_1 + PN \cdot AA_1 + NM \cdot AA_1 = (MP + PN + NM) \cdot AA_1 = P_{MPN} \cdot AA_1$. ◄

Задача 5. Пусть a и b — скрещивающиеся прямые, причём $a \perp \alpha$, точка O и прямая b_1 — соответственно проекции прямых a и b на плоскость α (рис. 11.11). Докажите, что расстояние между скрещивающимися прямыми a и b равно расстоянию от точки O до прямой b_1.

Решение. Пусть B — произвольная точка прямой b и B_1 — её проекция на плоскость α. Пересекающиеся прямые b и BB_1 определяют некоторую плоскость β, которая пересекает плоскость α по прямой b_1. Поскольку $a \perp \alpha$ и $BB_1 \perp \alpha$, то $a \parallel BB_1$. Значит, $a \parallel \beta$. Тогда расстояние между скрещивающимися прямыми a и b равно расстоянию между прямой a и плоскостью β.

Опустим из точки O перпендикуляр OH на прямую b_1. Поскольку $BB_1 \perp \alpha$ и $OH \subset \alpha$, то $OH \perp BB_1$. В силу теоремы 10.1 получаем, что $OH \perp \beta$. Следовательно, длина отрезка OH является расстоянием от прямой a до плоскости β. Значит, расстояние между скрещивающимися прямыми a и b равно длине отрезка OH. ■

Задача 6. Прямоугольная трапеция $ABCD$ ($\angle A = \angle B = 90°$) является основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$. Известно, что $AB = SB$, $SA = a$, $\angle SBC = 90°$. Найдите расстояние между прямыми AD и CM, где M — середина ребра SD (рис. 11.12).

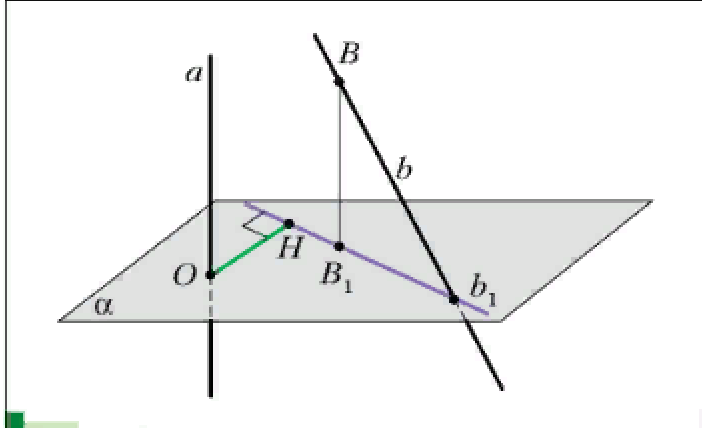


Рис. 11.11

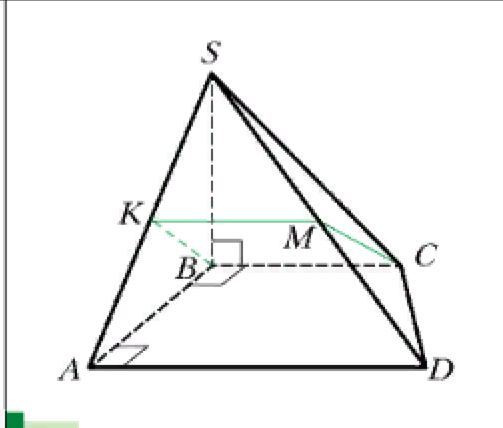


Рис. 11.12

14.21. Докажите, что площадь сектора, содержащего дугу в α рад, можно вычислить по формуле $S = \dfrac{\alpha R^2}{2}$, где R – радиус окружности.

§ 8 Комбинации цилиндра и призмы

Так, правильную призму и прямую треугольную призму можно описать около цилиндра.

В предыдущем параграфе мы определили площадь боковой поверхности цилиндра как площадь развёртки его боковой поверхности. Существуют и другие подходы к введению этого понятия.

Материал данного параграфа позволяет ввести понятие площади боковой поверхности цилиндра, используя рассуждения, аналогичные тем, которые применялись при введении понятия длины окружности.

Вы знаете, что длиной окружности называют предел последовательности периметров правильных многоугольников, вписанных в данную окружность, при неограниченном увеличении количества их сторон, т. е. $C = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$, где C — длина окружности, P_n — периметр правильного n-угольника.

На рисунке 8.4 изображены правильные призмы, вписанные в данный цилиндр. При неограниченном увеличении количества сторон оснований призм площади их боковых поверхностей будут как угодно мало отличаться от площади боковой поверхности цилиндра.

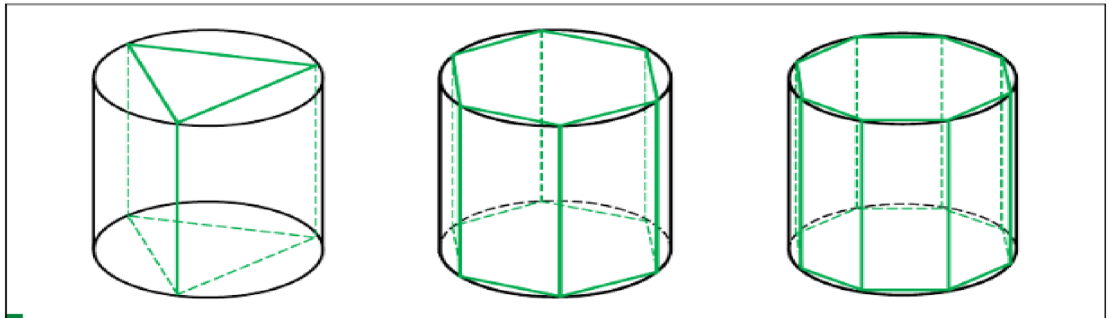


Рис. 8.4

Приведённые соображения показывают, что площадь $S_{бок}$ боковой поверхности цилиндра можно определить как предел последовательности S_n площадей боковых поверхностей правильных n-угольных призм, вписанных в данный цилиндр, т. е. $S_{бок} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Если образующая цилиндра равна h, а радиус основания цилиндра — r, то можно записать: $S_{бок} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} P_n h = h \lim\limits_{n\to\infty} P_n = h \cdot 2\pi r = 2\pi rh$.

Задача 1. В цилиндр, радиус основания которого равен 13 см, а высота 17 см, вписана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Основание призмы, четырёхугольник $ABCD$, является трапецией, в которой $BC \parallel AD$ и $BC = 10$ см, $AD = 24$ см. Найдите площадь четырёхугольника AB_1C_1D.

Решение. Четырёхугольник, площадь которого требуется найти, изображён на рисунке 8.5. Пусть точки O и O_1 — центры оснований цилиндра. Проведём через точку O высоту MN трапеции $ABCD$ (рис. 8.6). Поскольку трапеция вписана в окружность, то она является равнобокой. Поэтому прямая MN — ось симметрии трапеции, а точки M и N — середины оснований трапеции.

Проведём радиусы OA и OB основания цилиндра (см. рис. 8.6).

Из прямоугольных треугольников AOM и BON найдём отрезки OM и ON.

Имеем: $OM = \sqrt{AO^2 - AM^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$ (см);

$ON = \sqrt{BO^2 - BN^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$ (см). Тогда $MN = 17$ см.

Пусть точка N_1 — середина ребра B_1C_1 (рис. 8.7). Тогда $NN_1 \parallel BB_1$. Поскольку призма прямая, то отрезок NN_1 является высотой призмы, а значит, и высотой цилиндра. По условию $NN_1 = 17$ см. Получили, что в прямоугольном треугольнике MNN_1 равны катеты. Следовательно, $\angle NMN_1 = 45^\circ$.

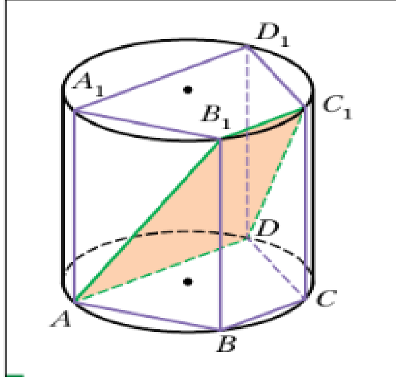


Рис. 8.5

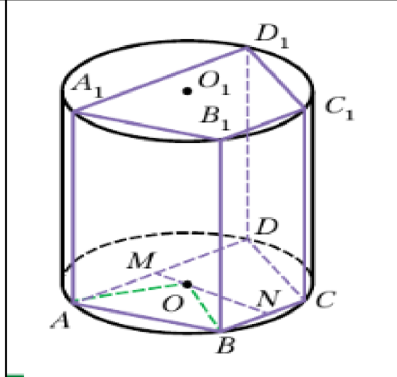


Рис. 8.6

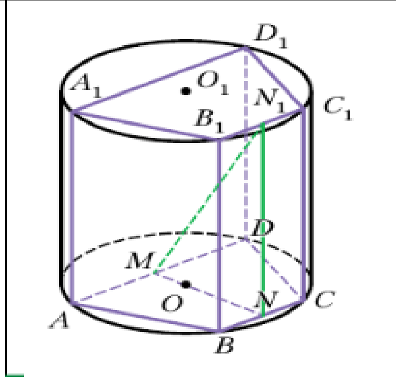


Рис. 8.7

Поскольку $NM \perp AD$ и прямая NM — проекция прямой MN_1 на плоскость основания призмы, то $MN_1 \perp AD$. Следовательно, угол NMN_1 — угол между плоскостями ABC и AB_1C_1.

Воспользовавшись теоремой о площади ортогональной проекции многоугольника, можно записать: $S_{AB_1C_1D} = \dfrac{S_{ABCD}}{\cos 45^\circ}$.

Имеем: $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot MN = 289$ (см²). Тогда $S_{AB_1C_1D} = 289\sqrt{2}$ см².

§ 11 Комбинации конуса и пирамиды

Пирамиду можно вписать в конус, если около основания этой пирамиды можно описать окружность, а вершина этой пирамиды проектируется в центр описанной окружности основания.

Определение

Пирамиду называют описанной около конуса, если её основание описано около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса (рис. 11.2). **При этом конус называют вписанным в пирамиду.**

Плоскости, содержащие боковые грани пирамиды, описанной около конуса, являются касательными плоскостями к конусу. Покажем это. Рассмотрим грань AKB пирамиды, описанной около конуса (рис. 11.3). Пусть ребро AB касается окружности основания конуса в точке M. Отрезок KM — образующая конуса.

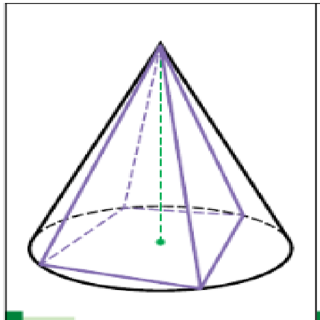


Рис. 11.1

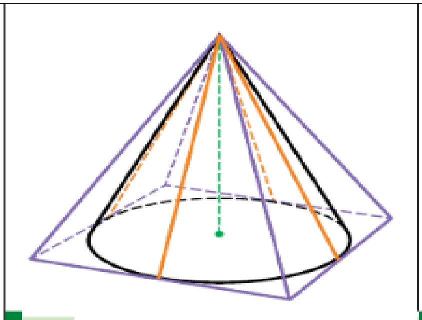


Рис. 11.2

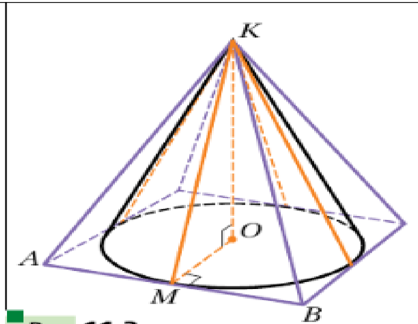


Рис. 11.3

Пусть точка O — центр основания конуса. Имеем: $AB \perp OM$ и $AB \perp KO$. Следовательно, $AB \perp OKM$. Тогда по признаку перпендикулярности плоскостей плоскость AKB перпендикулярна плоскости осевого сечения, проходящей через образующую KM. Отсюда следует, что плоскость AKB является касательной к конусу.

Боковая грань пирамиды, описанной около конуса, проходит через образующую конуса и других общих точек с конусом не имеет (на рисунке 11.2 эти образующие выделены оранжевым цветом). В этом случае говорят, что боковая грань пирамиды **касается** конуса.

Пирамиду можно описать около конуса, если в основание этой пирамиды можно вписать окружность, а вершина этой пирамиды проектируется в центр вписанной окружности основания.

Задача 2. В конус с вершиной K вписана треугольная пирамида $KABC$. Двугранные углы при рёбрах KA, KB и KC равны соответственно 60°, 90° и 120°. Найдите угол между плоскостью AKC и плоскостью, касающейся конуса по образующей KA (рис. 11.8).

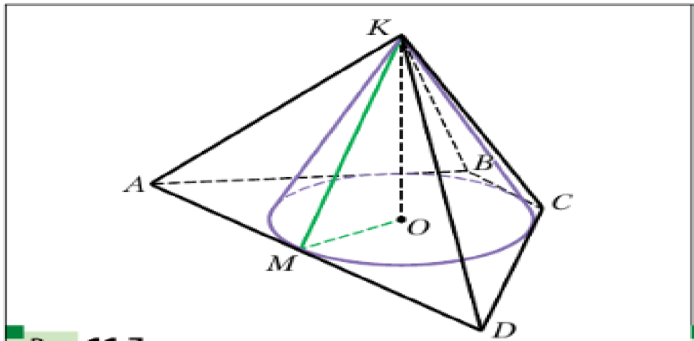


Рис. 11.7

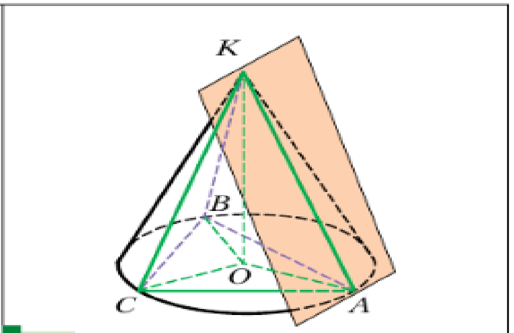


Рис. 11.8

Решение. Проведём высоту конуса KO. Рассмотрим пирамиду $KAOC$. Легко показать (сделайте это самостоятельно), что двугранные углы при рёбрах KA и KC равны. Пусть каждый из них равен α. Аналогично можно показать, что равны двугранные углы при рёбрах KA и KB пирамиды $KAOB$ (обозначим величины этих углов β) и двугранные углы при рёбрах KB и KC пирамиды $KBOC$ (обозначим величины этих углов γ). Тогда с учётом величин двугранных углов при рёбрах KA, KB и KC пирамиды $KABC$ можно записать такую систему:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 60^\circ, \\ \beta + \gamma = 90^\circ, \\ \gamma + \alpha = 120^\circ. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$ и $\gamma = 75^\circ$.

Поскольку касательная плоскость перпендикулярна плоскости KAO, то искомый угол равен $90^\circ - \alpha = 45^\circ$.

Ответ: 45°.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

§ 14 Многогранники, вписанные в сферу

Определение

Многогранник называют вписанным в сферу, если все его вершины принадлежат сфере. При этом сферу называют описанной около многогранника.

Из определения следует, что если многогранник вписан в сферу, то центр сферы равноудалён от всех его вершин. Верно и обратное утверждение: *если для данного многогранника существует точка, равноудалённая от всех его вершин, то около этого многогранника можно описать сферу*.

Например, все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны, пересекаются в одной точке и этой точкой делятся пополам. Следовательно, точка пересечения диагоналей прямоугольного параллелепипеда равноудалена от всех его вершин. Значит, около этого многогранника можно описать сферу (рис. 14.1).

На рисунке 14.2 изображён тетраэдр $ABCD$, в котором $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$. Поскольку середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от его вершин, то середина ребра AB является точкой, равноудалённой от всех вершин тетраэдра $ABCD$, т. е. является центром сферы, описанной около данного тетраэдра.

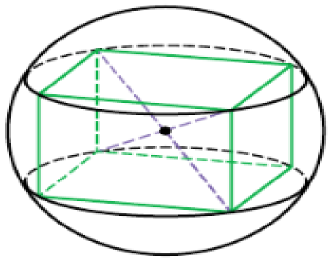


Рис. 14.1

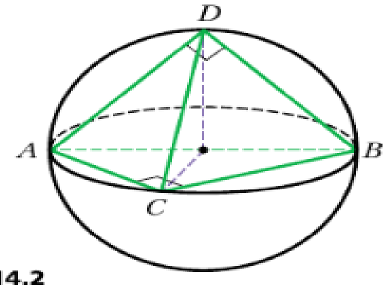


Рис. 14.2

Если многогранник вписан в сферу, то также говорят, что многогранник вписан в шар, ограниченный этой сферой. Например, можно сказать, что на рисунках 14.1 и 14.2 изображены соответственно прямоугольный параллелепипед и тетраэдр, вписанные в шар, или шар, описанный около каждого из указанных многогранников.

Если многогранник вписан в сферу, то плоскости его граней пересекают сферу по окружностям. Следовательно, *каждая грань многогран-*

Геометрическим местом точек, равноудалённых от концов отрезка, является плоскость, перпендикулярная отрезку и проходящая через его середину. Рассмотрим плоскость α, перпендикулярную боковому ребру SA и проходящую через его середину. Очевидно, что эта плоскость не параллельна прямой a и не содержит её. Пусть $a \cap \alpha = O$. Поскольку точка O равноудалена от всех вершин основания и $OS = OA$, то точка O равноудалена от всех вершин пирамиды, а значит, она является центром сферы, описанной около рассматриваемой пирамиды. ■

Из доказанного следует, что *около любого тетраэдра можно описать сферу*.

Также *сферу можно описать около правильной пирамиды. Центр описанной сферы принадлежит прямой, содержащей высоту правильной пирамиды*.

Задача 3. Докажите, что: 1) если около оснований усечённой пирамиды можно описать окружности и прямая, проходящая через центры этих окружностей, перпендикулярна основаниям, то такую усечённую пирамиду можно вписать в сферу; 2) центр сферы, описанной около усечённой пирамиды, принадлежит прямой, проходящей через центры окружностей, описанных около оснований усечённой пирамиды.

Докажите эти утверждения самостоятельно.

Центр окружности, описанной около многоугольника, может принадлежать многоугольнику, в частности лежать на стороне, а может и не принадлежать многоугольнику. Аналогичная ситуация возникает и в пространстве: центр сферы, описанной около многогранника, может ему принадлежать (рис 14.5), в частности лежать на грани (см. рис. 14.2), и может находиться вне многогранника (рис. 14.6).

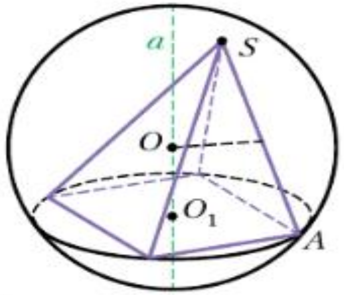


Рис. 14.5

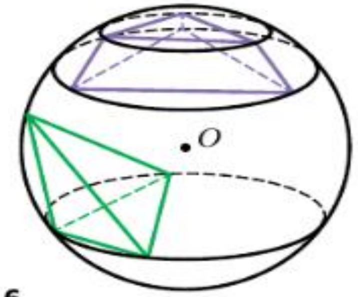


Рис. 14.6

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

§ 15 Многогранники, описанные около сферы

Используя это утверждение, можно доказать (сделайте это самостоятельно), что в любом тетраэдре существует точка, равноудалённая от всех плоскостей, содержащих его грани. Следовательно, *в любой тетраэдр можно вписать сферу*.

Задача 1. Докажите, что если двугранные углы пирамиды при рёбрах её основания равны, то в такую пирамиду можно вписать сферу.

Решение. В курсе геометрии 10 класса было доказано, что если двугранные углы пирамиды при рёбрах её основания равны, то каждая точка высоты пирамиды равноудалена от плоскостей её боковых граней (рис. 15.2). Тогда точка пересечения биссектора двугранного угла при ребре основания с высотой пирамиды равноудалена от всех плоскостей, содержащих грани пирамиды. ■

Из доказанного следует, что *в любую правильную пирамиду можно вписать сферу. Центр вписанной сферы принадлежит высоте пирамиды*.

Заметим, что не во всякой пирамиде, в которую можно вписать сферу, равны двугранные углы при рёбрах основания. Действительно, примером такой пирамиды может служить тетраэдр, у которого не равны двугранные углы при рёбрах некоторой грани.

Задача 2. Докажите, что если в основание прямой призмы можно вписать окружность и высота призмы равна диаметру этой окружности, то в такую призму можно вписать сферу.

Решение. Пусть точки O_1 и O_2 — центры окружностей радиуса r, вписанных в основания прямой призмы (рис. 15.3). Прямая O_1O_2 параллельна плоскости каждой боковой грани призмы. Точка O_1 удалена от плоскости каждой боковой грани призмы на расстояние r. Следовательно, любая точка прямой O_1O_2 удалена от плоскостей боковых граней призмы на расстояние r. Поскольку $O_1O_2 = 2r$, то середина O отрезка O_1O_2 равноудалена от всех плоскостей граней призмы. ■

Из доказанного следует, что *в правильную призму, высота которой равна диаметру окружности, вписанной в основание призмы, можно вписать сферу. Центр сферы является серединой отрезка, соединяющего центры оснований призмы*.

Справедливо и такое утверждение: *если в прямую призму можно вписать сферу, то в основание призмы можно вписать окружность радиусом, равным радиусу сферы, а высота призмы равна диаметру сферы*. Докажите это утверждение самостоятельно.

Заметим, что если в многогранник можно вписать сферу, то этот многогранник является выпуклым. Это следует из того очевидного факта, что сфера не может касаться граней двугранного угла, величина которого больше 180°. Однако если многогранник вписан в сферу, то это не означает, что он является выпуклым. Так, на рисунке 15.5 изображён невыпуклый многогранник, вписанный в сферу.

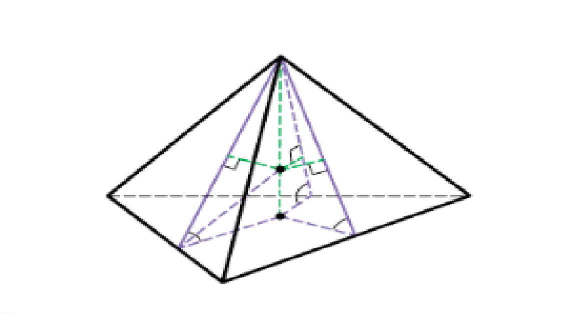


Рис. 15.2

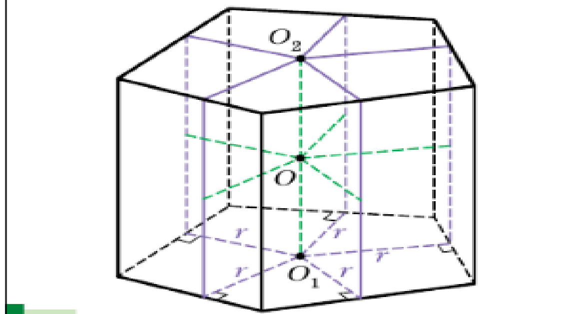


Рис. 15.3

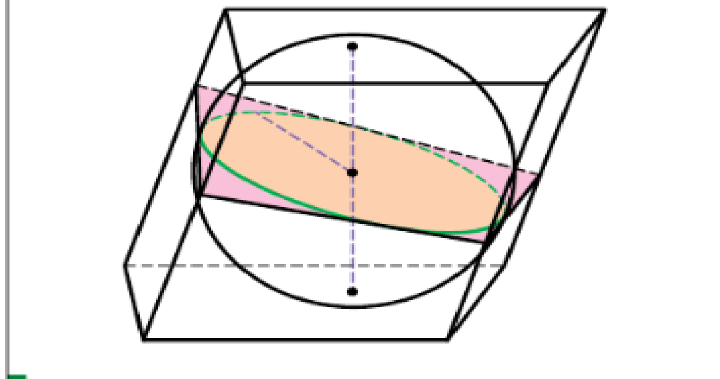


Рис. 15.4

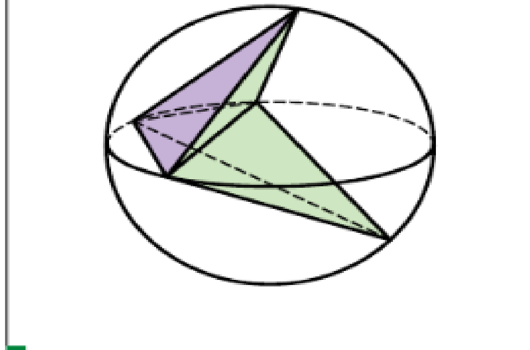
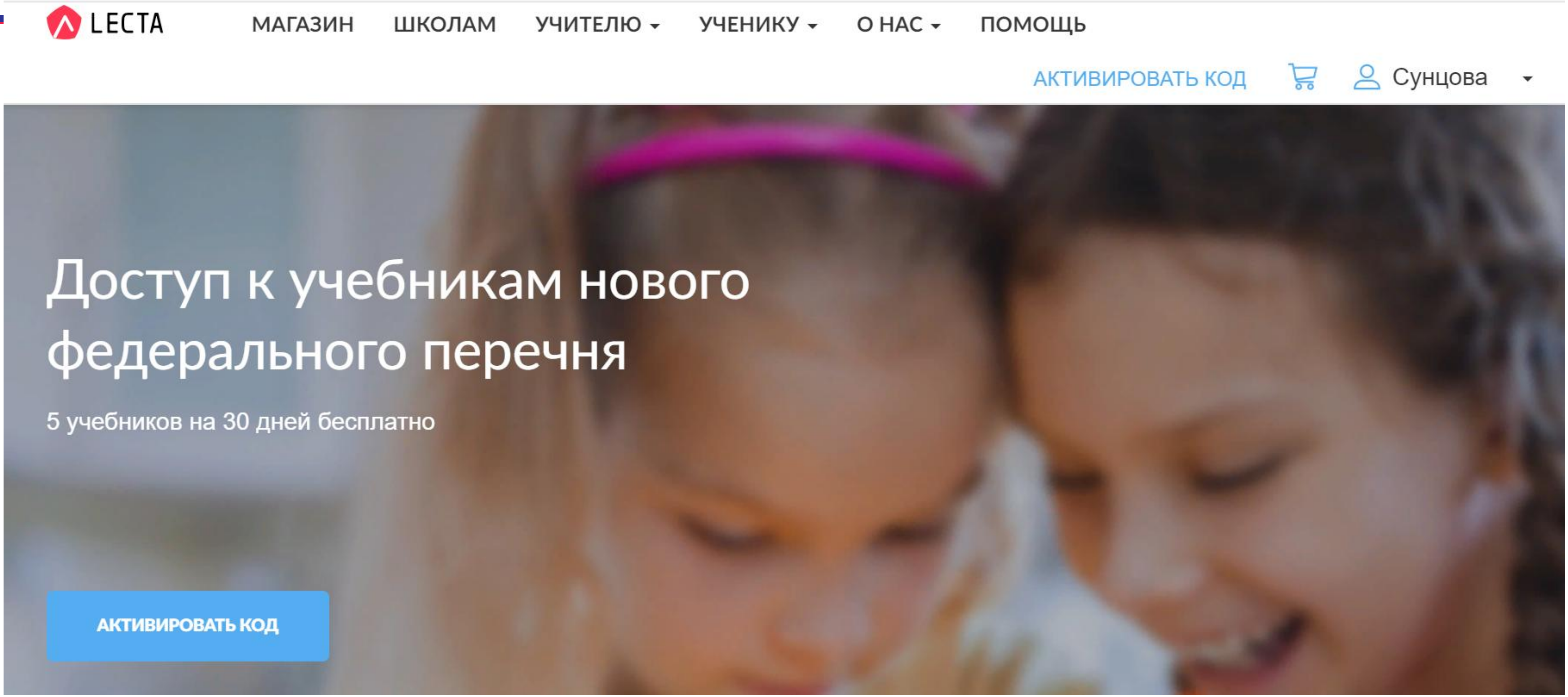
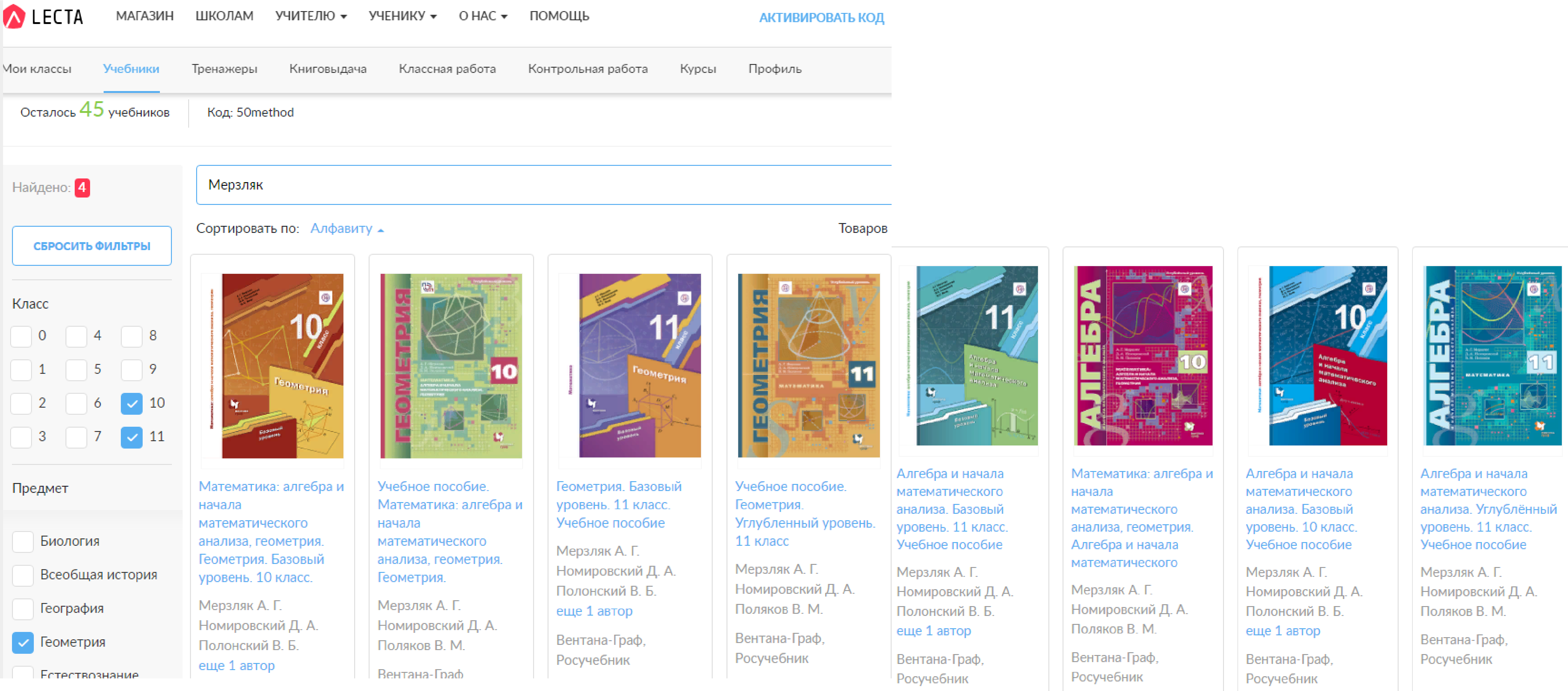


Рис. 15.5

ДОСТУП К УЧЕБНИКАМ



ДОСТУП К УЧЕБНИКАМ



LECTA

НАДЕЖНАЯ ОСНОВА ЦИФРОВОЙ ШКОЛЫ: ПРОСТЫЕ РЕШЕНИЯ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ

КНИГАВЫДАЧА – возможность обеспечить школу учебниками, сэкономить время и средства.

1	500	ЛЮБЫЕ	75
учебник	дней	устройства пользователя	рублей

В библиотеке платформы LECTA **более 500 учебников и учебных пособий в электронной форме** (ЭФУ) и аудиприложений по всей школьной программе.

- Классная работа
- Контрольная работа
- Курсы повышения квалификации
- ВПР-тренажер
- Атлас+

Адрес сайта: https://lecta.rosuchebnik.ru/

LECTA – УНИКАЛЬНАЯ ИНТЕРАКТИВНАЯ ЦИФРОВАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПЛАТФОРМА

LECTA

ОБЛЕГЧАЕТ РАБОТУ УЧИТЕЛЯ

ПОМОГАЕТ ЛУЧШЕ УЧИТЬ И УЧИТЬСЯ

ОБЕСПЕЧИВАЕТ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СОВРЕМЕННЫХ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

СЕРВИСЫ

«КЛАССНАЯ РАБОТА»

«КОНТРОЛЬ»

Адрес сайта: https://lecta.rosuchebnik.ru/

корпорация российский учебник

дрофа

вентана граф

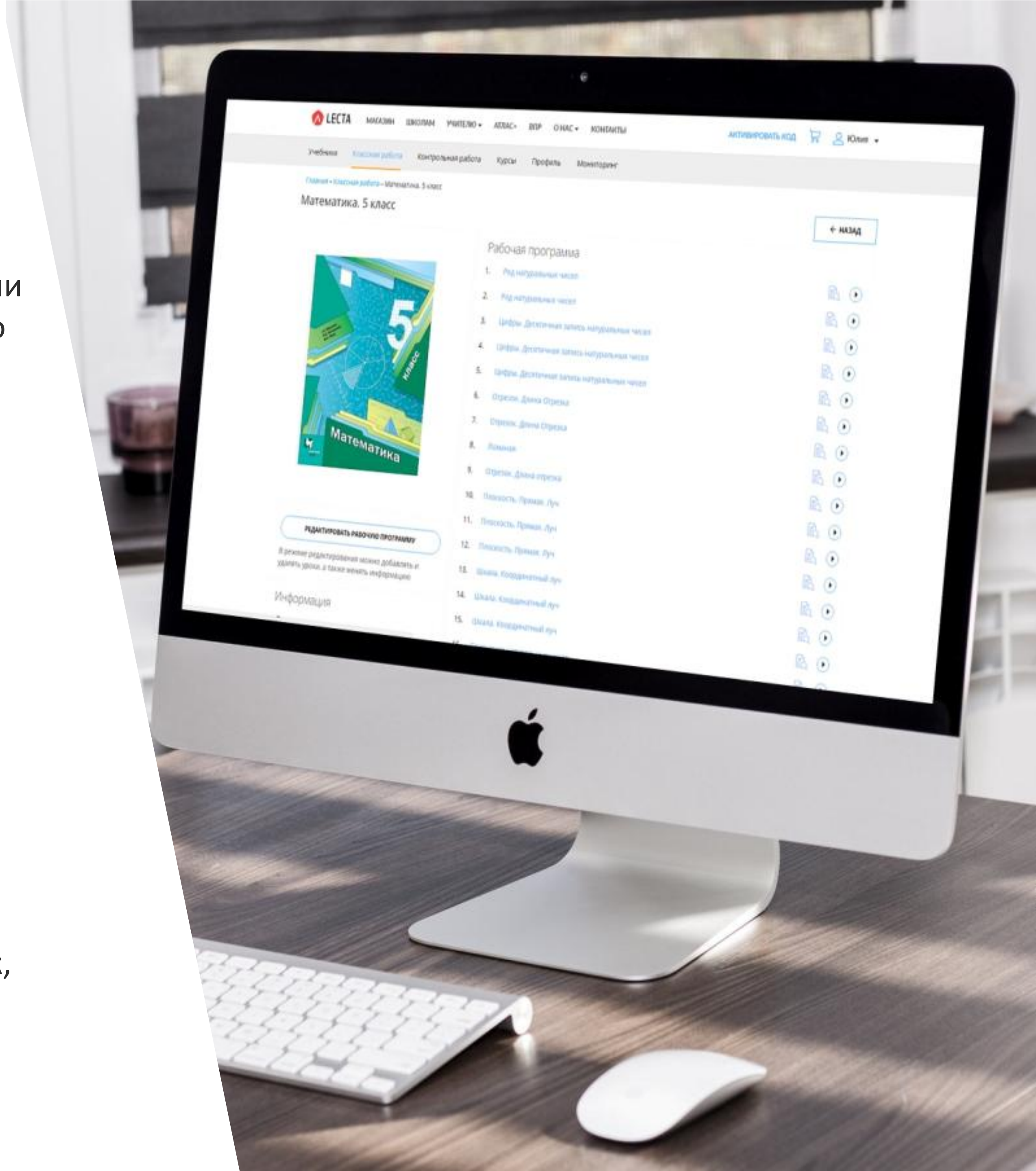
«КЛАССНАЯ РАБОТА» ПОМОЖЕТ ПРОВЕСТИ УРОК

Бесплатные готовые рабочие программы; презентации для подготовки и проведения уроков с возможностью редактирования самим учителем

Методические комментарии ко всем этапам урока

Материалы, необходимые для отчетности

Интерактивные задания
для контроля с использованием интерактивных досок, панелей и индивидуальных устройств



СЕРВИСЫ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

LECTA

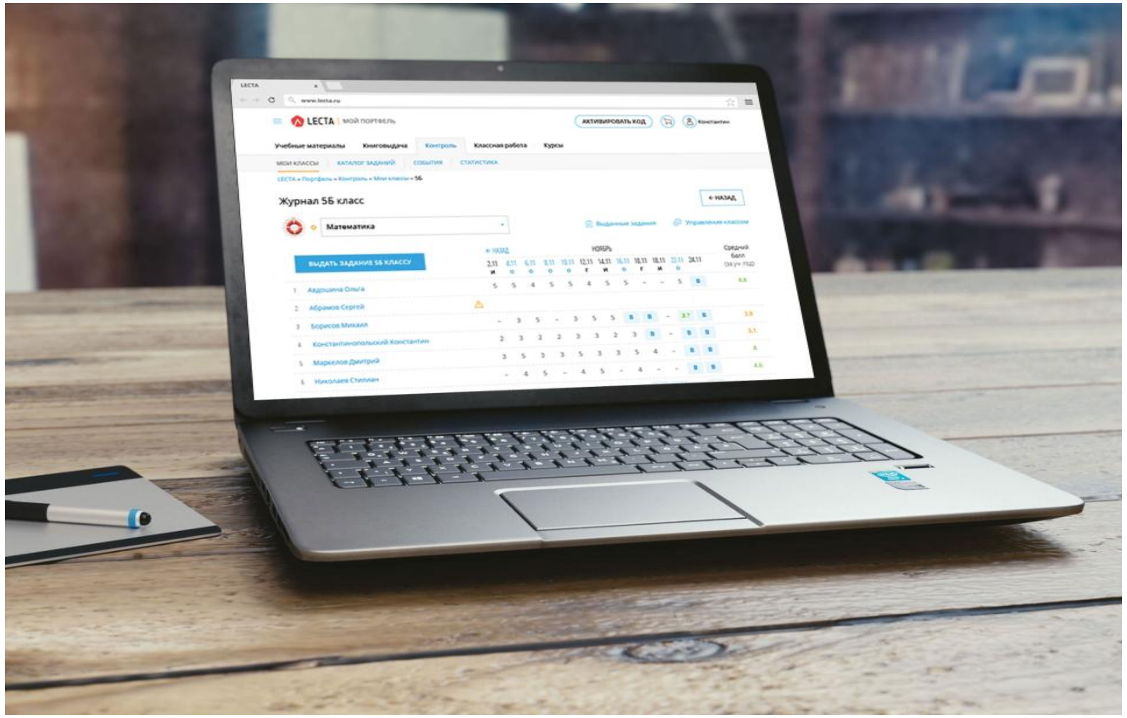
поможет проверить образовательные результаты учеников

Готовые материалы для проведения контрольных и проверочных работ
на интерактивной доске, устройствах учеников, с возможностью вывода
на печать

Автоматическая проверка
правильности выполнения заданий

Индивидуализация работы
для группы или ученика

Возможность объединения учеников
в виртуальный класс, проверка заданий
в электронном виде и сохранение всей истории по каждому ученику



корпорация российский учебник

дрофа

вентана граф

ВНИМАНИЕ КОНКУРС!

КОНКУРСЫ И АКЦИИ МАТЕМАТИКА АЛГЕБРА

Всероссийский конкурс «Задачи удачи»

До 15 марта 2020

Положение

о проведении Всероссийского конкурса разработок практико-ориентированных задач для подготовки учащихся к итоговой аттестации по математике за курс основной школы (новая модель)

«Задачи удачи»

7.5. Авторы конкурсных работ, чьи материалы будут одобрены жюри конкурса, получат:

- Сертификат о публикации в электронном СМИ "Учитель.club" (рег. № Эл № ФС77-72647 от 23 апреля 2018 г.).
- Сертификат участника всероссийского конкурса.

Главная › Методическая помощь › Материалы и мероприятия › Алгебра × Геометрия × Методические пособия ×
Очистить фильтр ×

Методические пособия по алгебре и геометрии

Выберите уровень образования

Начальное образование

Выберите класс

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Алгебра, Геометрия

Выберите линию УМК...

Методические пособия

Подготовка к ЕГЭ / ОГЭ / ВПР

Сортировать

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОСОБИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОСОБИЯ

РАЗРАБОТКИ УРОКОВ (КОНСПЕКТЫ УРОКОВ)

Рациональные выражения. Глава №5 к учебнику

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОСОБИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОСОБИЯ

Геометрия. 11 класс. Методическое пособие

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОСОБИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОСОБИЯ

Геометрия. 9 класс. Методическое пособие

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОСОБИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОСОБИЯ

Геометрия. 8 класс. Методическое пособие

АКТУАЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ ОБ ИЗМЕНЕНИЯХ В ФЕДЕРАЛЬНОМ ПЕРЕЧНЕ УЧЕБНИКОВ

https://rosuchebnik.ru/fpu632/

Здесь вы можете найти всю корректную и актуальную информацию о Приказе №632 и учебниках корпорации, включенных в перечень

ПРИКАЗ МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ № 632

от 22 ноября 2019 г.

СПИСОК ВСЕХ УЧЕБНИКОВ

корпорации в ФПУ

ЗАПРОС

бланка заказа

sales@rosuchebnik.ru

И многое другое об изменениях в Федеральном перечне учебников

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

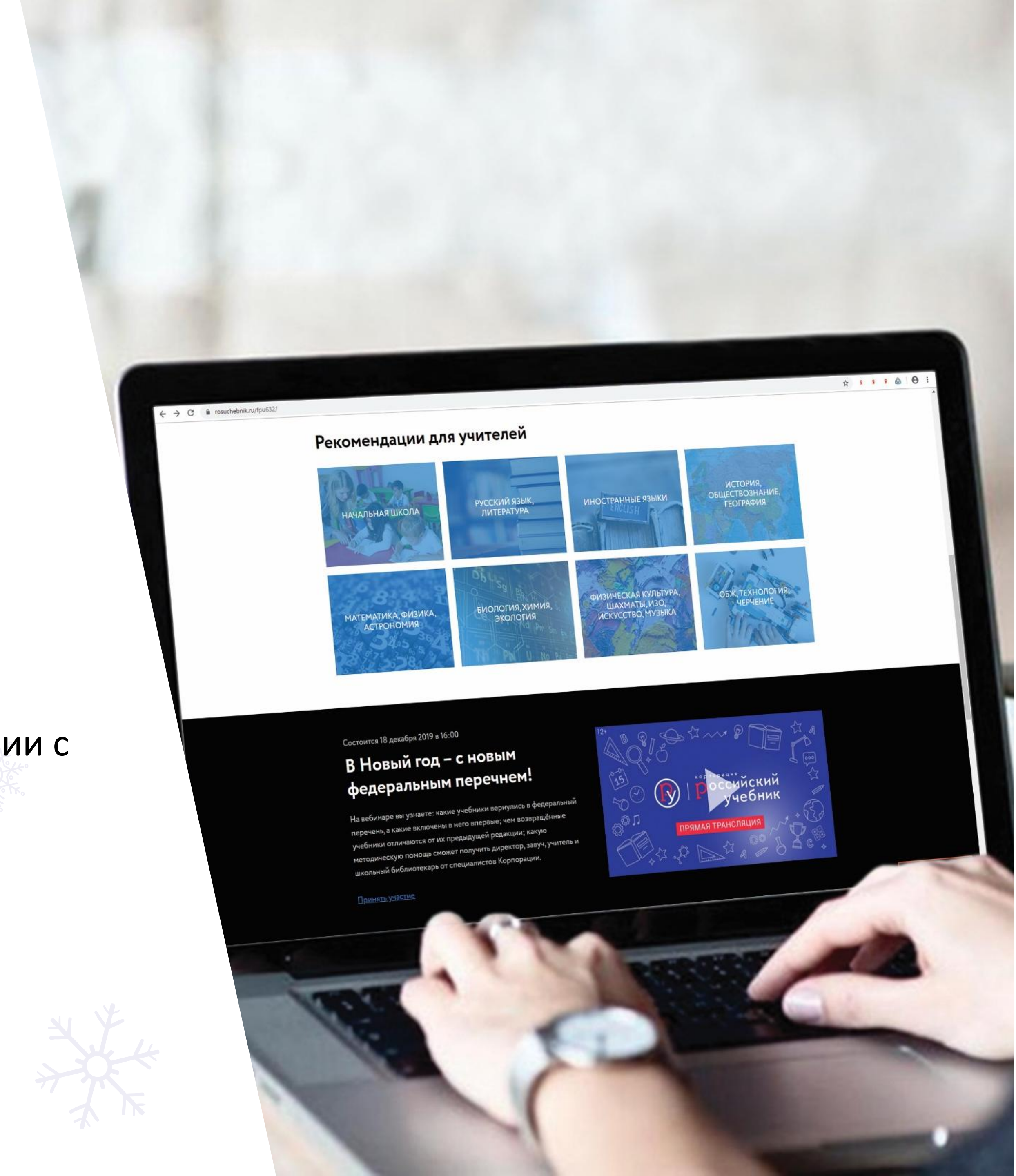
На странице **https://rosuchebnik.ru/fpu632/**

В разделе **Рекомендации для учителей**

Размещены актуальные материалы об изменениях в каждом предмете:

- Запись и презентация **предметного вебинара**
- Что представляют из себя **новые линии УМК**
- **Совместим ли вернувшийся в ФПУ учебник** одной линии с версией учебника из прошлого ФПУ
- Как изменились **вернувшиеся** в перечень **учебники**

В случае возникновения вопросов обращайтесь по адресу:
help@rosuchebnik.ru / web@rosuchebnik.ru



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

корпорация российский учебник

дрофа

вентана граф