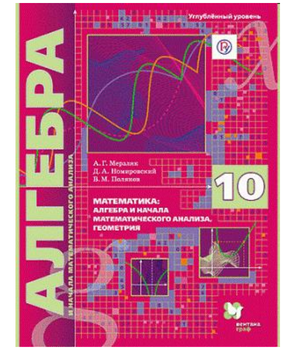
корпорация российский учебник

LECTA

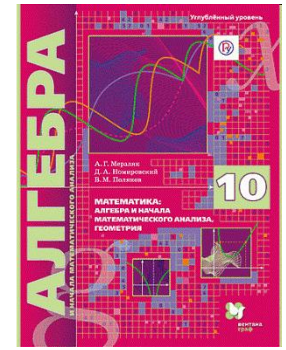


Преобразование и построение графиков

Альперин Михаил Исаакович, ведущий методист по математике корпорации «Российский учебник», кандидат физико-математических наук, доцент.

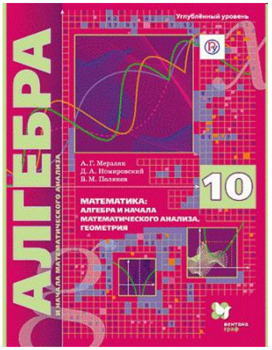
Понятие Функции

Функция *f* **(отображение, операция, оператор)** — это *закон* или *правило*, согласно которому каждому элементу $\boldsymbol{x}$ из множества $\boldsymbol{X}$ ставится в соответствие единственный элемент $\boldsymbol{y}$ из множества $\boldsymbol{Y}$. При этом говорят, что функция *задана* на множестве $\boldsymbol{X}$, или что $\boldsymbol{f}$ *отображает* $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$.



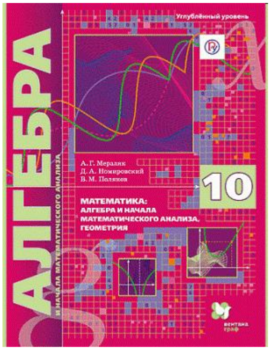
Понятие Функции

Говорят, что функция *задана* на множестве X, или что f *отображает* X в Y. Если элементу x сопоставлен элемент y, то говорят, что элемент y находится в ***функциональной зависимости*** f от элемента x.



Понятие Функции

При этом переменная ***x*** называется ***аргументом*** функции или ***независимой переменной***, множество ***X*** называется ***областью определения*** функции, а элемент ***y*** — ***значением*** функции в точке ***x***. Множество всех возможных значений функции называется её ***областью значений*** .



Обозначения

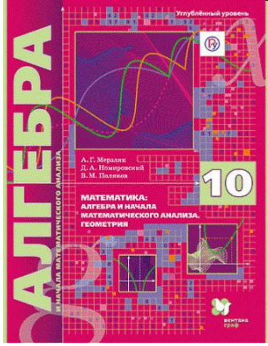
Если задана функция f, которая определена на множестве X и принимает значения в множестве Y (функция f *отображает* множество X в Y), то этот факт коротко записывают в виде

- $f : X \to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$.
- область определения функции f (множество X) обозначается $D(f)$;
- область значений функции f (множество Y) обозначается $E(f)$.

Наличие функциональной зависимости между элементом $x \in X$ и элементом $y \in Y$ наиболее часто обозначается как $y=f(x)$, или $f : x \mapsto y$.

Формула пройденного пути при равномерном движении $S = vt$, где v — скорость движущегося тела, а t — время движения, может быть рассмотрена как функция двух переменных $S = S(v, t)$, т.е.

$$S : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}.$$



Определение 10: Графиком функции $f : X \to Y$ (обозначение $\Gamma(f)$) называют множество

$$\{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

Определение

Графиком функции f называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции f.

Пример, функция Дирихле:

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\notin Q\end{cases}$$

Теорема 1. Пусть $X \subset \boldsymbol{R}$, $f : X \to \boldsymbol{R}$ и $a > 0$. Тогда

а) график функции $f(x)+a$ получается из графика функции f сдвигом на a единиц вверх (вдоль оси ординат);

б) график функции $f(x)-a$ получается из графика функции f сдвигом на a единиц вниз (вдоль оси ординат).

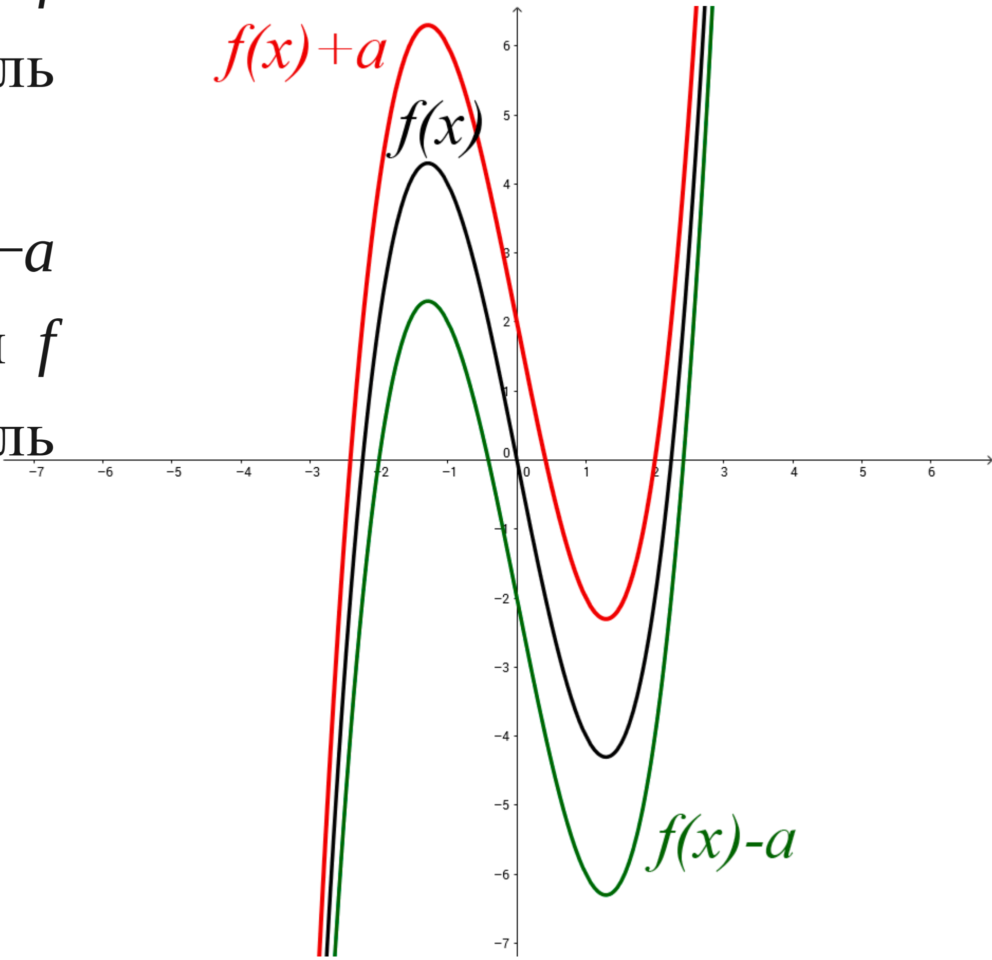


График функции $y = f(x) + b$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y = f(x)$ вдоль оси ординат на b единиц вверх, если $b > 0$, и на $-b$ единиц вниз, если $b < 0$.

На рисунках 5.3, 5.4 показано, как работает это правило для построения графиков функций $y = \sqrt{x} + 3$ и $y = \frac{1}{x} - 1$.

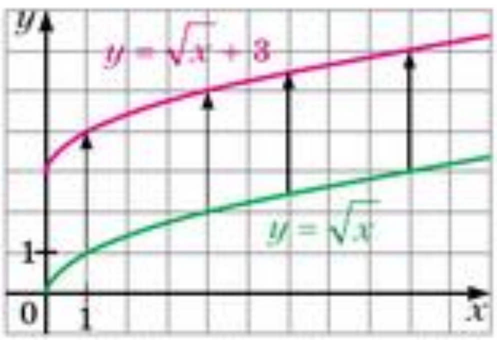


Рис. 5.3

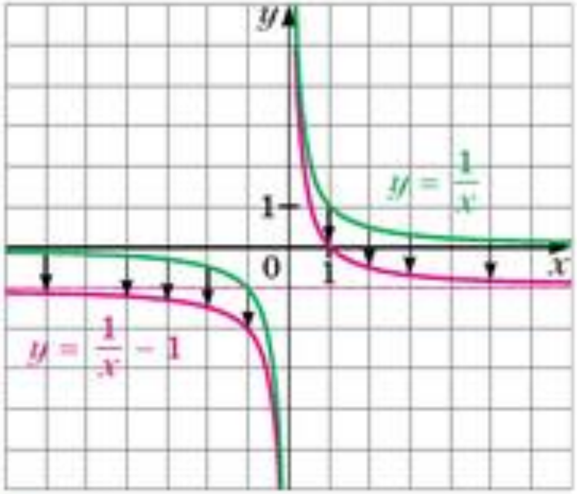
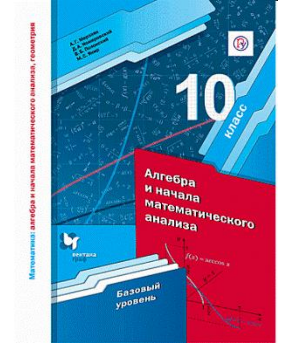
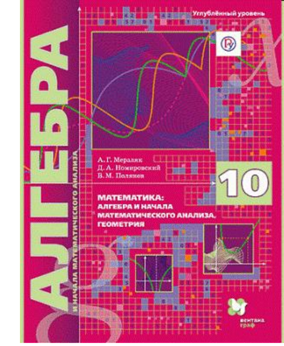
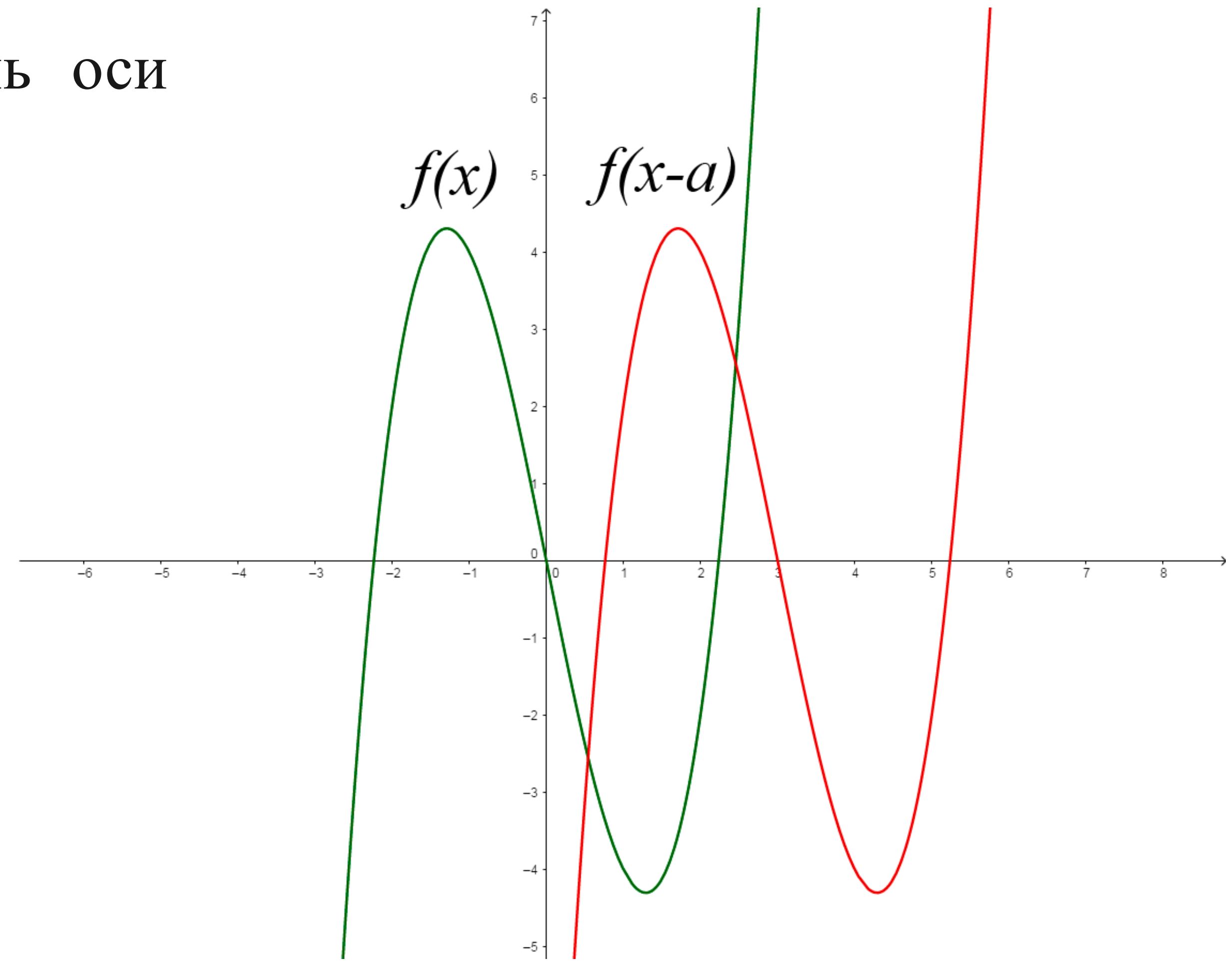


Рис. 5.4

Теорема 2. Пусть $X \subset \boldsymbol{R}$, $f : X \to \boldsymbol{R}$ и $a > 0$. Тогда график функции $f(x-a)$ получается из графика функции f сдвигом на a единиц вправо (вдоль оси абсцисс).



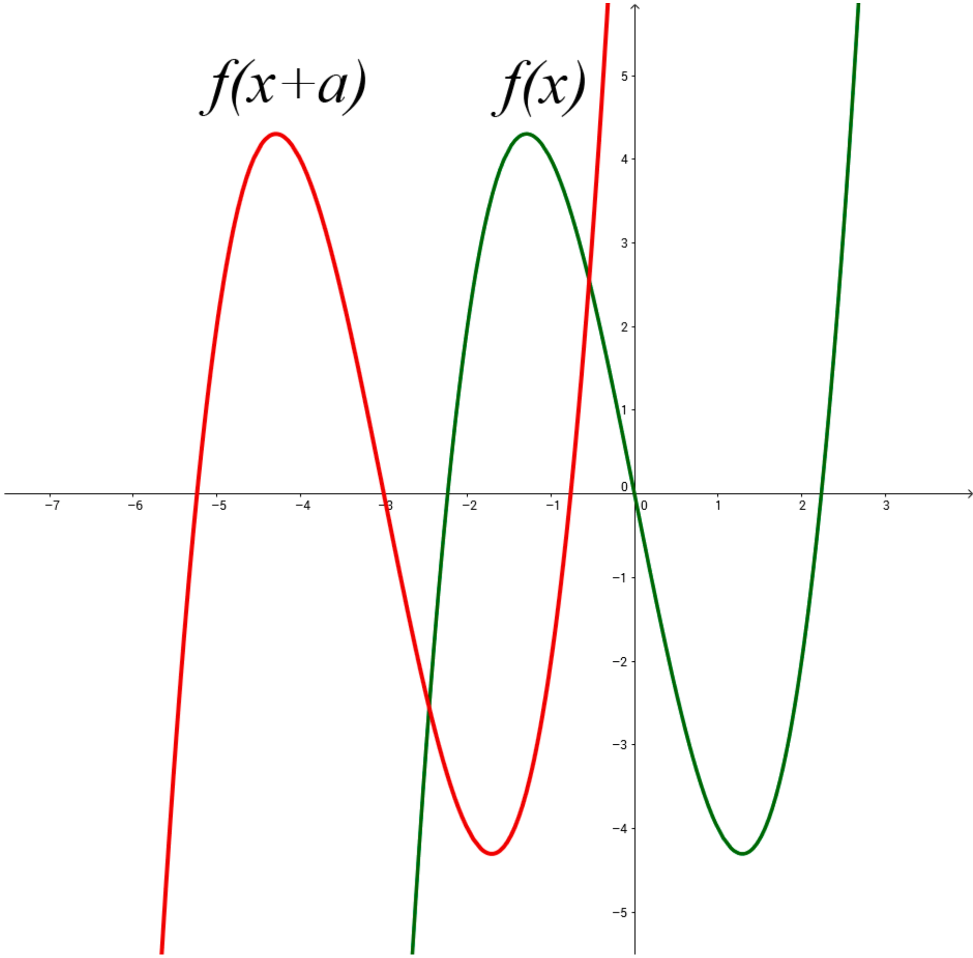




Теорема 2. Пусть $X \subset \boldsymbol{R}$, $f : X \to \boldsymbol{R}$ и $a > 0$. Тогда график функции $f(x - a)$ получается из графика функции f сдвигом на a единиц вправо (вдоль оси абсцисс).

Доказательство: Пусть $M_1 = \Gamma(f(x)) = \{(x;y)\colon\ y = f\ (x)\}$, $M_2 = \Gamma(f(x - a)) = \{(x;y)\colon y = f(x - a)\}$. Сделаем замену $t = x - a$. $M_2 = \Gamma(f(t)) = \{(t + a;y)\colon y = f(t)\}$. Сравним M_1 и M_2.

Теорема 3. Пусть $X \subset \boldsymbol{R}$, $f : X \to \boldsymbol{R}$ и $a > 0$. Тогда график функции $f(x+a)$ получается из графика функции f сдвигом на a единиц влево (вдоль оси абсцисс).



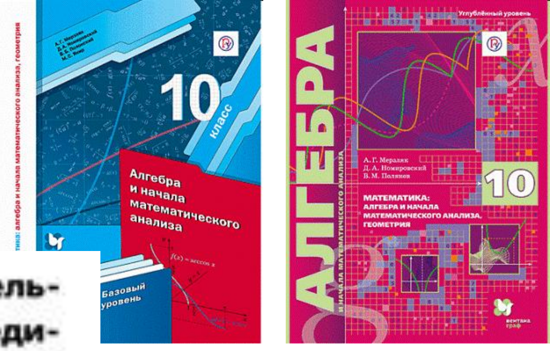


График функции $y = f(x + a)$ можно получить в результате параллельного переноса графика функции $y = f(x)$ вдоль оси абсцисс на a единиц влево, если $a > 0$, и на $-a$ единиц вправо, если $a < 0$.

На рисунках 5.7, 5.8 показано, как работает это правило для построения графиков функций $y = \sqrt{x+3}$ и $y = \dfrac{1}{x-1}$.

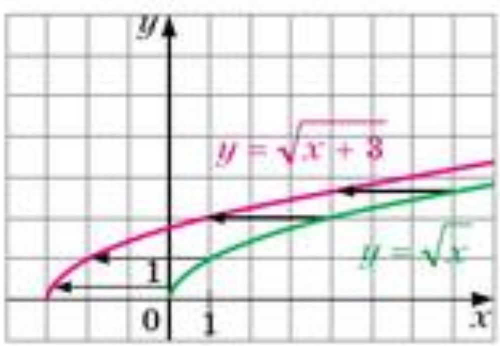


Рис. 5.7

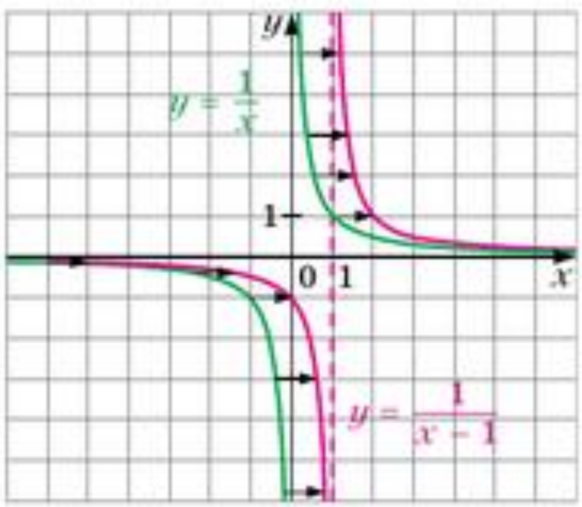


Рис. 5.8

Теорема 4. Пусть $X \subset \boldsymbol{R}$, $f : X \to \boldsymbol{R}$ и $a > 0$. Тогда график функции $f(ax)$ получается из графика функции f сжатием в a раз вдоль оси абсцисс (при $0 < a < 1$ реально получается растяжение).

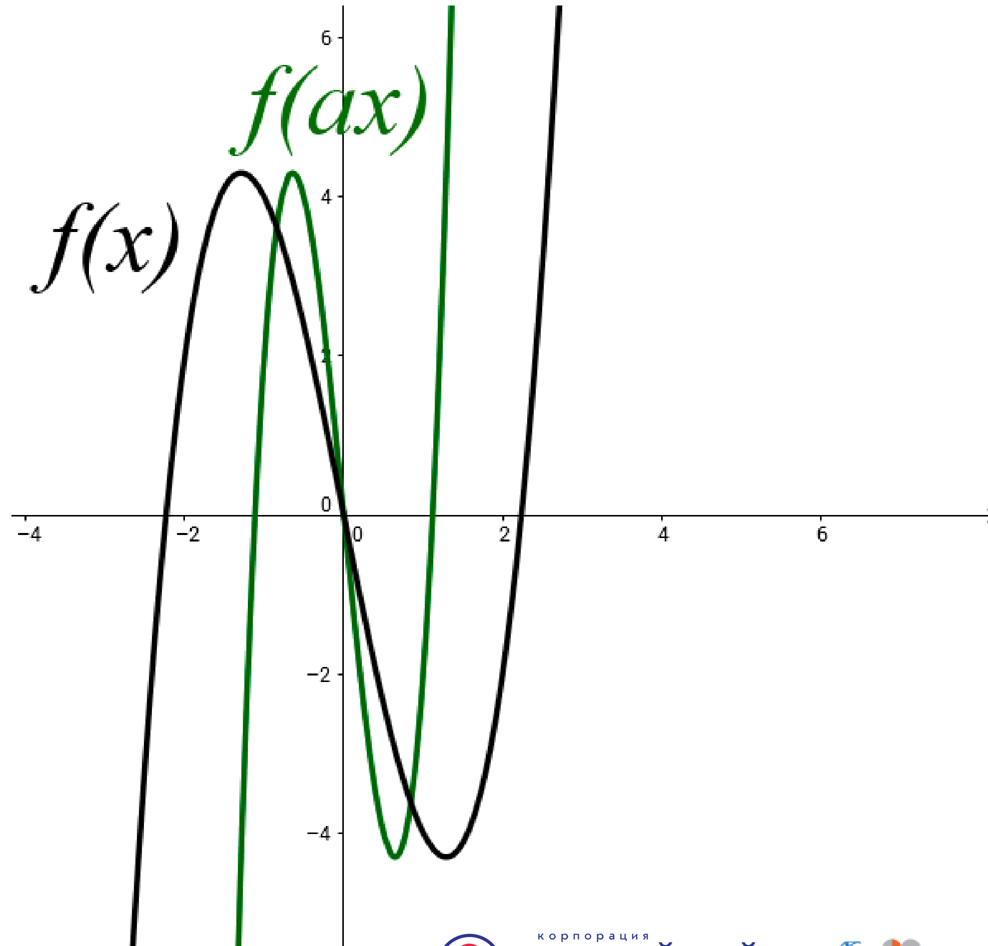


График функции $y = f(kx)$, где $k > 0$, можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = f(x)$ на точку с той же ординатой и абсциссой, разделённой на k.

На рисунке 4.8 показано, как работает это правило для построения графиков функций $y = \sqrt{2x}$ и $y = \sqrt{\dfrac{x}{2}}$.

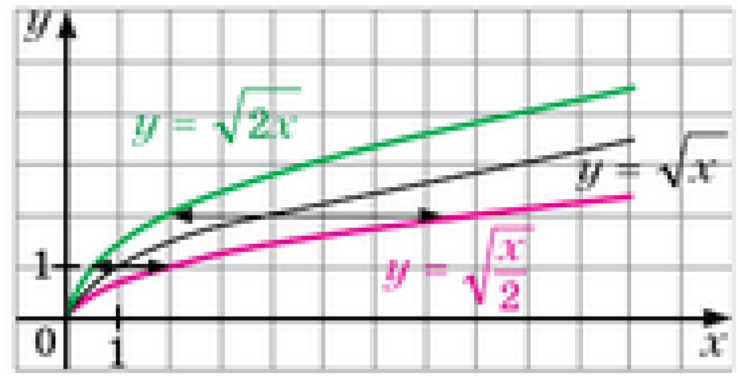
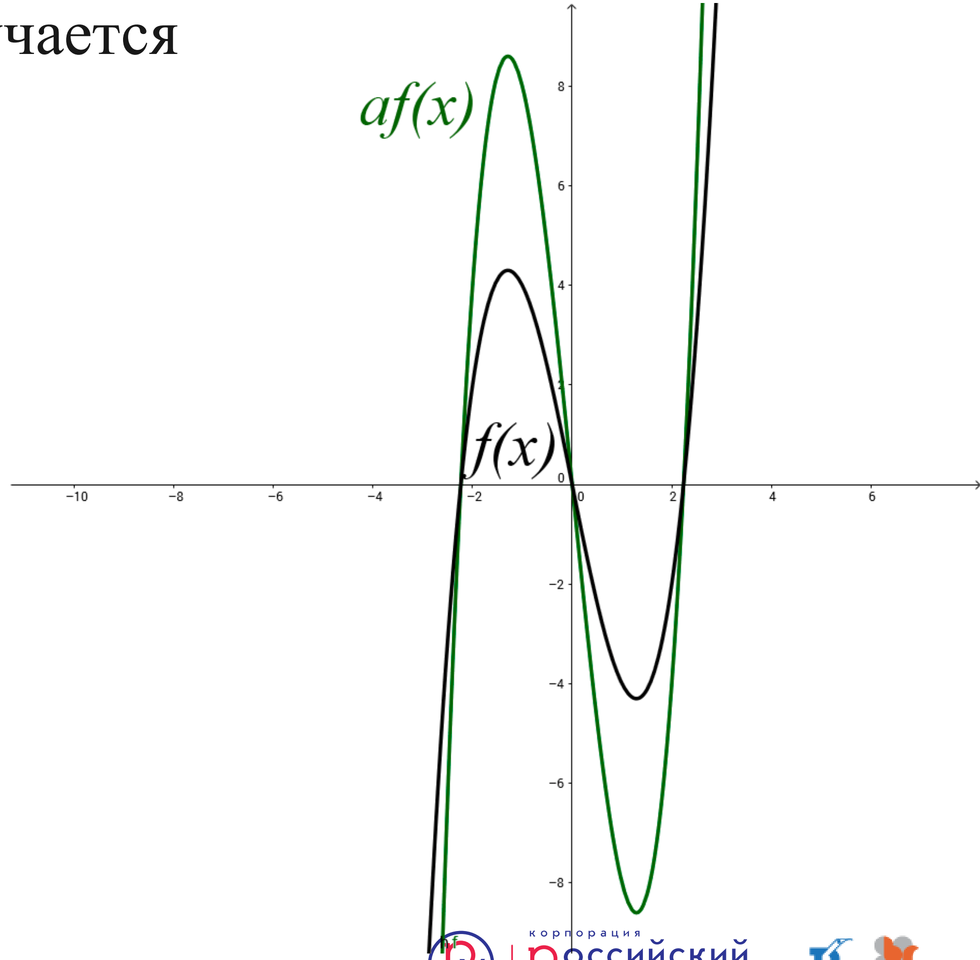


Рис. 4.8

Теорема 5. Пусть $X \subset \boldsymbol{R}$, $f : X \to \boldsymbol{R}$ и $a > 0$. Тогда график функции $af(x)$ получается из графика функции f растяжением в a раз вдоль оси ординат (при $0 < a < 1$ реально получается сжатие).



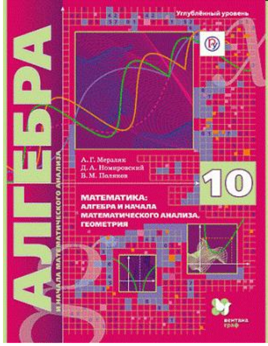


График функции $y = kf(x)$, где $k > 0$, можно получить, заменив каждую точку графика функции $y = f(x)$ на точку с той же абсциссой и ординатой, умноженной на k.

На рисунках 4.4, 4.5 показано, как работает это правило для построения графиков функций $y = \frac{3}{x}$ и $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$.

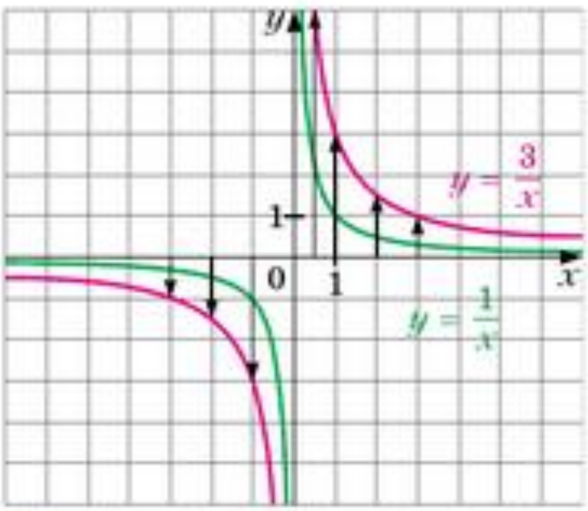


Рис. 4.4

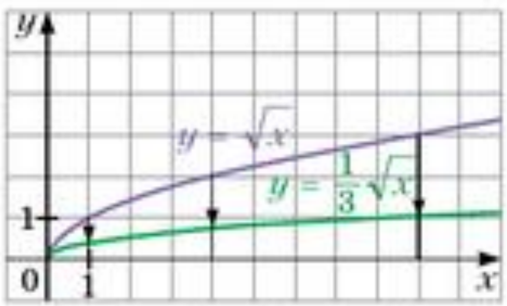
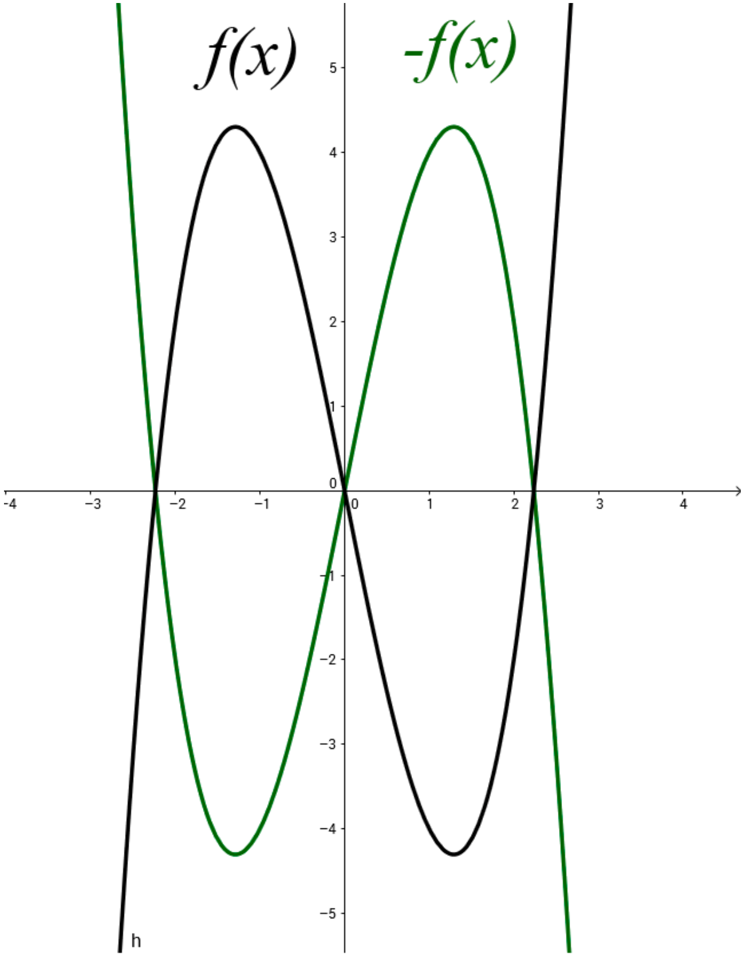
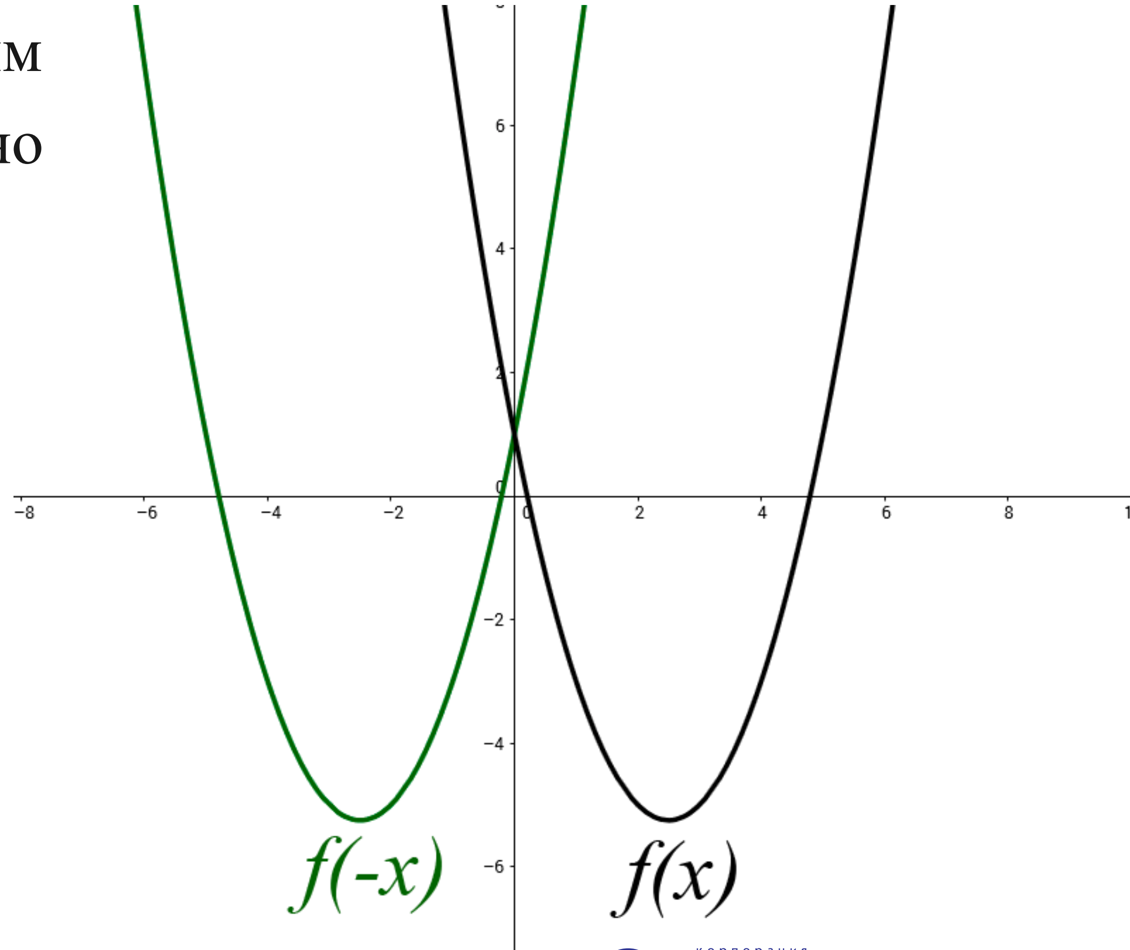


Рис. 4.5

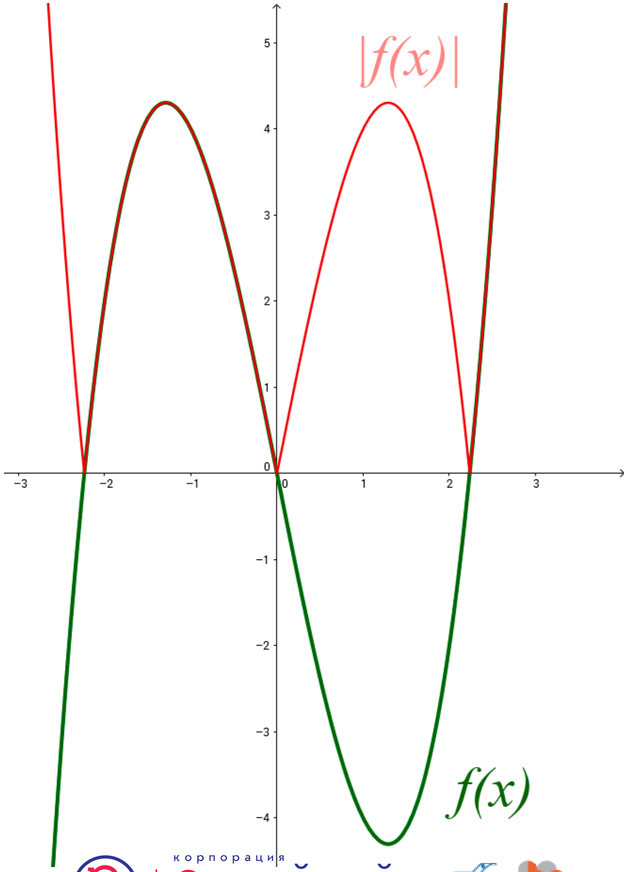
Теорема 6. Пусть $X \subset \boldsymbol{R}$, $f : X \to \boldsymbol{R}$ и $a > 0$. Тогда график функции $-f(x)$ получается из графика функции f симметричным отображением относительно оси абсцисс.



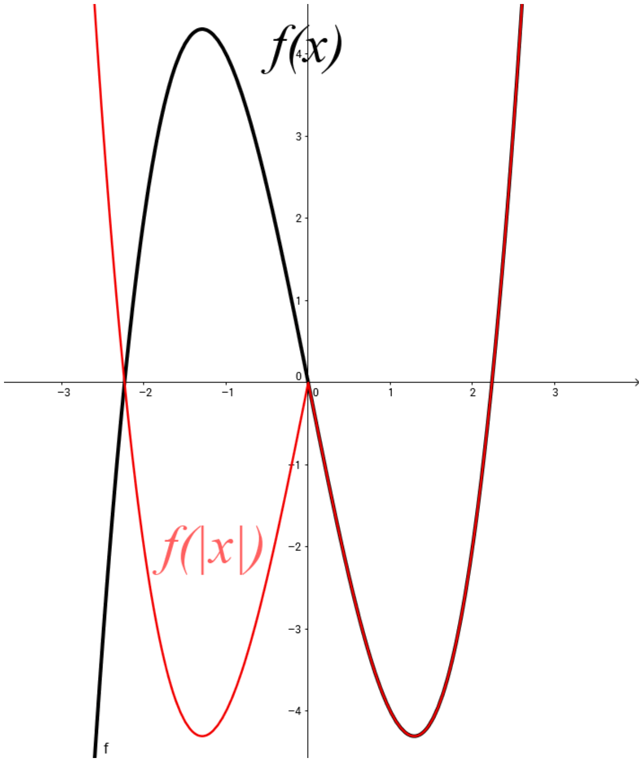
Теорема 7. Пусть $X \subset \boldsymbol{R}$, $f : X \to \boldsymbol{R}$ и $a > 0$. Тогда график функции $f(-x)$ получается из графика функции f симметричным отображением относительно оси ординат.



Теорема 8. Пусть $X \subset \boldsymbol{R}$, $f : X \to \boldsymbol{R}$ и $a > 0$. Тогда график функции $|f(x)|$ получается из графика функции f симметричным отображением относительно оси абсцисс той части графика, которая лежит ниже этой оси (часть графика функции f, лежащая выше оси абсцисс, остаётся неизменной).



Теорема 9. Пусть $X \subset \boldsymbol{R}$, $f : X \to \boldsymbol{R}$ и $a > 0$. Тогда график функции $f(|x|)$ получается из графика функции f следующей операцией: часть графика, лежащая левее оси ординат заменяется на образ остальной части графика при симметрии относительно оси ординат (часть графика функции f, лежащая правее оси ординат не изменяется.)



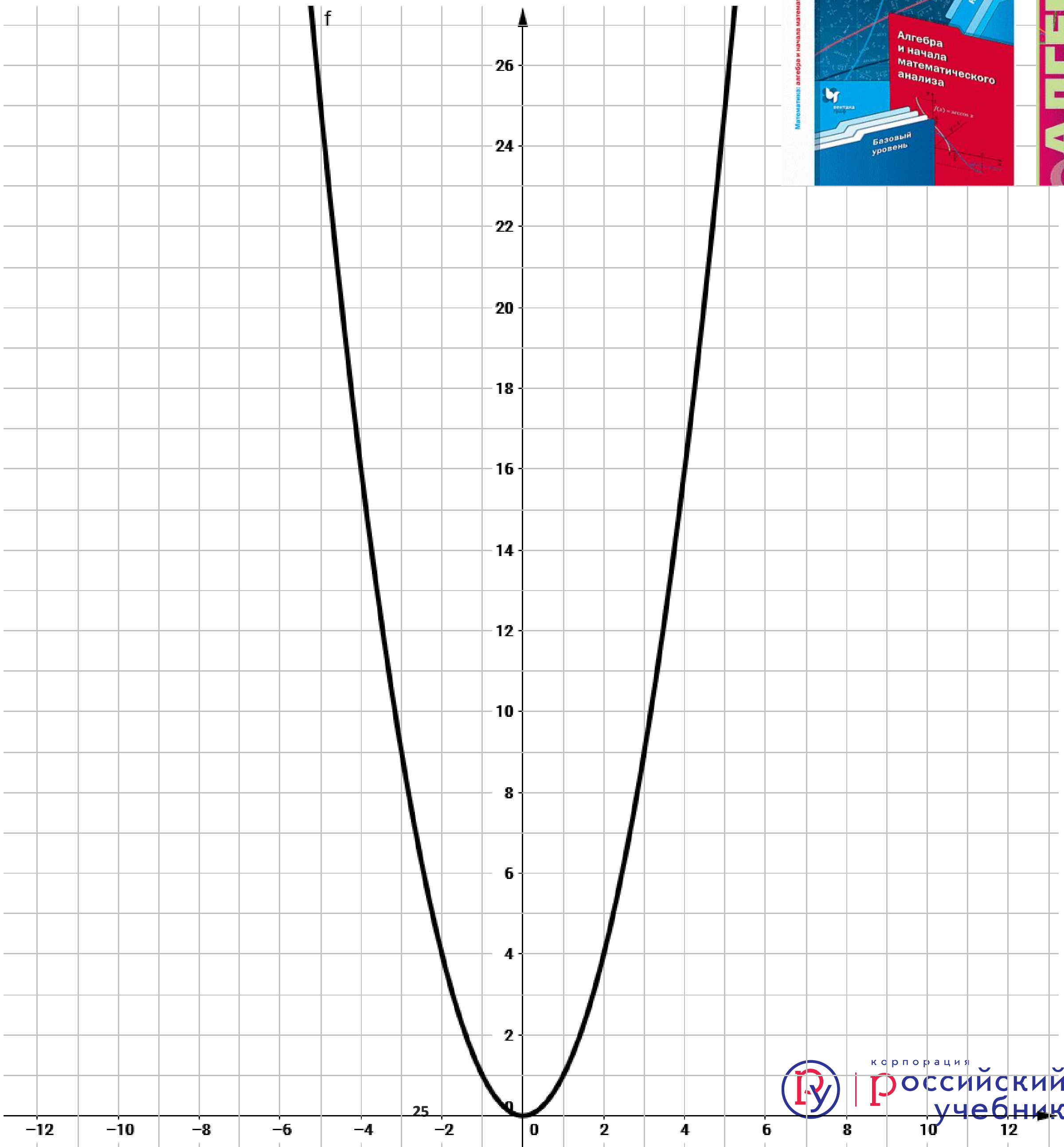
Пример 1. Постройте эскиз графика функции $f(x) = 5x + |x^2 - 6x + 5|$.

Преобразуем функцию (выделим полный квадрат)

$f(x) = 5x + |(x - 3)^2 - 9 + 5| = 5x + |(x - 3)^2 - 4|$

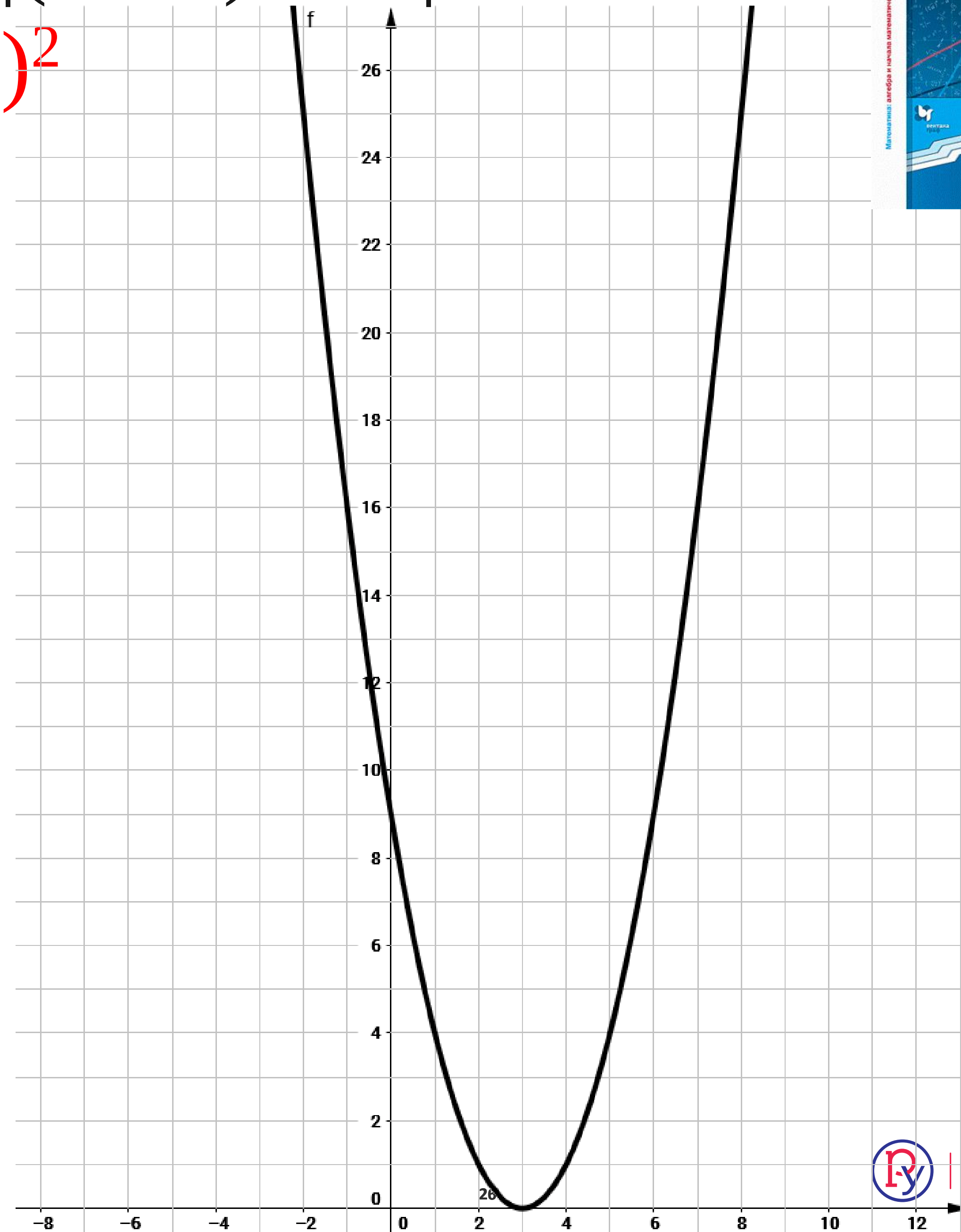
$f(x) = 5x + |(x - 3)^2 - 4|$

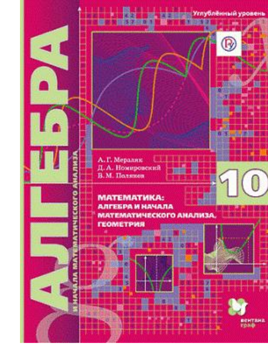
$f(x) = x^2$



$f(x) = 5x + |(x-3)^2 - 4|$

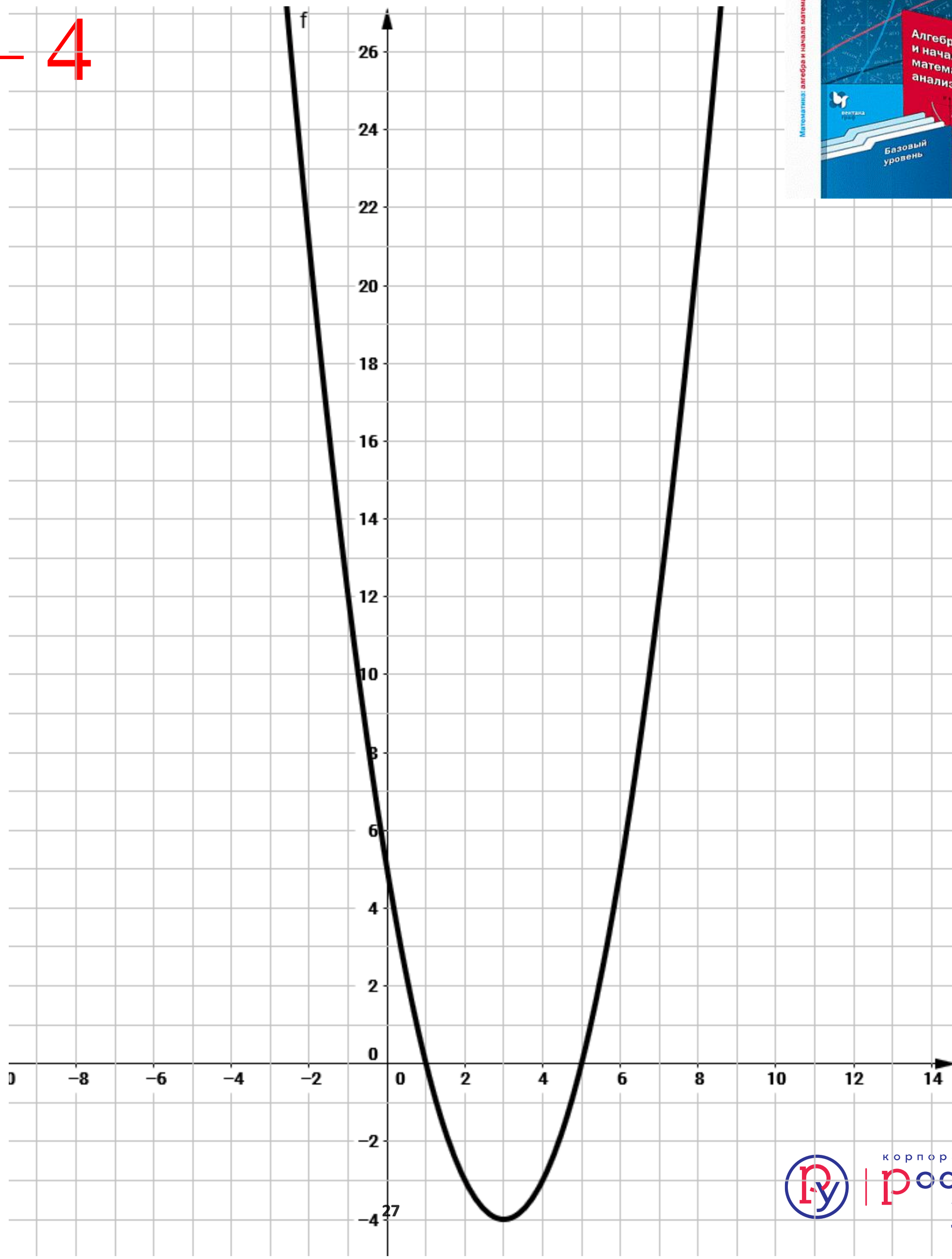
$f(x) = (x-3)^2$

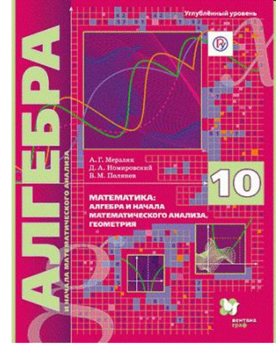




$f(x) = 5x + |(x - 3)^2 - 4|$

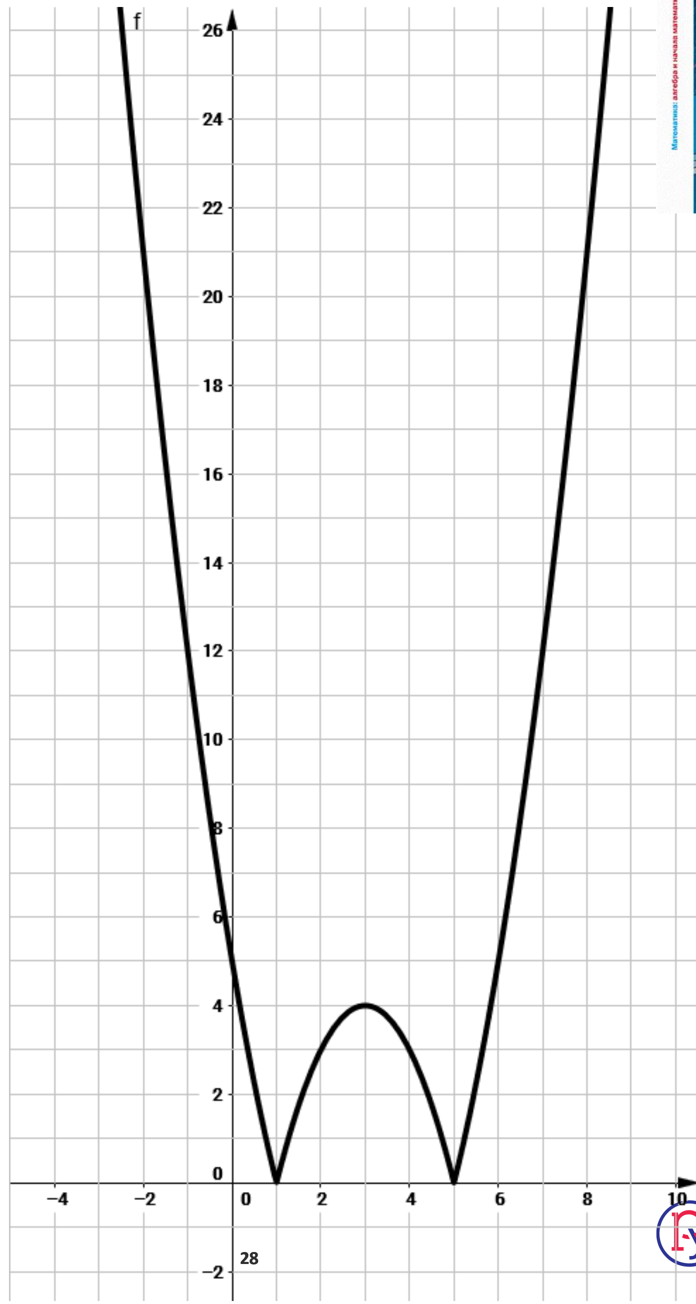
$f(x) = (x - 3)^2 - 4$





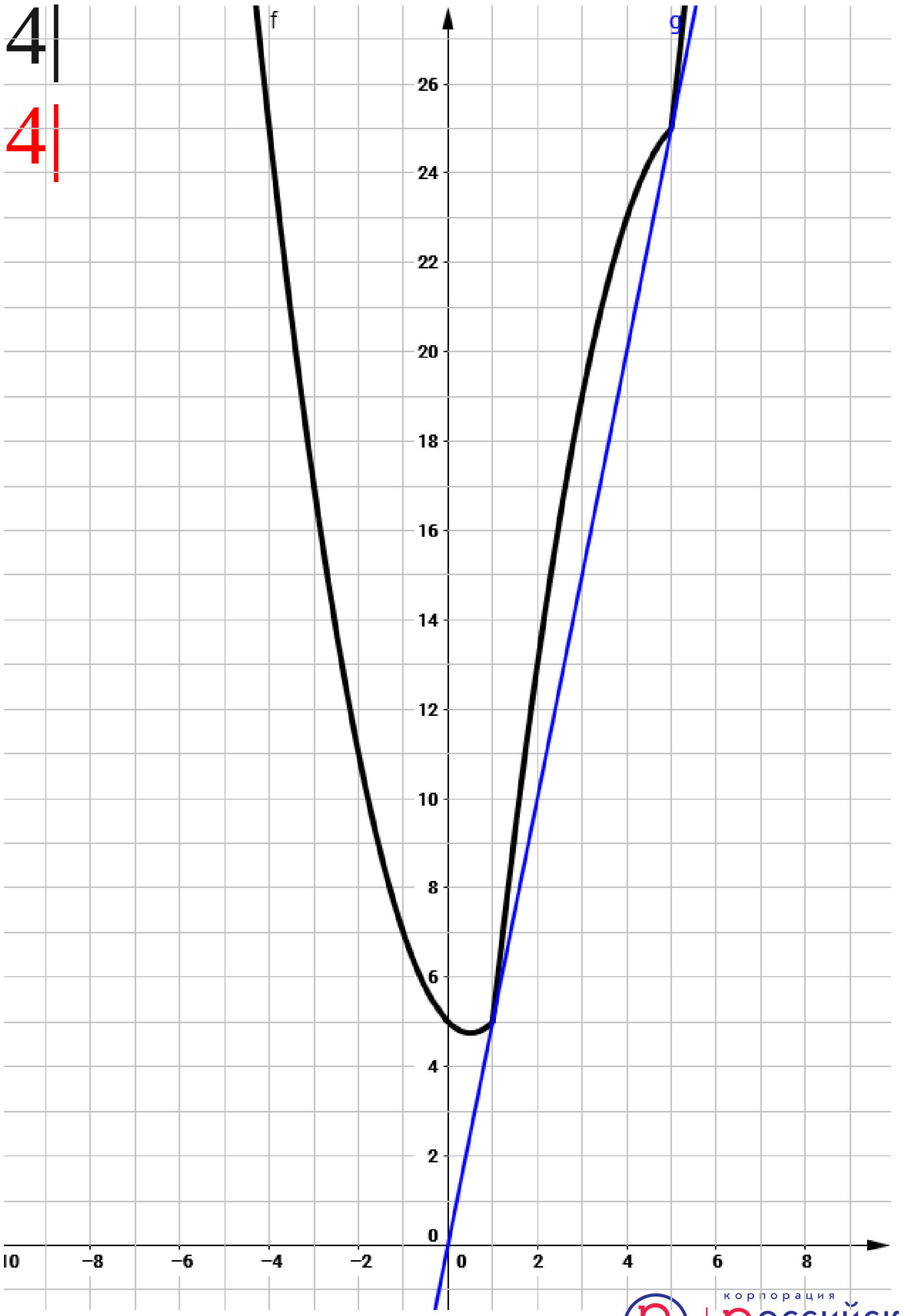
$f(x) = 5x + |(x - 3)^2 - 4|$

$f(x) = |(x - 3)^2 - 4|$

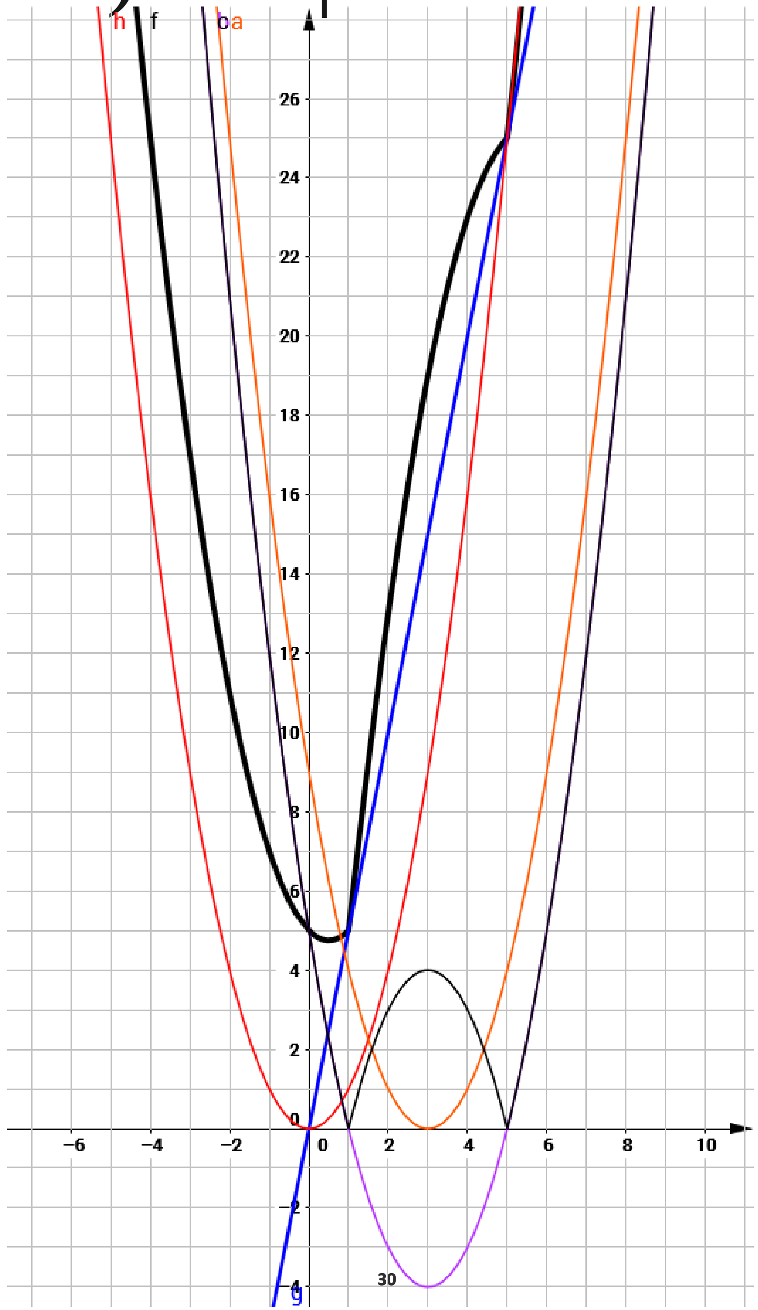


$$f(x) = 5x + |(x-3)^2 - 4|$$

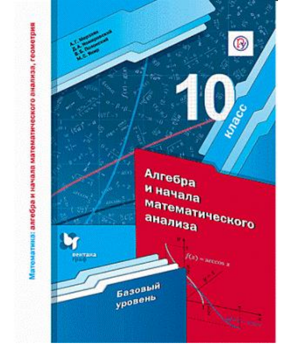
$$f(x) = 5x + |(x-3)^2 - 4|$$



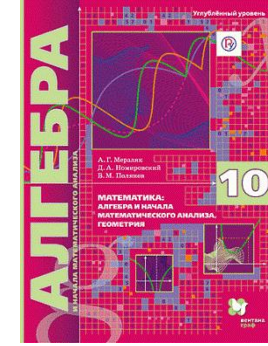
$$f(x) = 5x + |(x-3)^2 - 4|$$



h
f
b
a
g
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−4
−2
0
2
4
6
8
10



10
класс
Алгебра и начала математического анализа
Базовый уровень



Углублённый уровень
АЛГЕБРА
10
МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

Пример 1. Постройте эскиз графика функции $f(x) = 5x + |x^2 - 6x + 5|$.

Определим общий вид графика: ***композиция двух парабол.***

Нарисуем эти параболы

1. $f_1(x) = x^2 - x + 5$ — *вершина (0,5;4,75) ветки вверх обычный раствор*.

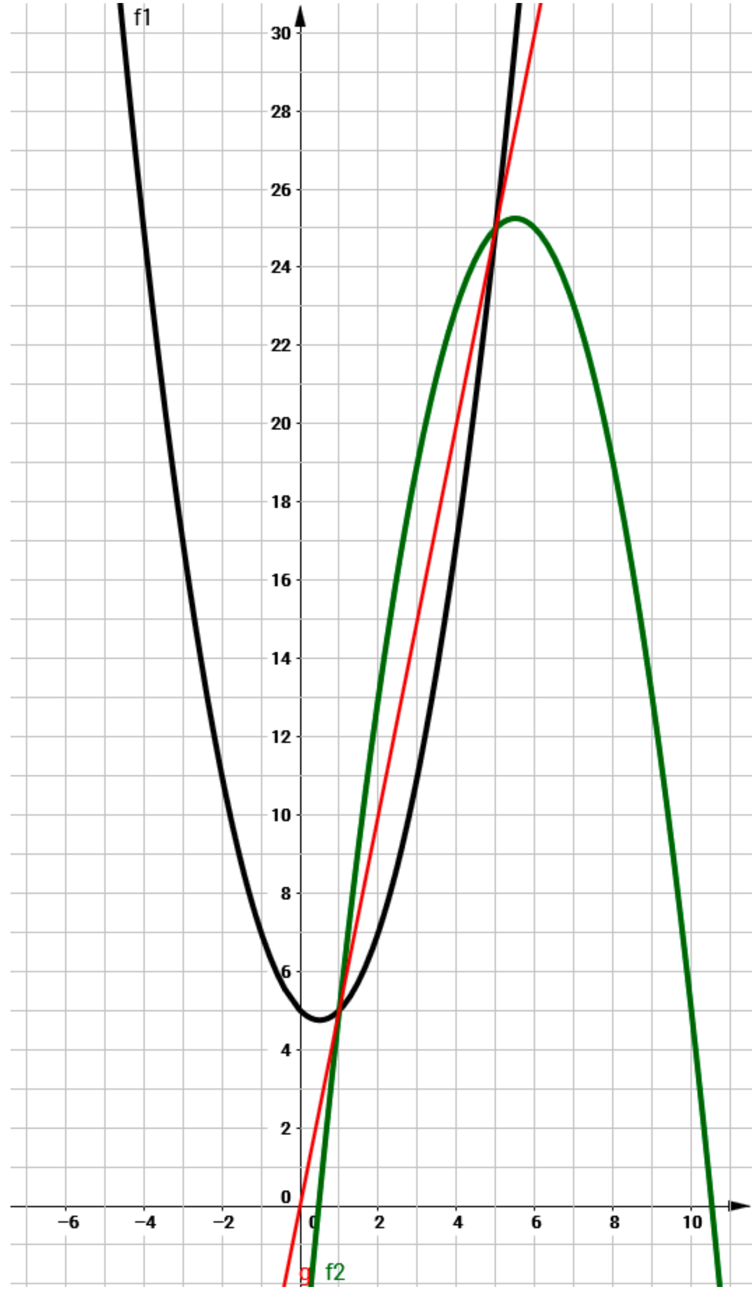
2. $f_2(x) = -x^2 + 11x - 5.$ — *вершина (5,5;25,25) ветки вниз обычный раствор.*

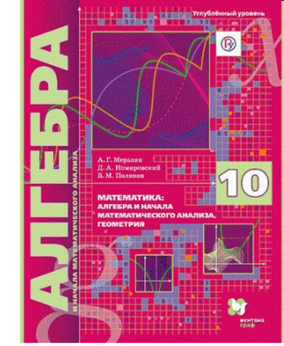
Можно нарисовать вспомогательную прямую $y = 5x$

$$f_1(x) = x^2 - x + 5,$$

$$f_2(x) = -x^2 + 11x - 5,$$

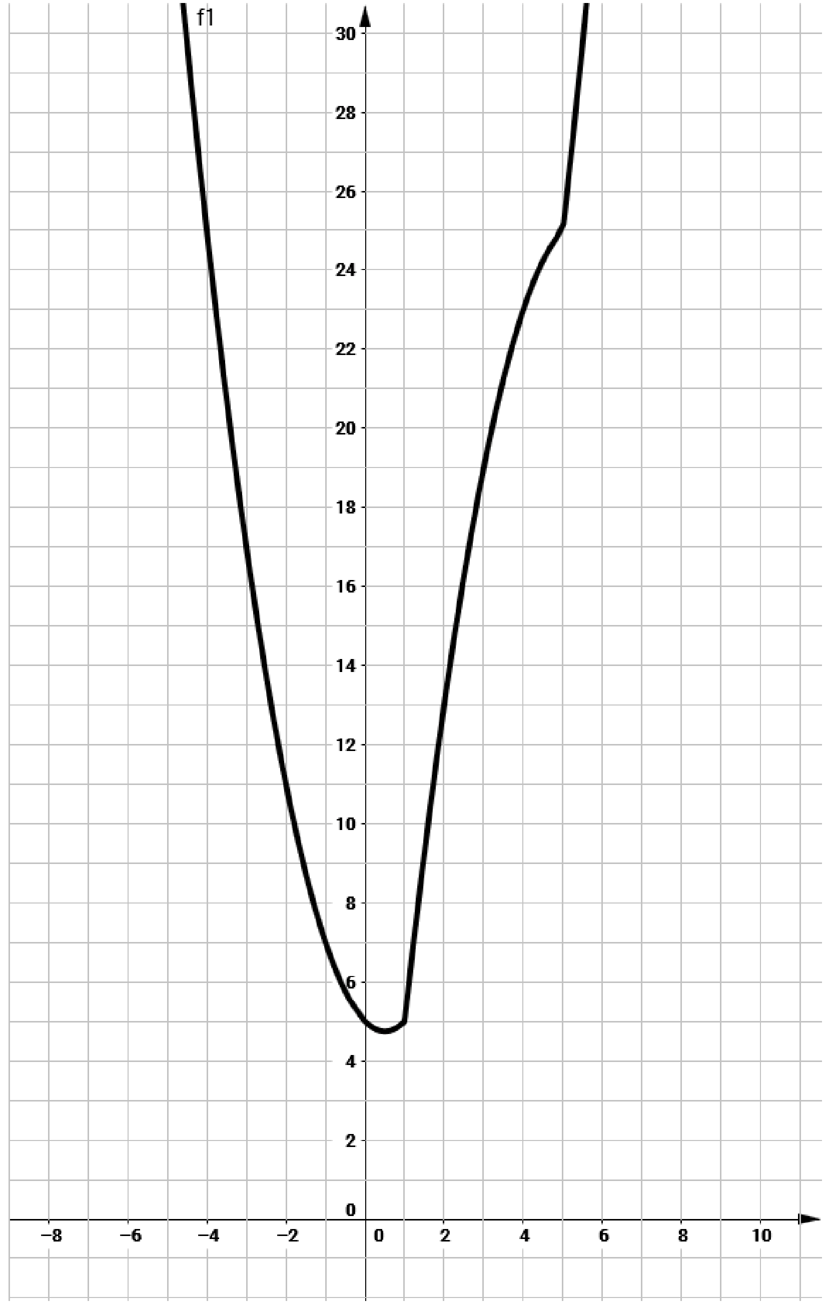
$$g(x) = 5x$$

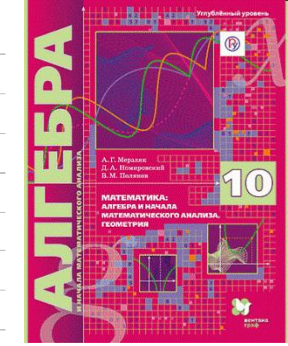




Сотрем лишнее и получим

$f(x) = 5x + |(x - 3)^2 - 4|$

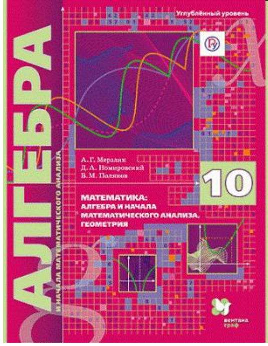




Пример 2. (Эта задача взята из варианта Централизованного Тестирования, преемником которого является современный ЕГЭ.)

Найдите площадь фигуры на координатной плоскости, ограниченной линией

$$x^2 - 8|x| + y^2 - 12|y| = 0.$$



Пример 2 (решение)

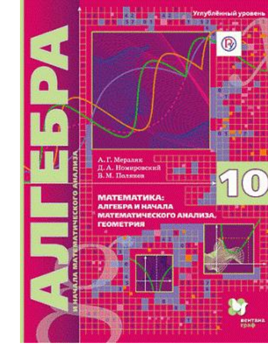
Построим эскиз фигуры $x^2 - 8|x| + y^2 - 12|y| = 0$.

Выясним общий вид:

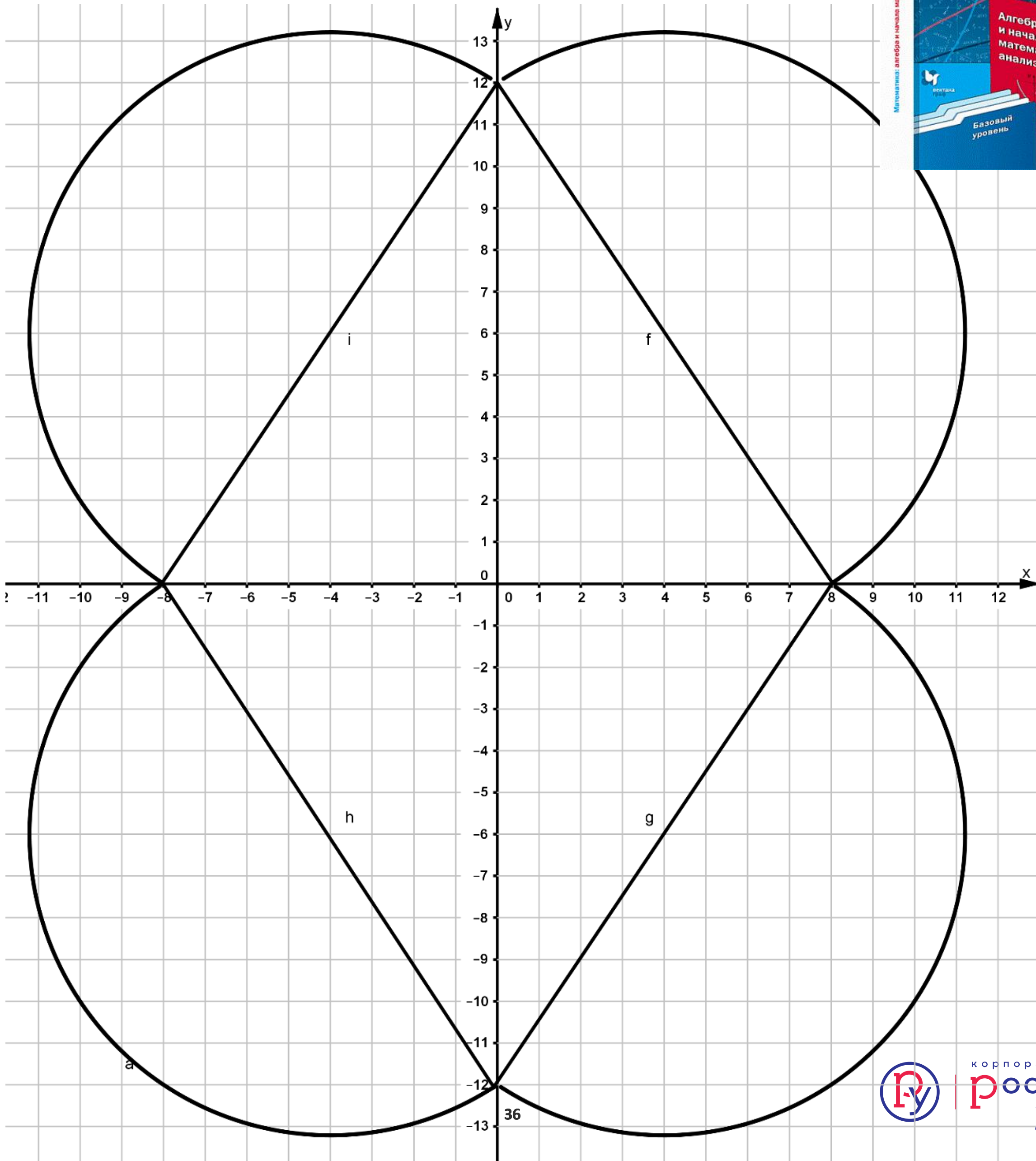
1. Фигура симметрична относительно всех осей (четность и по x и по y).
2. Снимем модули и выделим полные квадраты $x^2 - 8x + y^2 - 12y = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-6)^2=52$
3. Центр окружности (4;6), эта окружность пересекается с осями в точках (0;0), (8;0), (0;12).
4. Рисуем часть окружности с заданным центром и проходящую через заданные точки лежащую в первой четверти
5. Размножаем используя симметрию.

$$x^2 - 8|x| + y^2 - 12|y| = 0$$

10
класс
Алгебра и начала математического анализа
Базовый уровень



Углублённый уровень
АЛГЕБРА
10
МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ



y
x
i
f
h
g
a

Пример 2 (продолжение)

Точки (8;0), (4;6), (0;12) лежат на одной прямой, по этому отрезок соединяющий точки (8;0) и (0;12) — диаметр. Теперь видно, что искомая фигура состоит из ромба с диагоналями 16 и 24 и четырёх полукругов радиуса $\sqrt{52}$. Искомая площадь равна $1/2\cdot 16 \cdot 24+2\pi \cdot 52 = 192+104\pi$.

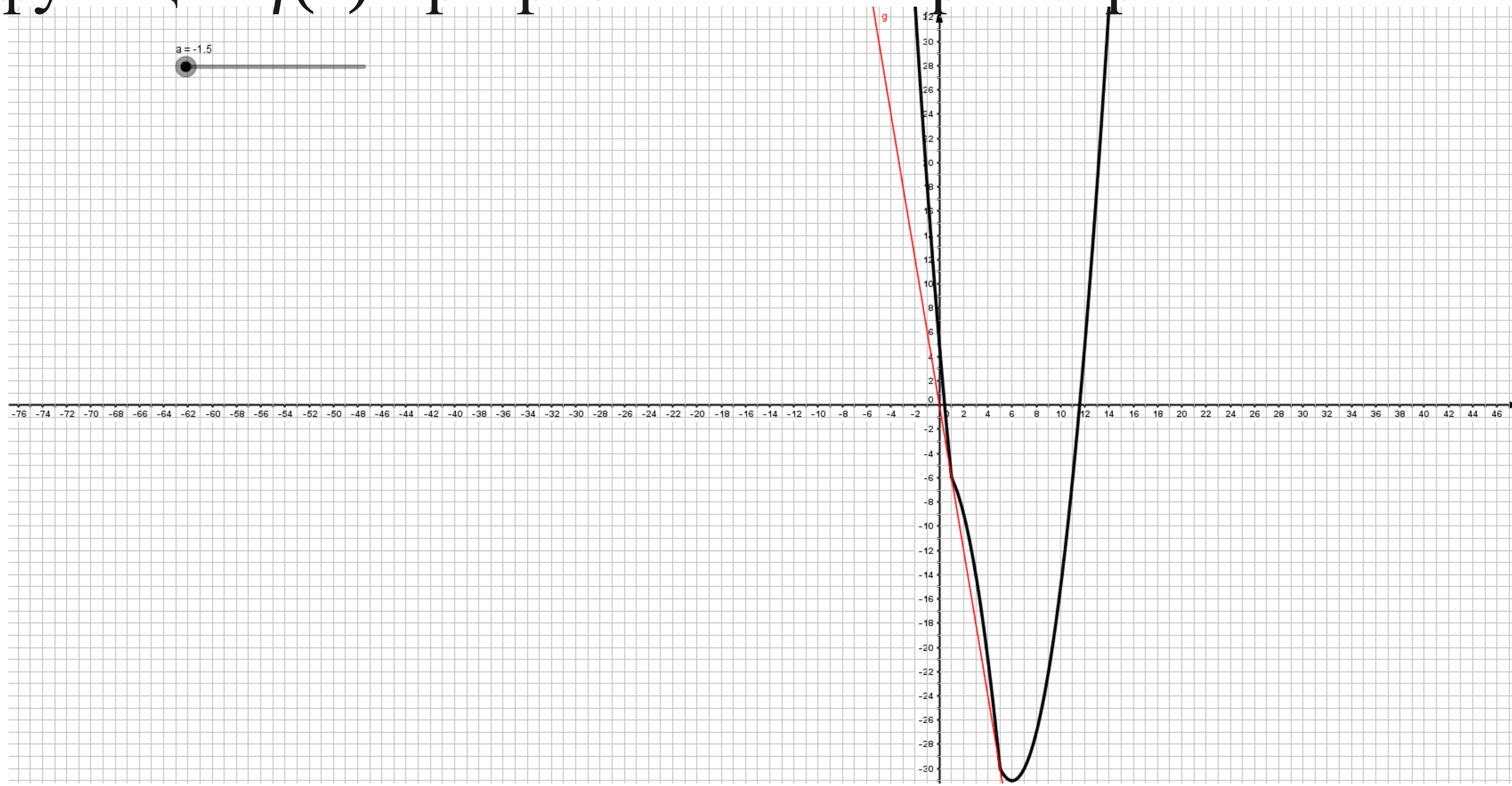
Пример 3

Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 6x + 5|$ больше, чем -24.

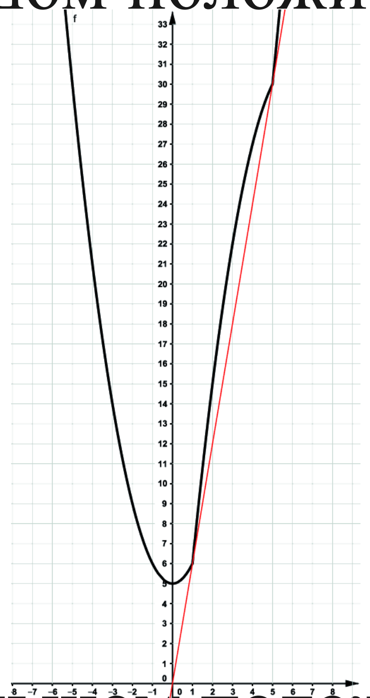
Решение: Посмотрим несколько эскизов графиков функции $f(x)$ при различных параметрах a.

Пример 3 (решение)

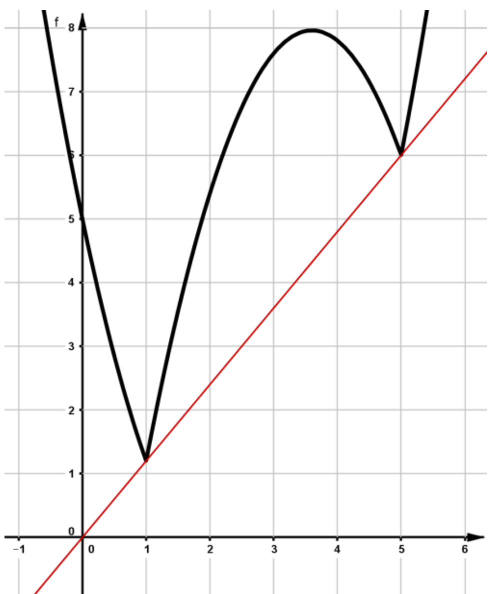
Посмотрим несколько эскизов графиков функции $f(x)$ при различных параметрах a.

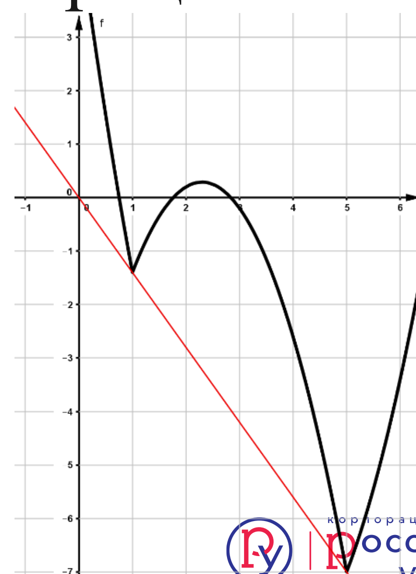


При большом положительном a, отрицательном a



При небольшом положительном a, отрицательном a





Пример 3 (продолжение)

Что мы должны увидеть по графикам? Что минимум функции расположен в одной из трех точек $x = 1$, $x = 5$, $x = 3 - 2a$. Подставим эти точки в функцию получим 3 выражения которые должны быть больше -24.

$$\begin{cases} 4a > -24 \\ 20a > -24 \\ 4a(3-2a) + (3-2a)^2 - 6(3-2a) + 5 > -24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > -6 \\ a > -\frac{6}{5} \\ (4a-6)(3-2a) + (3-2a)^2 + 29 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > -\frac{6}{5} \\ -2(3-2a)^2 + (3-2a)^2 + 29 > 0 \end{cases}$$

корпорация российский учебник дрофа вентана граф

Пример 3 (продолжение)

Эта система равносильна следующей

$$\begin{cases} a > -\frac{6}{5} \\ -2(3-2a)^2 + (3-2a)^2 + 29 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > -\frac{6}{5} \\ -(3-2a)^2 + 29 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > -\frac{6}{5} \\ (3-2a)^2 < 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\frac{6}{5} \\ -\sqrt{29} < (3-2a) < \sqrt{29} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > -\frac{6}{5} \\ \frac{3-\sqrt{29}}{2} < a \\ \frac{3+\sqrt{29}}{2} > a \end{cases}$$

Пример 3 (продолжение)

Сравним $-\frac{6}{5}$ и $\frac{3-\sqrt{29}}{2}$

$$-\frac{6}{5} < \frac{3-\sqrt{29}}{2} \Leftrightarrow -\frac{12}{5} < 3-\sqrt{29}$$

$$\frac{27}{5} > \sqrt{29} \Leftrightarrow 5,4 > \sqrt{29} \Leftrightarrow 29,16 > 29$$

Ответ: $-\frac{3-\sqrt{29}}{2} < a < \frac{3-\sqrt{29}}{2}$

Пример 4

Найдите все значения параметра *a* при которых система

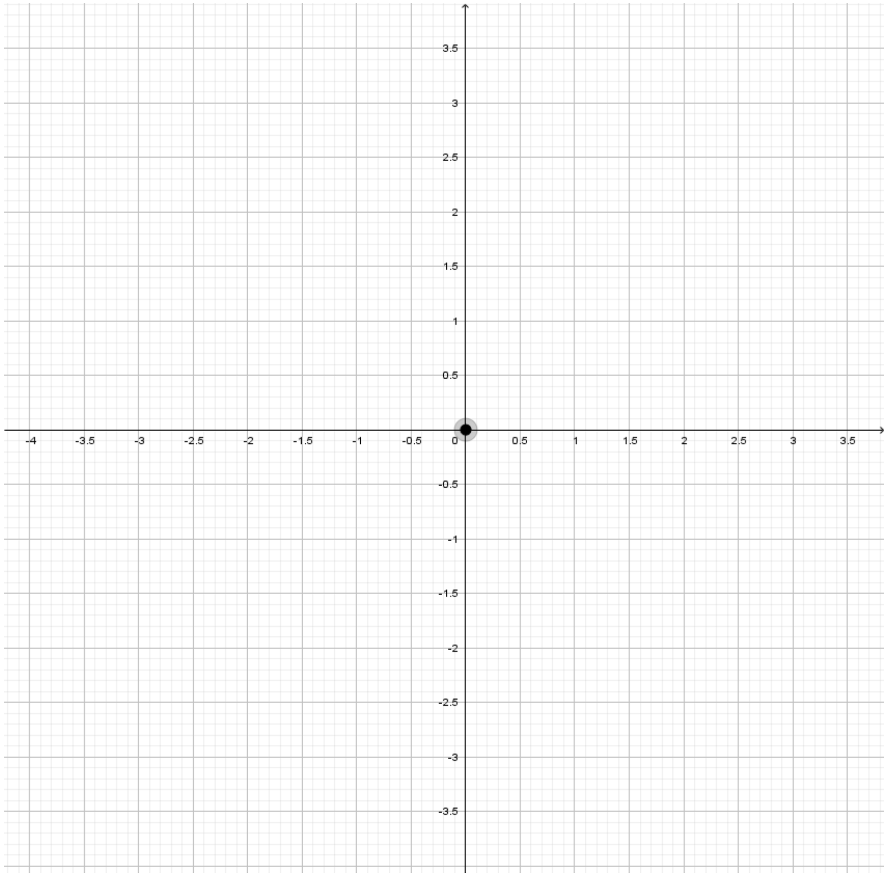
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ |x-1| + |y+1| = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Построим эскиз графиков.

Пример 4 (решение)

Для первого уравнения системы все просто. Это окружность радиуса $\sqrt{a}$.



Пример 4 (решение)

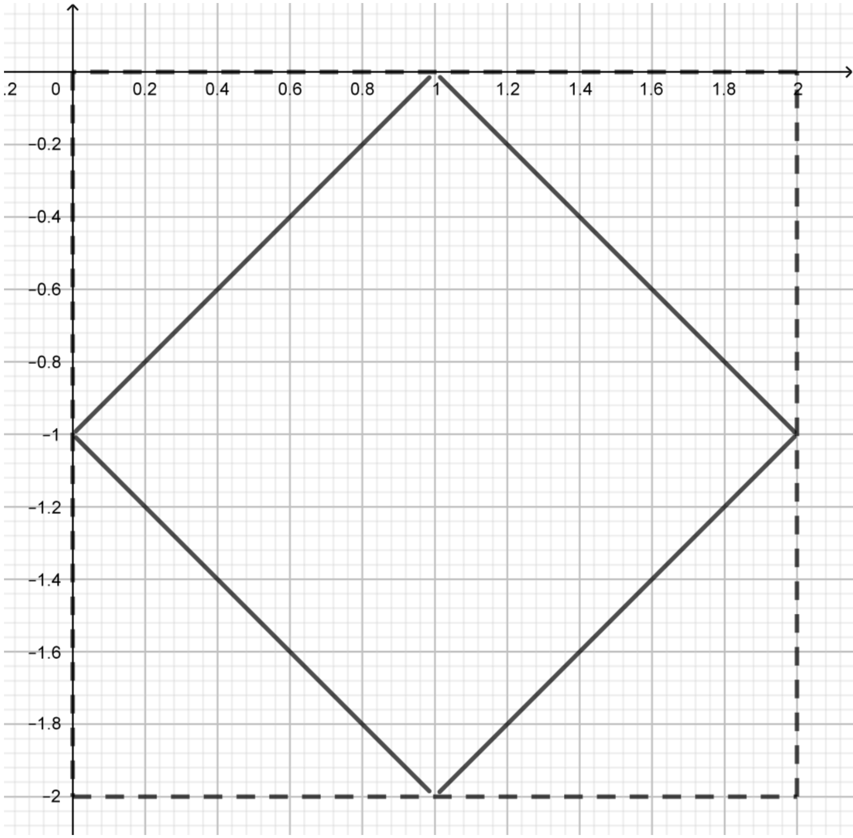
Построим эскиз графика. $|x-1|+|y+1|$

Заметим, что

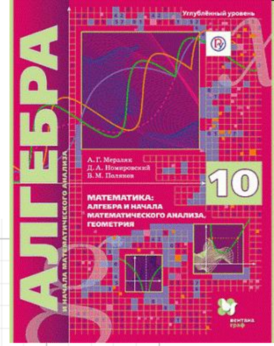
$$\begin{cases} |x-1| \leqslant 1 \\ |y+1| \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ -2 \leqslant y \leqslant 0 \end{cases}$$

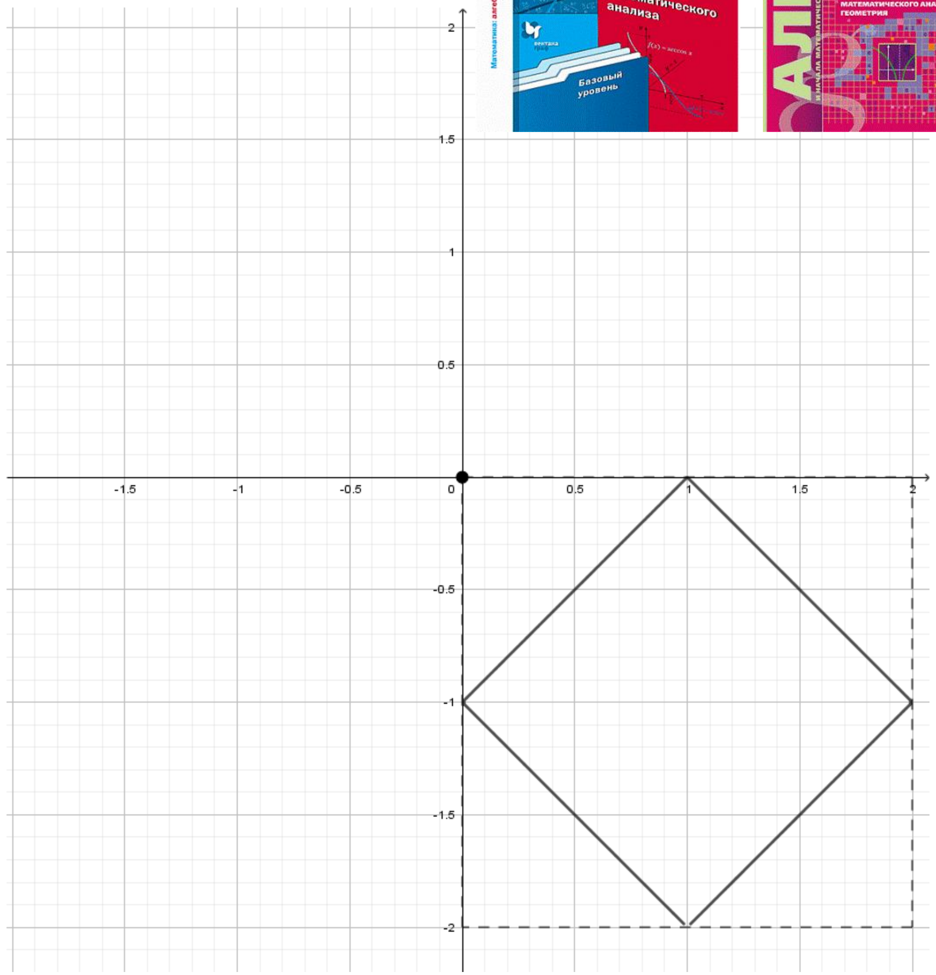
Заметим, так же что графиком является четырехзвенная ломаная с углом наклона ±45°



Пример 4 (решение)



Что мы увидим по графику? Что решение это случай касания окружности и ближайшей началу координат стороны квадрата.

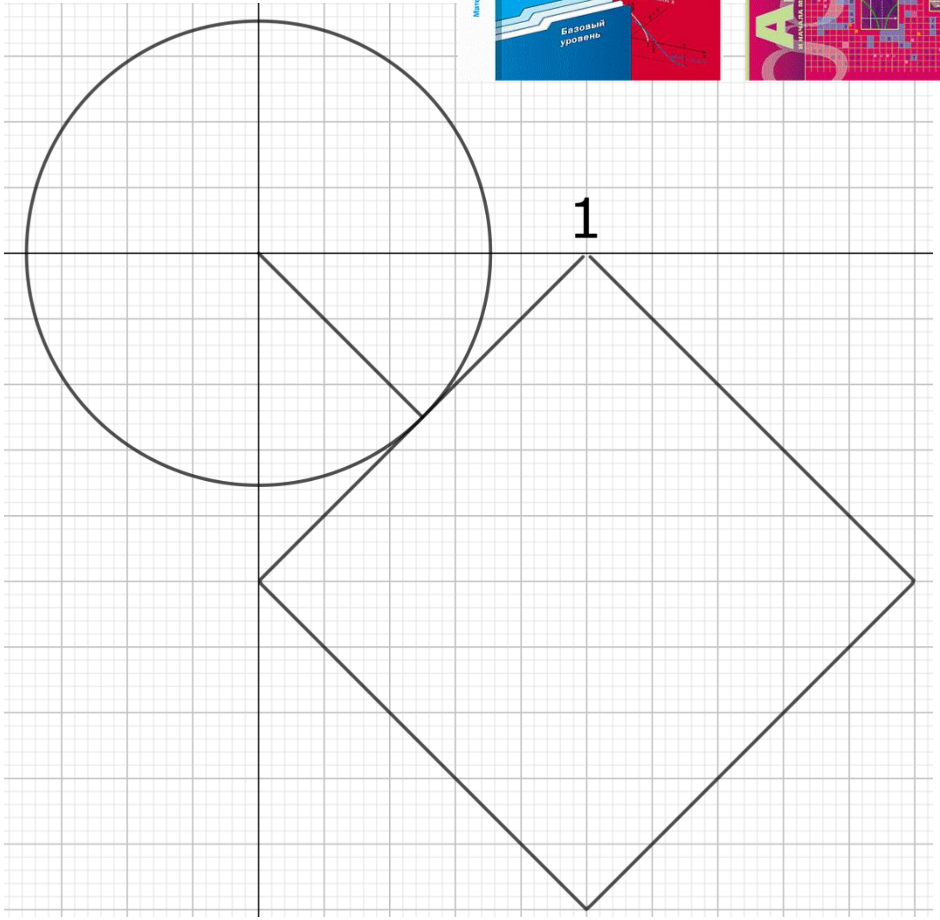


Пример 4 (решение)

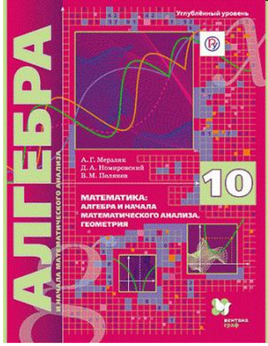
Радиус равен половине стороны квадрата. То есть

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $a=1/2$.



Пример 5

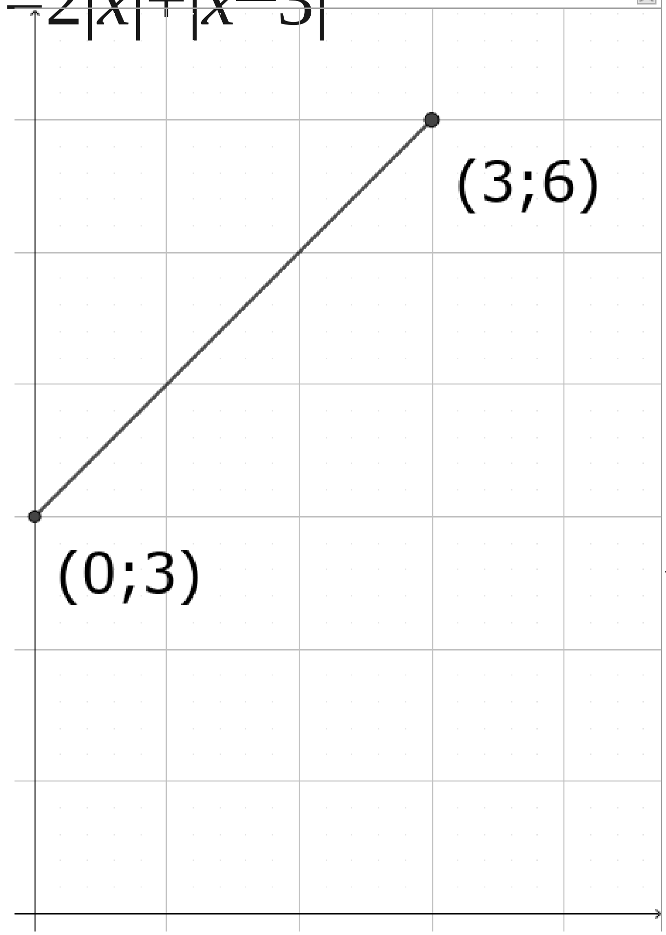


Найдите все значения параметра a, при которых графики функций $f(x)=2|x|+|x-3|$ и $g(\mathrm{x})=2|x-1|+x+a$ пересекаются и точка пересечения единственна.

Пример 5 (решение)

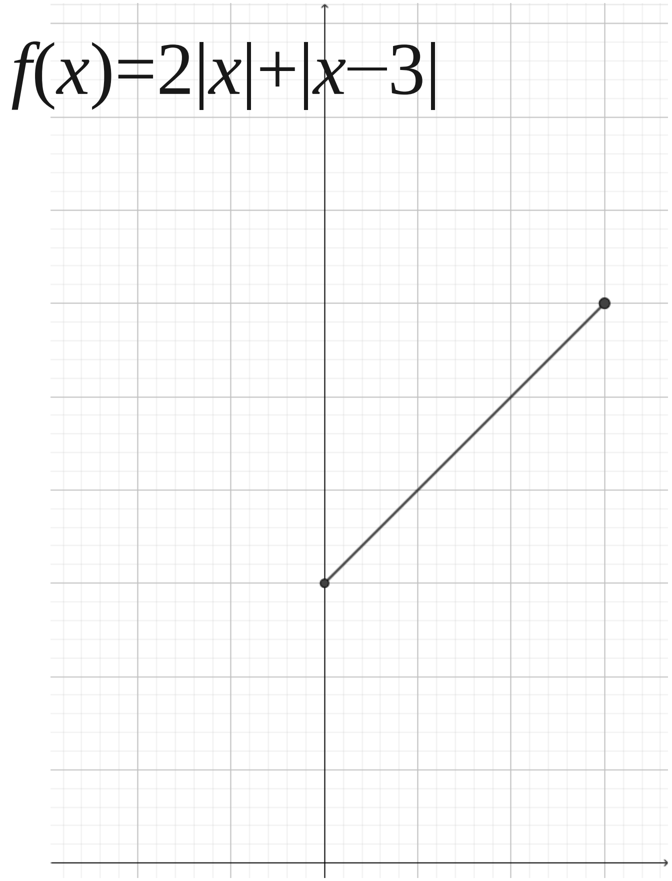
Решение. Построим эскиз графика функции $f(x)$. Графиком этой функции является трехзвенная ломаная. У графика функции $f(x)$ две точки излома (там где выражение под модулем равно 0). Координаты этих точек (0;3) и (3;6). И мы можем построить одно звено ломаной.

$f(x)=2|x|+|x-3|$



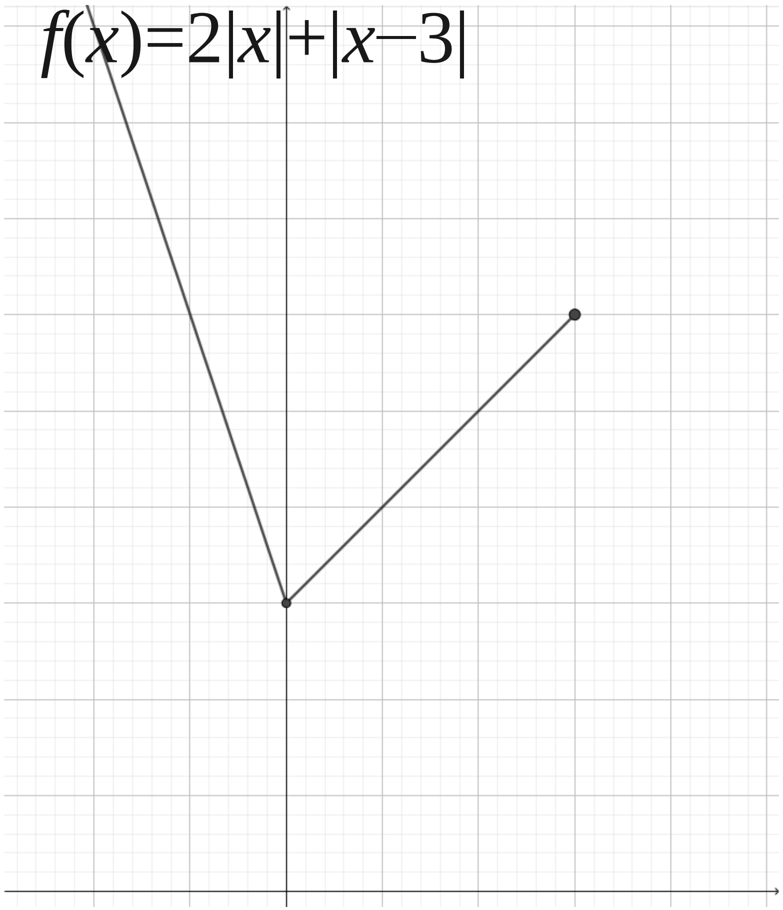
Пример 5 (решение)

Обратим внимание, что если $x < 0$, то есть левее левой точки излома, то оба модуля раскрываются со знаком «–» и коэффициент при x (угловой коэффициент) будет –3 (на одну клеточку по оси $0x$, приходится 3 клеточки по оси $0y$). С таким наклоном проводим луч из точки (0;3)



Пример 5 (решение)

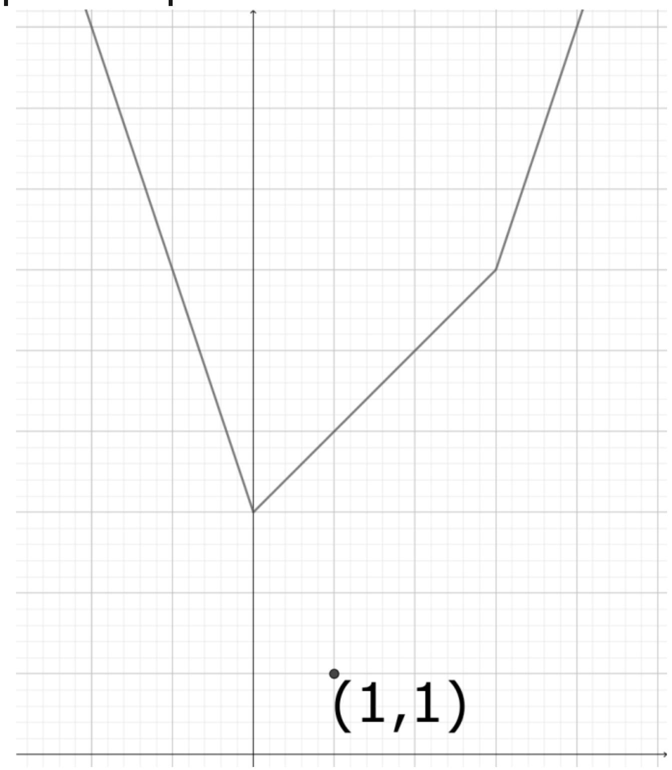
Обратим внимание, что если $x > 3$, то есть правее правой точки излома, то оба модуля раскрываются со знаком «+» и коэффициент при x (угловой коэффициент) будет 3 (на одну клеточку по оси $0x$, приходится 3 клеточки по оси $0y$). С таким наклоном проводим луч из точки (0;3)



Пример 5 (решение)

Построим эскиз графика функции $g(x)$. Для удобства возьмём $a = 0$. Графиком этой функции является двухзвенная ломаная. У графика функции $g(x)$ одна точка излома. Координата этой точки (1;1).

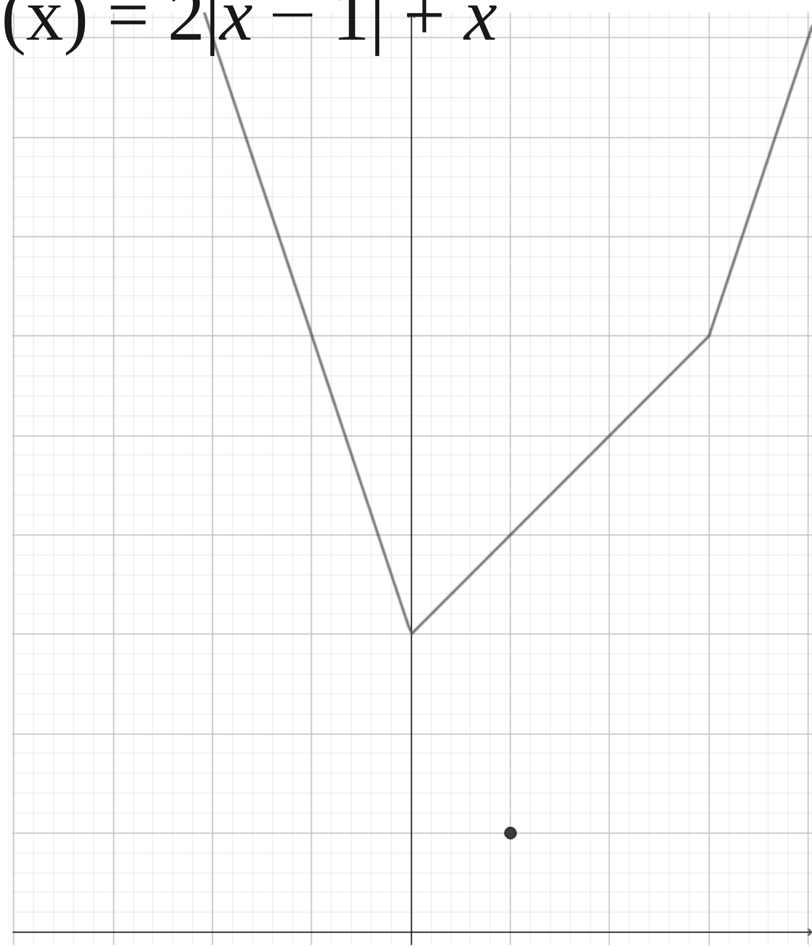
$$g(x) = 2|x - 1| + x + a =$$
$$= 2|x - 1| + x$$



Пример 5 (решение)

Обратим внимание, что если $x < 1$, то есть левее точки излома, то оба модуль раскрываются со знаком «–» и коэффициент при x (угловой коэффициент) будет –1 (на одну клеточку по оси $0x$, приходится 1 клеточка по оси $0y$). С таким наклоном проводим луч из точки (1;1)

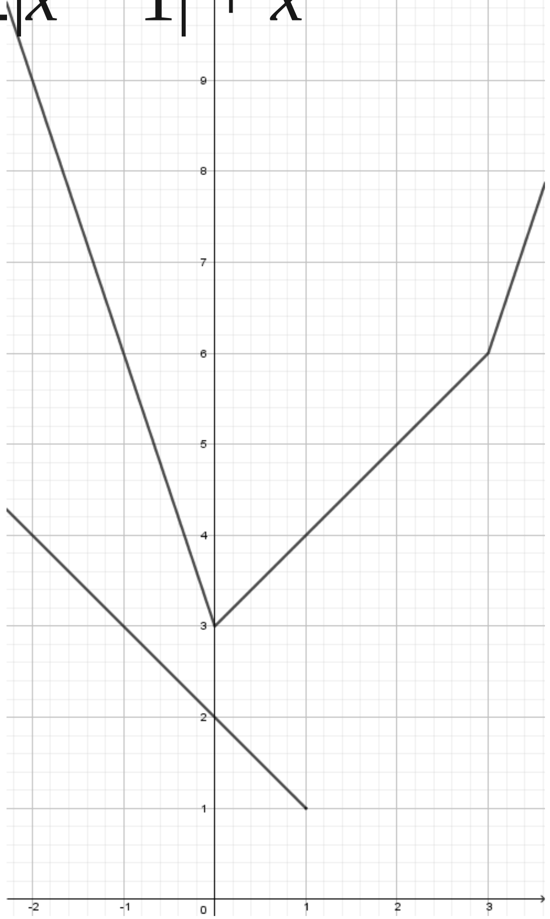
$g(x) = 2|x-1| + x$



Пример 5 (решение)

Обратим внимание, что если $x > 1$, то есть правее точки излома, то оба модуль раскрываются со знаком «+» и коэффициент при x (угловой коэффициент) будет 3 (на одну клеточку по оси $0x$, приходится 3 клеточки по оси $0y$). С таким наклоном проводим луч из точки (1;1)

$$g(x) = 2|x-1| + x$$

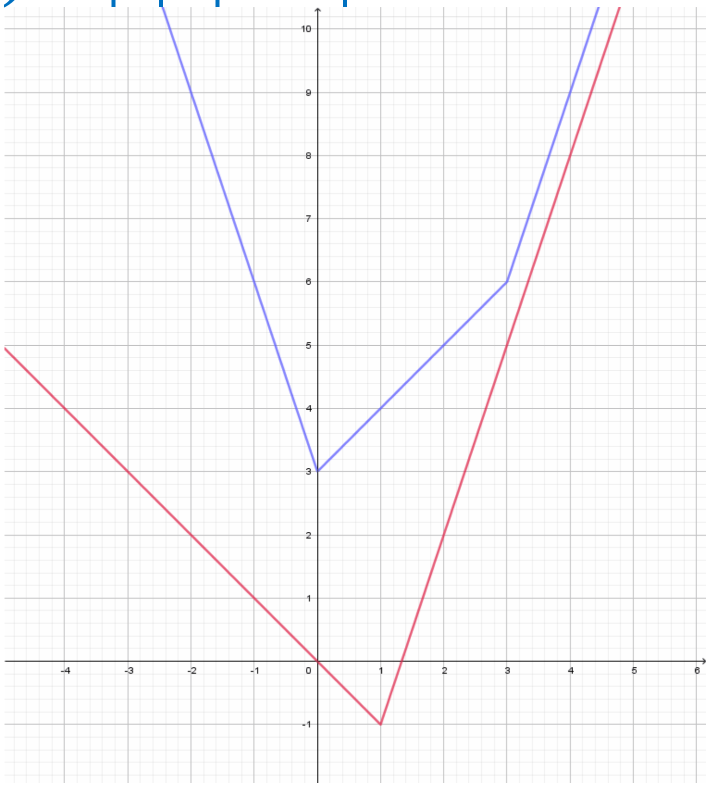


Пример 5 (решение)

Посмотрим, что меняется при изменении пара-метра a. График функции $g(x)$ двига-ется вверх-вниз. Вот он про-ходит точку (3;6) (подсвечена зеленым) и точка пересечения становится единственной (ус-ловие $g(3) > f(3)$). Но при пересечении точки (0;3) единственность теряется ($g(0) < f(0)$). При проходе точки (1, 4) снова появляется ($g(1) > f(1)$)

$g(x) = 2|x - 1| + x + a$

$f(x) = 2|x| + |x - 3|$



корпорация российский учебник
дрофа
вентана граф

Пример 5 (решение)

Запишем наши наблюдения неравенствами.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} g(3) > f(3) \\ g(0) < f(0) \end{cases} \\ g(1) > f(1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} 7 + a > 6 \\ 2 + a < 3 \end{cases} \\ 1 + a > 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a > -1 \\ a < 1 \end{cases} \\ a > 3 \end{array}\right.$$

Ответ: $a \in (-1;1) \cup (3;+\infty)$

Пример 6

Найти все значения a, при которых уравнение имеет хотя бы один корень.

$$a^2+7|x+1|+5\sqrt{x^2+2x+5}=2a+3|x-4a+1|$$

Пример 6 (решение)

Преобразуем равенство.

$$a^2+7|x+1|+5\sqrt{x^2+2x+5}=2a+3|x-4a+1|$$

$$5\sqrt{x^2+2x+5}=3|x-4a+1|-7|x+1|+2a-a^2$$

Пример 6 (решение)

Преобразуем в систему

$$\begin{cases} y = 5\sqrt{x^2 + 2x + 5} \\ y = 3|x - 4a + 1| - 7|x + 1| + 2a - a^2 \end{cases}$$

Пример 6 (продолжение)

Построим эскиз графика $f(x)$ $y = 5\sqrt{x^2 + 2x + 5}$

Вернее посмотрим что нужно знать об этом графике. Минимум функции $f(x)$ это точка A(–1;10). При $x \to \pm\infty$, функция неограниченно возрастает.

Вообще говоря — это одна ветвь гиперболы с асимптотами $y = \pm\, 5(x + 1)$, но это знание для решения задачи не обязательно.

Пример 6 (продолжение)

Ветвь гиперболы

$$y = 5\sqrt{x^2 + 2x + 5}$$

$$y = 5\sqrt{x^2 + 2x + 5}$$

$$\frac{y^2}{10^2} - \frac{(x+1)^2}{2^2} = -1$$

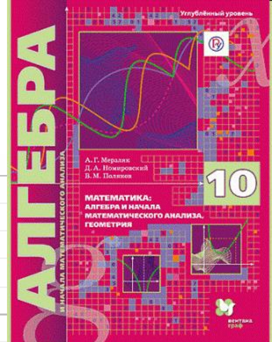
$$\frac{(x+1)^2}{2^2} - \frac{y^2}{10^2} = 1$$

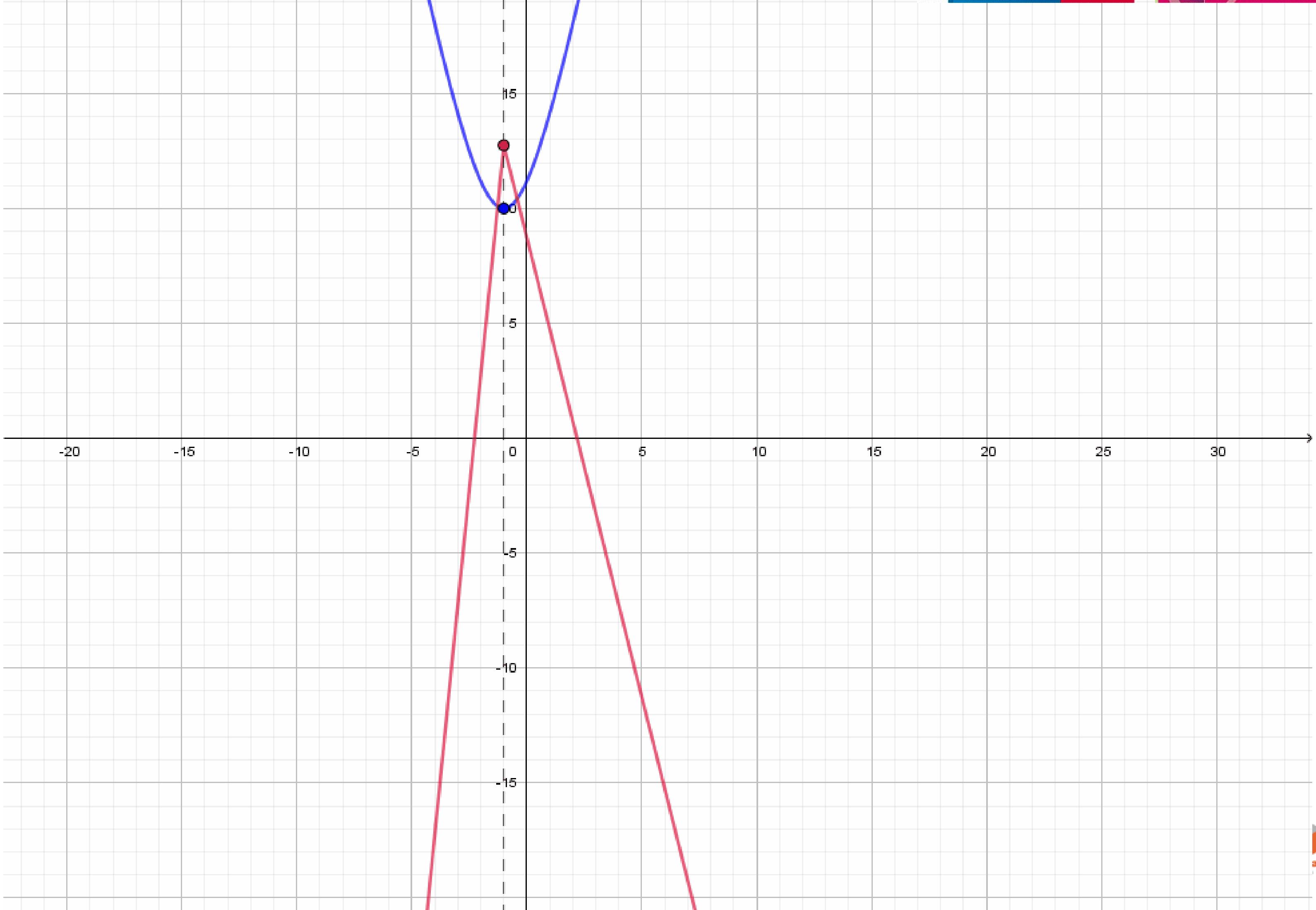
Пример 6 (продолжение)

Построим эскиз графика функции $g(x)=3|x-4a+1|-7|x+1|+2a-a^2$

Это трехзвенная ломаная с точками излома $B\,(-1\,;\,3\cdot|4a|+2a-a^2)$ и $C(4\mathrm{a}-1\,;\,-7\cdot|4a|+2a-a^2)$ (будем строить при $a=-1$). Коэффициент угла наклона в отрицательной области (слева от всех точек излома, где модули снимаются со знаком «–») равен 4. Коэффициент угла наклона в положительной области (справа от всех точек излома, где модули снимаются со знаком «+») равен –4, т.е. $(-1;3|4a|+2a-a^2)$ — максимум.

Пример 6 (продолжение)





Пример 6 (продолжен

Что мы смогли понять после построения графиков?

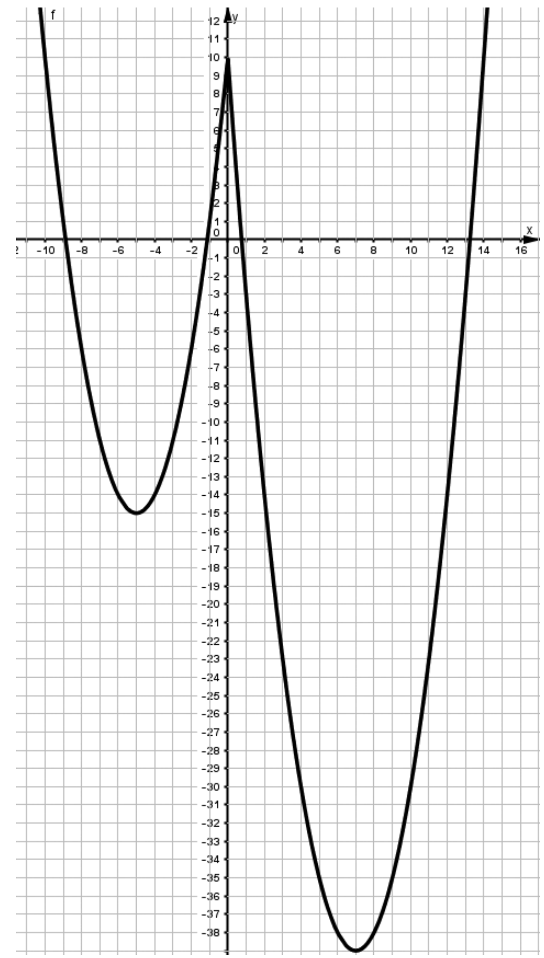
Что решение есть тогда и только тогда, когда максимум $g(x)$ больше или равно минимума $f(x)$. То есть $g(-1) \geqslant f(-1) \Leftrightarrow 12|a| + 2a - a^2 \geqslant 10 \Leftrightarrow 12|a| + 2a - a^2 - 10 \geqslant 0$

Теперь нужно решить неравенство $\boxed{12|a| + 2a - a^2 - 10 \geqslant 0}$

Это мы будем делать снова с помощью графиков.

Пример 6 (продолжение)

Пусть $h(a)=a^2-2a-12|a|+10$. Как в примере 3 графиком будет композиция двух кусков парабол. Заметим, что вершины парабол лежат по разные стороны от оси $0y$, $h(0) = 10$, следовательно решением являются два отрезка, промежутки между нолями парабол



Пример 6 (продолжение)

$$a^2-14a+10 \leqslant 0 \Leftrightarrow a \in [7-\sqrt{39}; 7+\sqrt{39}]$$

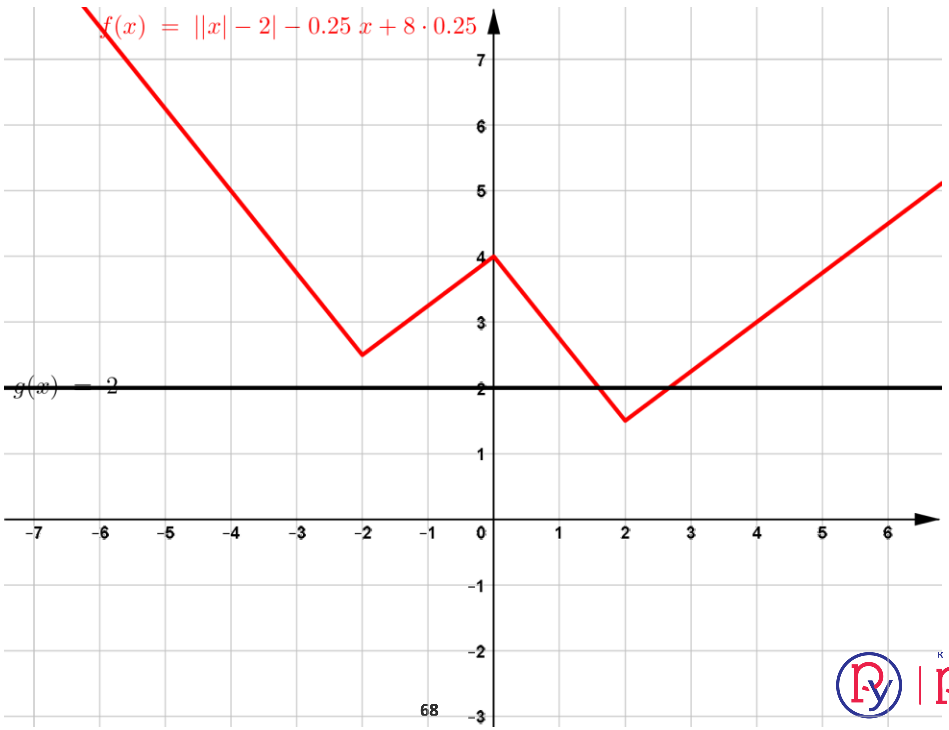
$$a^2+10a+10 \leqslant 0 \Leftrightarrow [-5-\sqrt{15}; -5+\sqrt{15}]$$

Ответ:

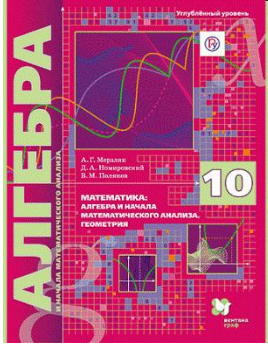
$$[-5-\sqrt{15}; -5+\sqrt{15}] \bigcup [7-\sqrt{39}; 7+\sqrt{39}]$$

Пример 7

Найдите все значения а, при каждом из которых функция принимает $f(x) = ||x|{-}2| - ax + 8a$ значение, равное 2, в двух различных точках.



Пример 7 (продолжение)



Переформулируем задачу: найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $||x| - 2| - ax + 8a = 2$ имеет ровно 2 решения.

$$||x| - 2| - ax + 8a = 2 \Leftrightarrow ||x| - 2| = ax - 8a + 2,$$

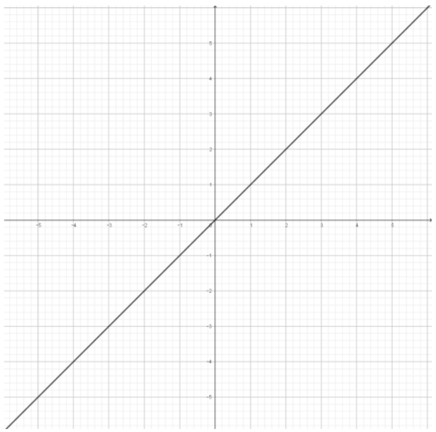
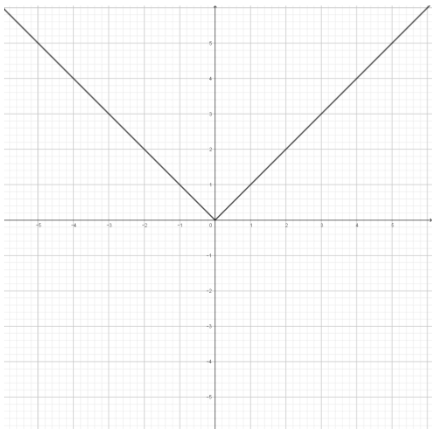
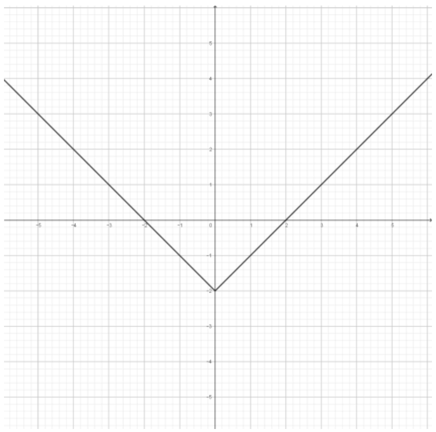
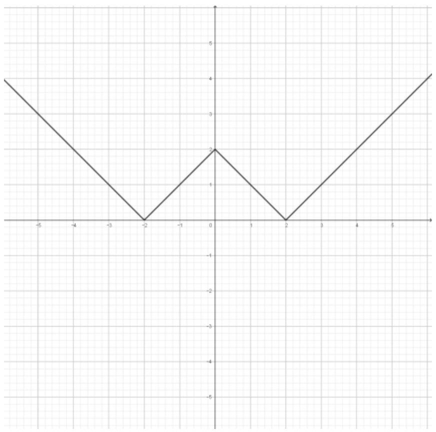
или система $\begin{cases} y = ||x| - 2| \\ y = ax - 8a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = ||x| - 2| \\ y = a(x - 8) + 2 \end{cases}$

Имеет ровно два решения.

Пример 7 (решение)

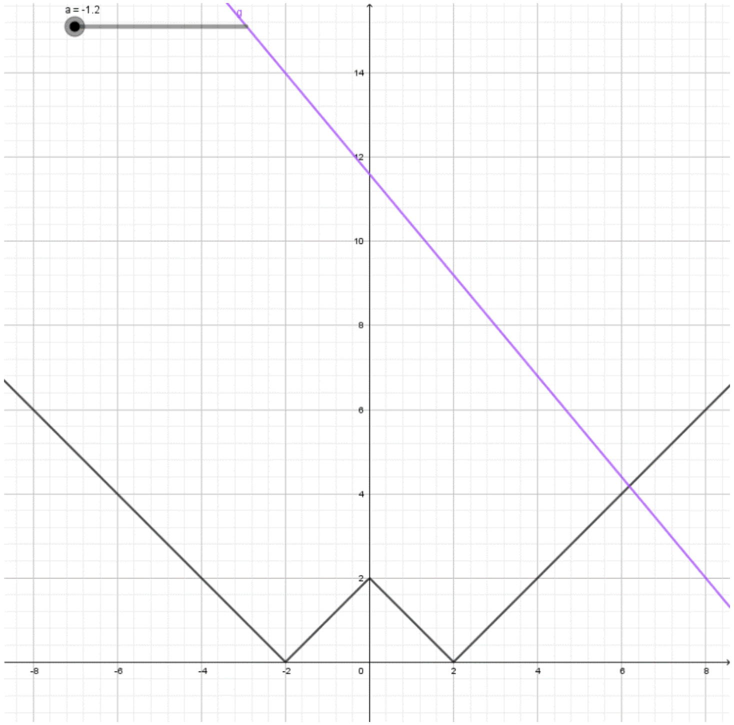
Введем функции $f(x) = ||x| - 2|$, $g(x) = ax - 8a + 2$. Построим их графики. Сначала $f(x)$

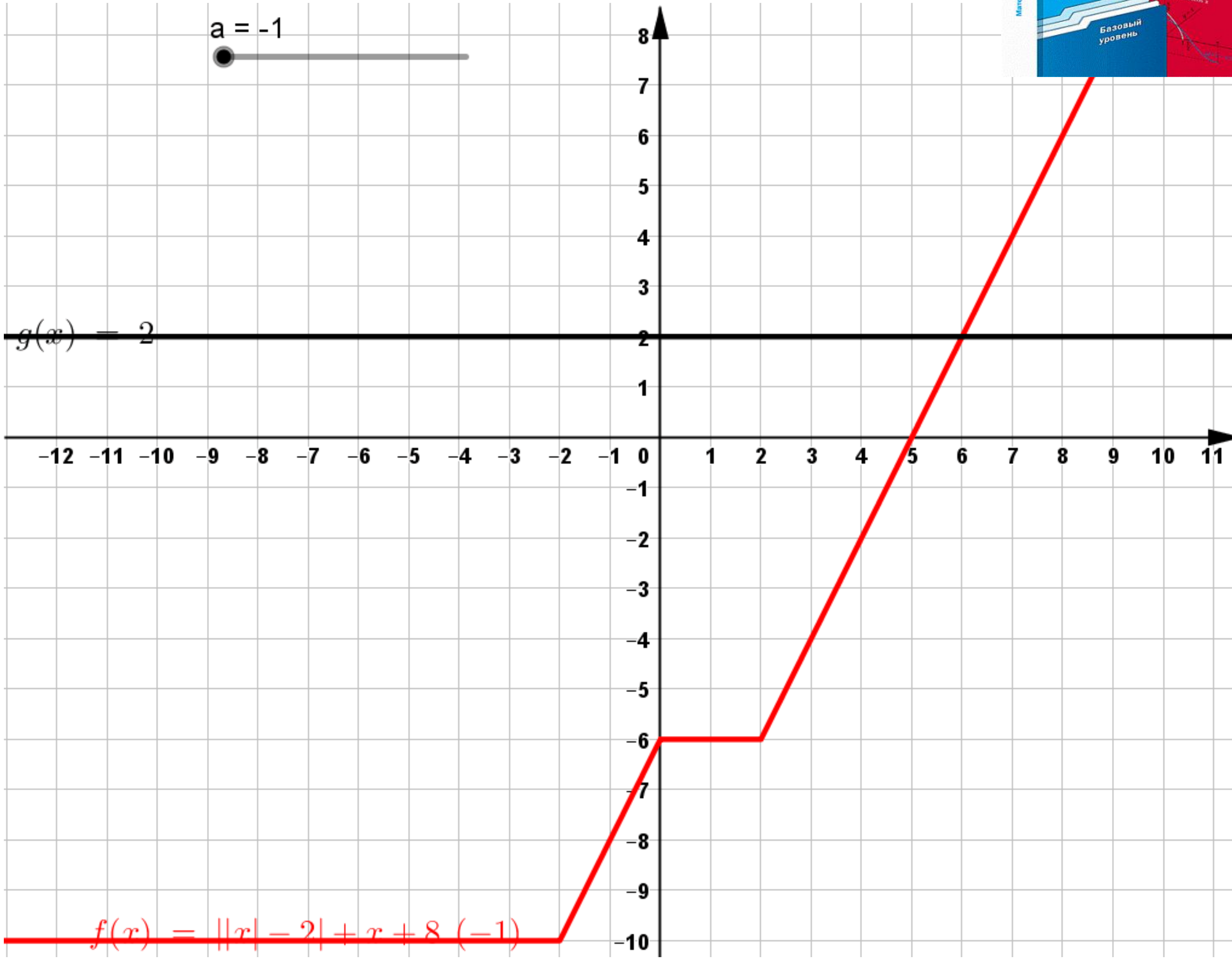
$f(x) = x$ | $f(x) = |x|$ | $f(x) = |x| - 2$ | $f(x) = ||x| - 2|$

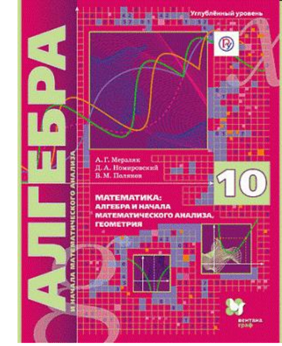
Пример 7 (решение)

Теперь $g(x) = a(x - 8) + 2$. Это прямая проходящая через точку (8;2). Угол наклона которой зависит от a.




a = -1
g(x) = 2
f(x) = ||x| − 2| + x + 8 (−1)


10 класс
Алгебра и начала математического анализа
Базовый уровень


Углублённый уровень
АЛГЕБРА
и начала математического анализа
10
МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

корпорация российский учебник

LECTA

КУРСЫ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

ЦЕНТР ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ КОРПОРАЦИИ «РОССИЙСКИЙ УЧЕБНИК»

Курсы повышения квалификации для педагогов

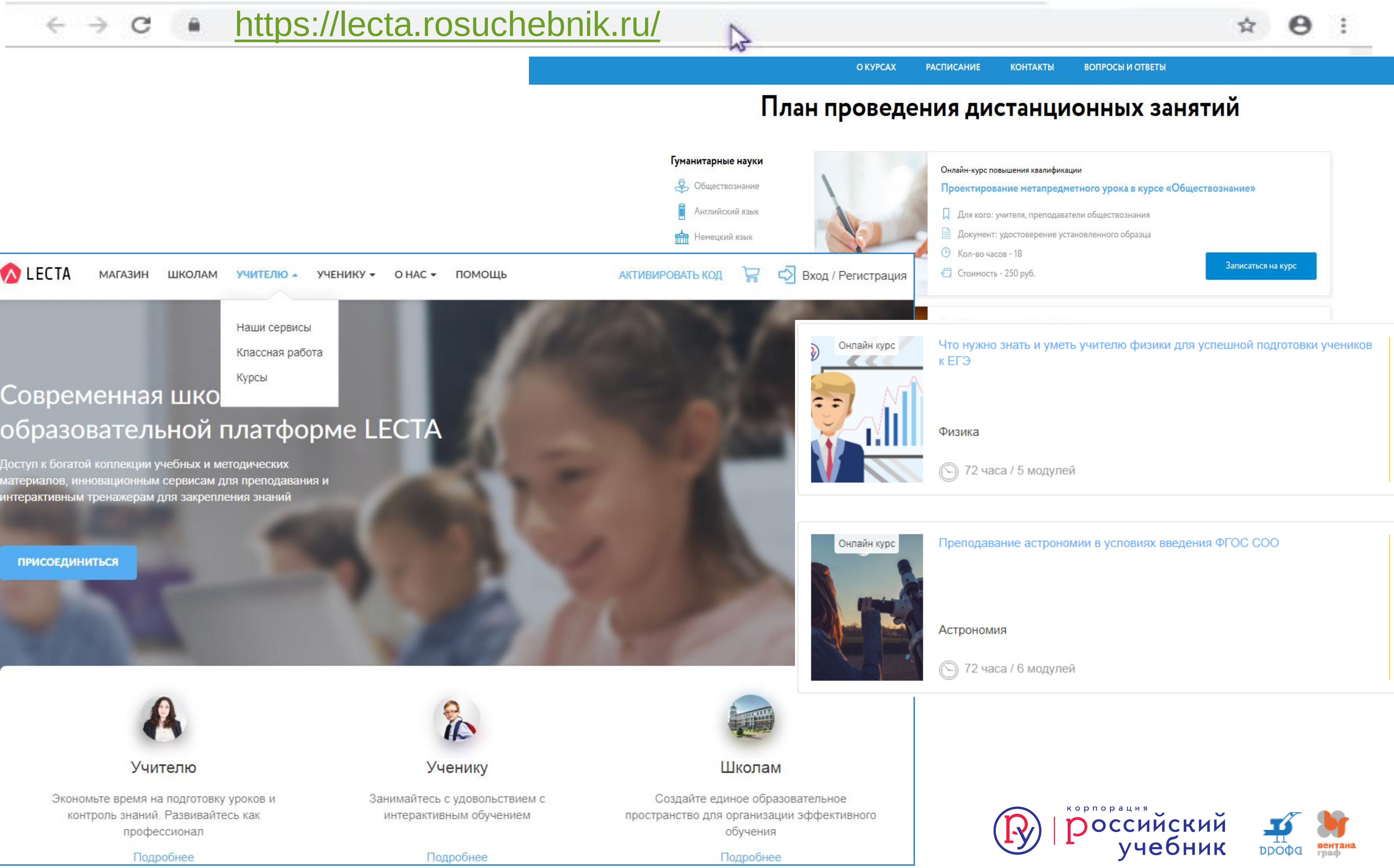
- Материалы и лекции от известных авторов учебно-методических комплектов
- В настоящее время реализуется 56 образовательных программ. Учебные материалы открыты для свободного доступа. С ними ознакомились более 50 000 учителей.
- Полный курс обучения с помощью современных образовательных и информационных технологий прошли свыше 7 000 педагогов.
- Налажено сетевое взаимодействие с ИРО и ИПК

24/7 в любое время, в любом месте

удостоверение установленного образца

лицензия

ВИТРИНА КУРСОВ ЦДО «РОССИЙСКИЙ УЧЕБНИК» НА ОФИЦИАЛЬНОМ САЙТЕ КОРПОРАЦИИ



корпорация российский учебник
дрофа
вентана граф

корпорация российский учебник

LECTA

ПРОГРАММА ЛОЯЛЬНОСТИ ДЛЯ ПЕДАГОГОВ

ПРОГРАММА ЛОЯЛЬНОСТИ ДЛЯ ПЕДАГОГОВ

росучебник.рф/лояльность

Система накопления баллов, которая позволяет получать бонусы и подарки, участвуя в мероприятиях и активностях от корпорации «Российский учебник» и LECTA

РАСКРЫВАЕМ ПОТЕНЦИАЛ КАЖДОГО

Участвуйте в мероприятиях и получайте подарки!

Как принять участие в программе?

1

Зарегистрируйтесь на сайте **rosuchebnik.ru** или **LECTA**

2

Накапливайте баллы:

- посещайте вебинары и семинары
- участвуйте в конкурсах
- пользуйтесь сервисами **LECTA**
- совершайте покупки в магазинах **LECTA** и **book24.ru**
- оставляйте отзывы о нашей продукции
- + и еще 20 других активностей

3

Получайте подарки и бонусы

Получайте скидки на продукцию корпорации «Российский учебник» и наших партнеров, а также подарки – бесплатные книги и курсы повышения квалификации

40 баллов **за посещение мероприятия и за отзыв на сайте rosuchebnik.ru**

rosuchebnik.ru, росучебник.рф

Москва, Пресненская наб., д. 6, строение 2

+7 (495) 795 05 35, 795 05 45,
info@rosuchebnik.ru

Нужна методическая поддержка?

Методический центр
8-800-2000-550 (звонок бесплатный)
metod@rosuchebnik.ru

Хотите купить?

Цифровая среда школы
lecta.rosuchebnik.ru

Отдел продаж
sales@rosuchebnik.ru

Хотите продолжить общение?

youtube.com/user/drofapublishing

fb.com/rosuchebnik

vk.com/ros.uchebnik

ok.ru/rosuchebnik

Альперин Михаил Исаакович,
ведущий методист по математике корпорации «Российский учебник»,

✓Кандидат физико-математических наук

✓Доцент

✓Педагогический стаж 35 лет

Alperin.MI@rosuchebnik.ru

корпорация российский учебник дрофа вентана граф