$$\int f(x)dx$$

АЛГЕБРА

10 КЛАСС

Интеграл

корпорация российский учебник
LECTA
дрофа

Интеграл

Понятие интеграл в математике используется в нескольких очень разных значениях.

Определенный интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim \sum_0^n f(x_i^*)(x_{i+1} - x_i)$$

Интеграл

$$\int f(x)dx = \{F(x) : F'(x) = f(x)\}$$

Теорема Ньютона-Лейбница

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ — любая её первообразная на этом отрезке, то имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Таблица первообразных

1. $\int x dx = x + c \left(\int u du = u + c \right)$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \left(\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \right)$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c \left(\int \frac{du}{u} = \ln |u| + c \right)$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \left(\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c \right)$

5. $\int e^x dx = \frac{e^x}{\ln a} + c \left(\int e^u du = \frac{e^u}{\ln a} + c \right)$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + c \left(\int \sin u du = -\cos u + c \right)$

7. $\int \cos x dx = \sin x + c \left(\int \cos u du = \sin u + c \right)$

8. $\int \frac{dx}{\sin x} = -\operatorname{ctg} x + c \left(\int \frac{du}{\sin u} = -\operatorname{ctg} u + c \right)$

9. $\int \frac{dx}{\cos x} = \operatorname{tg} x + c \left(\int \frac{du}{\cos u} = \operatorname{tg} u + c \right)$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c \left(\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c \right)$

Таблица первообразных

$$11.\ \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + c \left(\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{u}{a} + c \right)$$

$$12.\ \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c \left(\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + c \right)$$

$$13.\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c \left(\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c \right)$$

Теорема Ньютона-Лейбница

Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ — любая её первообразная на этом отрезке, то имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Пример

Вычислите интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$

Решение $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -1-1 = -2$

Дифференциал

$$df(x) = f'(x)dx$$

Свойства неопределённого интеграла

$$1.\ \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

$$2.\ \int \left(f(x)\right)' dx = f(x) + c$$

$$3.\ \int \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$4.\ \int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$$

Примеры

10.2. Найдите общий вид первообразных функции:

1) $f(x) = x + 3$;

2) $f(x) = x^2 + 4x - 1$;

3) $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + 1}$;

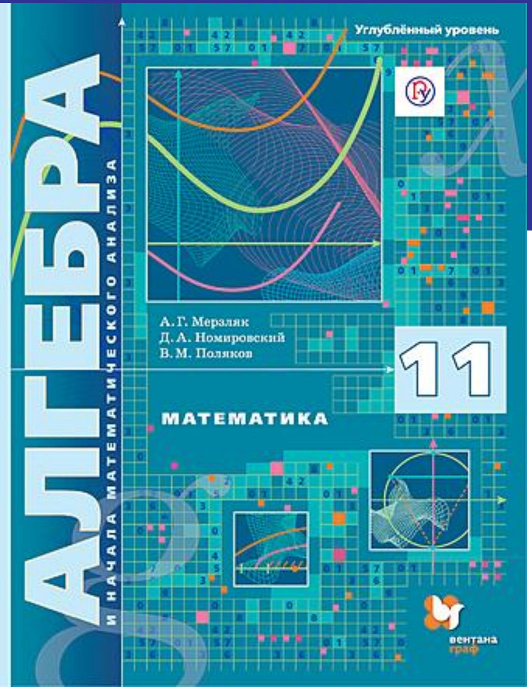
4) $f(x) = \dfrac{1}{2}e^x + 2^x \ln 2$;

5) $f(x) = \dfrac{9}{\cos^2 x} - 3\sin x$ на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$;

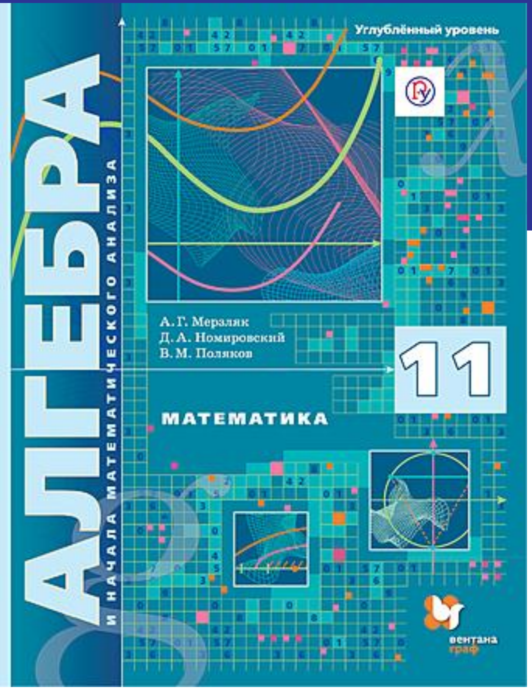
6) $f(x) = 5\sqrt[4]{x} - \dfrac{3}{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$;

7) $f(x) = 6x^2 - \dfrac{2}{x^2}$ на промежутке $(0; +\infty)$;

8) $f(x) = \dfrac{9}{x^{10}} + \dfrac{8}{x^9}$ на промежутке $(-\infty; 0)$.



Решение

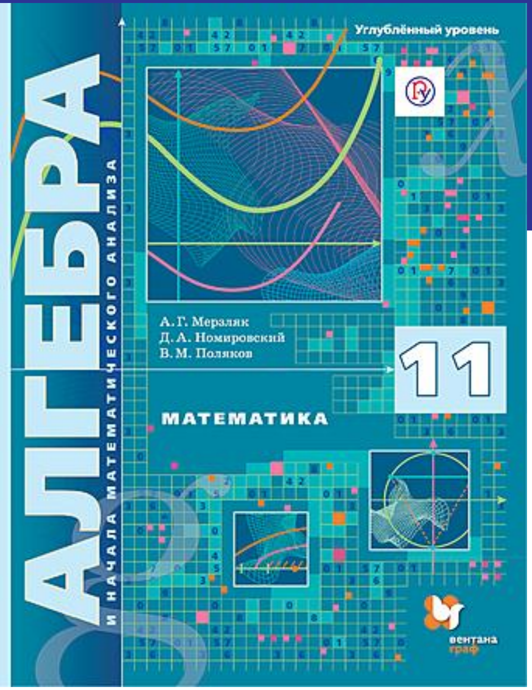


$$1)\ \int (x+3)dx = \int xdx + \int 3dx = \frac{x^2}{2} + 3\int dx = \frac{x^2}{2} + 3x + C$$

$$3)\int \frac{x^3+x}{x^2+1}dx = \int xdx = \frac{x^2}{2}$$

$$6)\int\left(5\sqrt[4]{x} - \frac{3}{x}\right)dx = 5\int x^{\frac{1}{4}}dx - 3\int\frac{dx}{x} = 5\frac{x^{\frac{5}{4}}}{\frac{5}{4}} - 3\ln|x| + C = 4\sqrt[4]{x^5} - 3\ln|x| + C$$

Примеры



10.3. Найдите общий вид первообразных функции:

1) $f(x) = \sin 5x$;

2) $f(x) = 2\cos\frac{x}{2}$;

3) $f(x) = \left(6x + \frac{1}{2}\right)^3$;

4) $f(x) = \left(\frac{x}{7} - 2\right)^4$;

5) $f(x) = \frac{1}{e^{2x}}$;

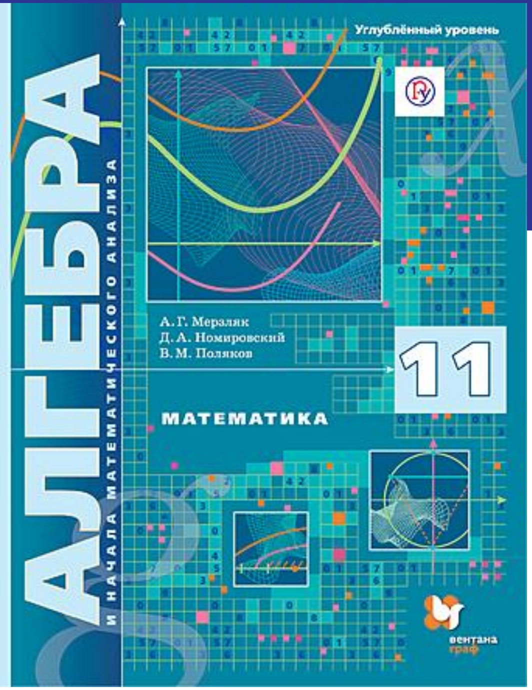
6) $f(x) = 7^{3x}$;

7) $f(x) = -\frac{1}{3}\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$;

8) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 3x}$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$;

9) $f(x) = \frac{8}{\sin^2 4x}$ на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$;

Решение



$$1)\ \int \sin 5x dx = \int \frac{5}{5} \sin 5x dx = \frac{1}{5}\int \sin 5x d(5x) = \frac{1}{5} - \cos 5x$$

$$3)\ \int \left(6x+\frac{1}{2}\right)^3 dx = \frac{1}{6}\int \left(6x+\frac{1}{2}\right)^3 d\left(6x+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\left(6x+\frac{1}{2}\right)^4 + C = \frac{1}{24}\left(6x+\frac{1}{2}\right)^4 + C$$

$$5)\ \int \frac{dx}{e^{2x}} = -\frac{1}{2}\int e^{-2x} d(-2x) = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

Применение определённого интеграла

1. Вычисление площадей плоских фигур. Когда фигура ограничена сверху кривой $y=f(x)$, снизу $y=g(t)$, и прямыми $x=a$ и $x=b$, то её площадь вычисляется по формуле.

$$S=\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx$$

2. Вычисление длины кривой. Если дана кривая заданная функцией y=f(x), то ее длину от точки $A(a;f(a))$ до точки $B(b;f(b))$ можно вычислить по формуле:

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Доказательство свойства 2

$$l = \lim \sum \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \lim \left(\sum \sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}} \right) \Delta x =$$

$$= \lim \left(\sum \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2} \right) \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x) \right)^2}\, dx$$

Примеры

11.2. Найдите площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке 11.12.

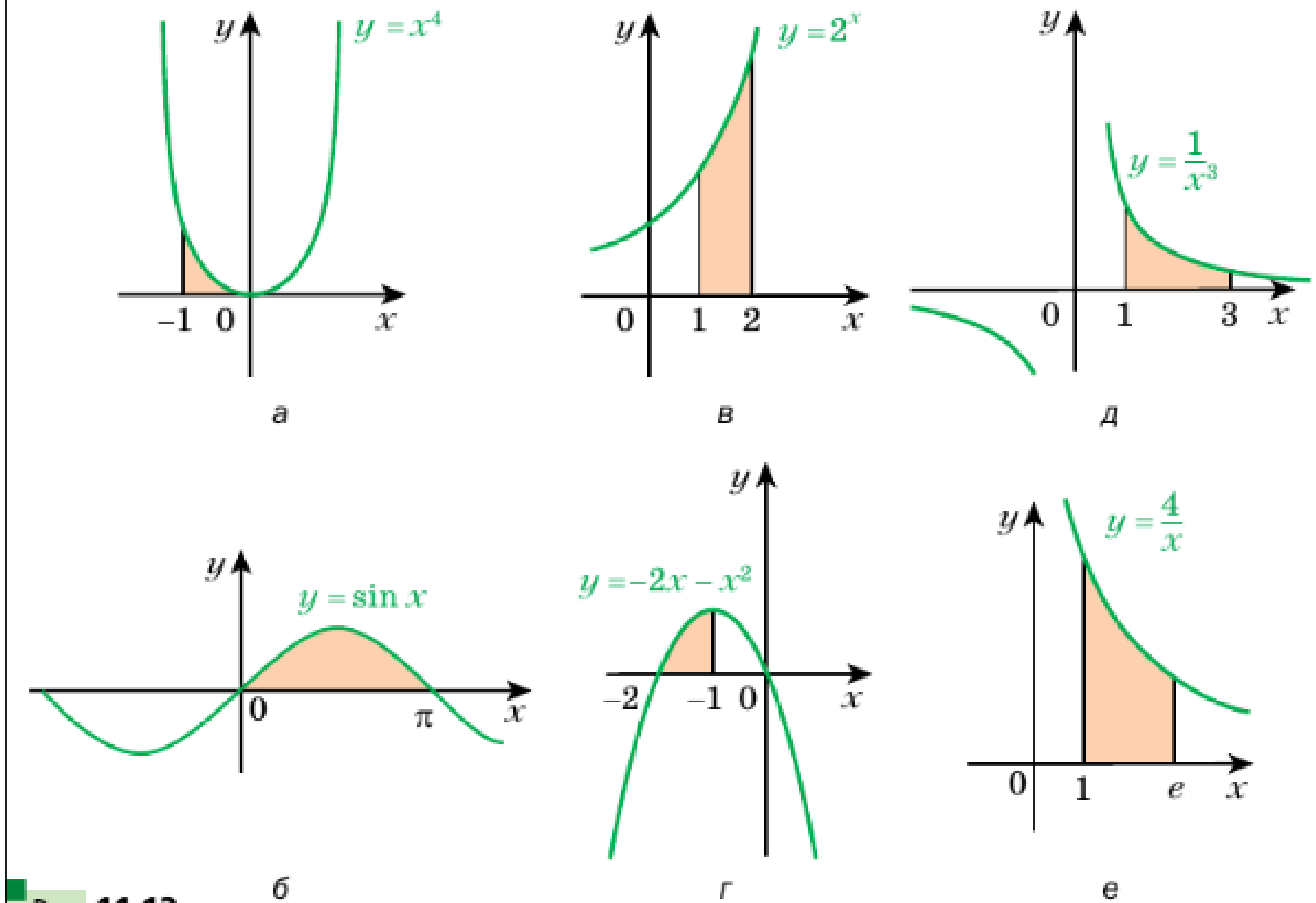
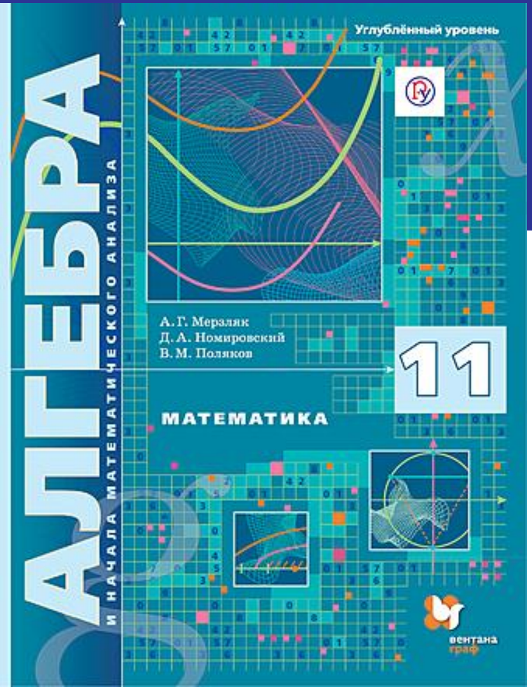
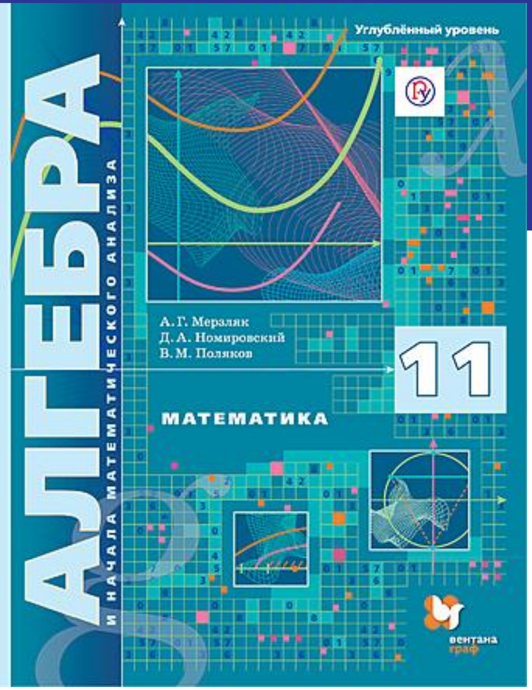


Рис. 11.12



Примеры



11.6. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 2$;

2) $y = -x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$;

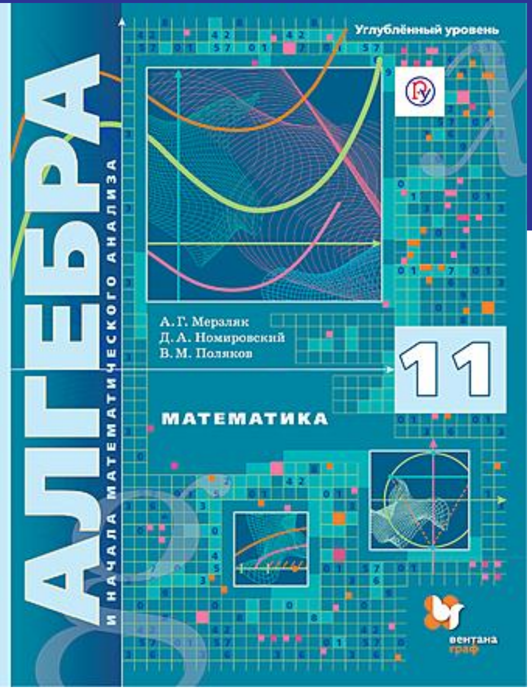
3) $y = -\dfrac{8}{x}$, $y = 0$, $x = -4$, $x = -2$;

4) $y = \dfrac{1}{(x+2)^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$;

5) $y = \sqrt{x+4}$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 5$;

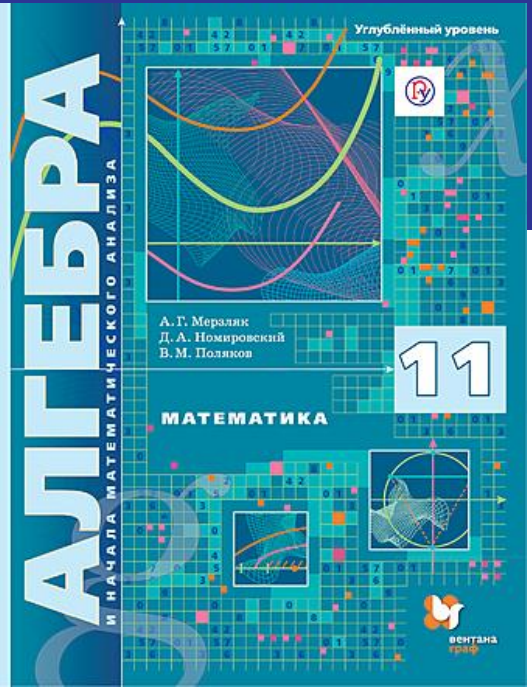
6) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x - 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = -4$.

Примеры



Вычислите длину дуги окружности $x^2+y^2=4$ от точки $A(0;2)$ до точки $B(2;0)$.

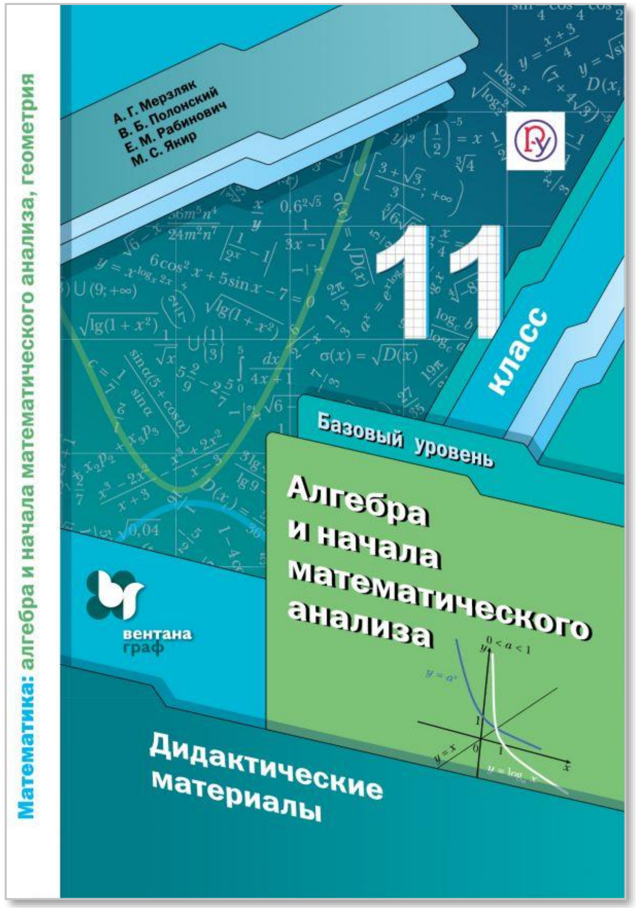
Решение



$$l=\int_0^2\sqrt{1+\left(\left(\sqrt{4-x^2}\right)'\right)^2}\,dx=\int_0^2\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2}\,dx=$$

$$=\int_0^2\frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}}=2\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^2=2\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\pi$$

Пособия по алгебре



Пособия по геометрии