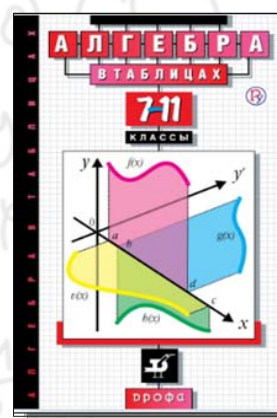
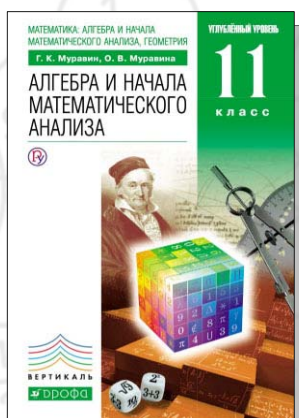
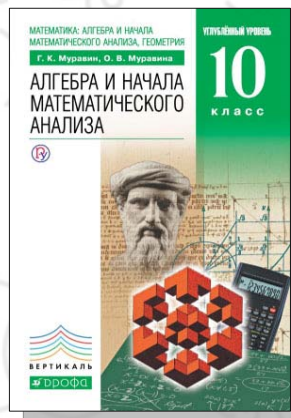


$\sqrt{2}$ АЛГЕБРА

11 КЛАСС

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЕГЭ 2020 ПО МАТЕМАТИКЕ



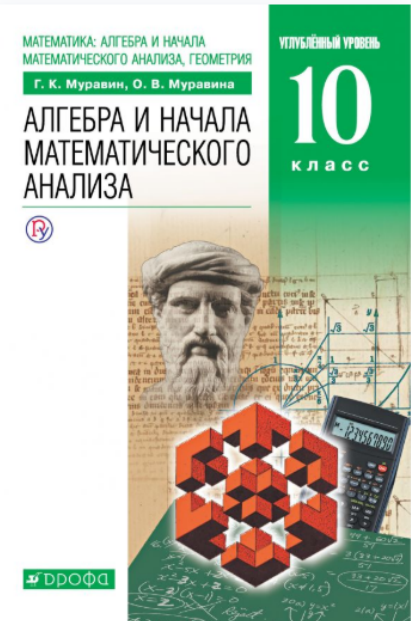
ЭФУ НА САЙТЕ: ROSUCHEBNIK.RU



Методическая помощь Вебинары Каталог

Поиск

Главная > Каталог > Алгебра > Алгебра 10 класс > Учебники по алгебре 10 класс



МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ
Г. К. Муравин, О. В. Муравина
АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
10 класс
Углублённый уровень
ДРОФА

Электронное приложение

Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс. Учебник

Книга доступна в форме:

Печатная
676Р

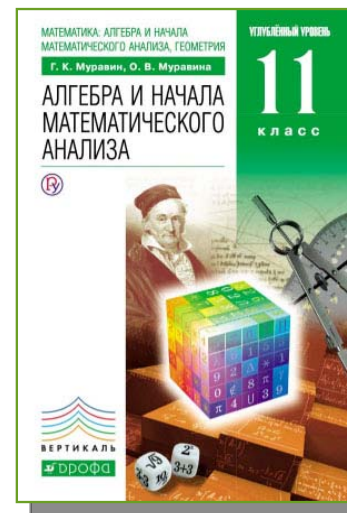
Электронная
105Р

676Р

КУПИТЬ В MY-SHOP.RU

Купить в My-shop.ru

Автор	Муравин Г.К., Муравина О.В.
Серия	Линия УМК Г. К. Муравина. Алгебра и начала математического анализа (10-11) (углуб.)
Класс	10 класс
Предмет	Алгебра
Издательство	ДРОФА, корпорация "Российский учебник"
Вид продукции	Учебник





Бесплатный доступ к электронным учебникам

Любая ЭФУ на платформе LECTA доступна по промокоду УчимсяДома

Получить >

Актуальные мероприятия

ВСЕ ВЕБИНАРЫ КОНКУРСЫ ОНЛАЙН-УРОКИ

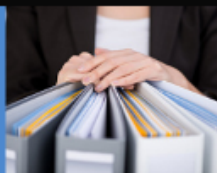
48

дней до окончания
—
конкурсы и акции



195

дней до окончания
—
конкурсы и акции



1

час до начала
—
онлайн-уроки



ИСТОРИЯ РОССИИ ВНЕУРОЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

Конкурс к 75-летию Великой победы
«Урок "Живые голоса истории
Великой Отечественной...»

До 01 июля 2020

УПРАВЛЕНИЕ ШКОЛОЙ

Всероссийский краудсорсинговый
проект «Положения и локальные
акты школы»

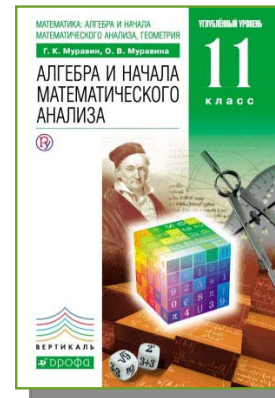
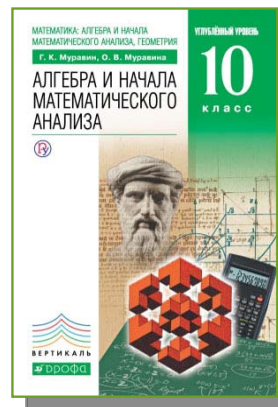
До 25 ноября 2020

ГЕОГРАФИЯ

ЕГЭ-2020 по географии. Решаем
задания

Состоится 13:00, 13 мая 2020

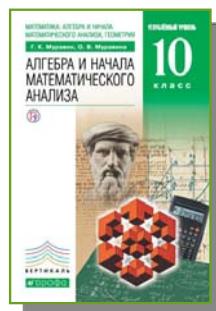
<https://rosuchebnik.ru>



РАВНОСИЛЬНЫЕ И НЕРАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

30. Уравнения и неравенства

Уравнения и неравенства люди решают с глубокой древности. Вы познакомились с уравнениями и неравенствами ещё в начальной школе и с тех пор научились решать много разных их типов. В большинстве случаев в процессе решения исходное уравнение или неравенство заменяется более простым и так далее, пока не будет приведено к простейшему виду.



РАВНОСИЛЬНЫЕ И НЕРАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

1. Множества решений первого и второго уравнения (неравенства) совпадают. Понятно, что эта ситуация самая благоприятная — решения второго уравнения (неравенства) можно сразу записывать в ответ.

Уравнения (неравенства) с одним и тем же множеством решений называют **равносильными**.

$$(a) \Leftrightarrow (b)$$

РАВНОСИЛЬНЫЕ И НЕРАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

2. Множество решений второго уравнения (неравенства) содержит все решения первого. В этом случае второе уравнение (неравенство) называют *следствием* первого. При этом те решения второго, которые не являются решениями первого, называют *посторонними*, их стараются выявить и отбросить.

$$(a) \Rightarrow (b)$$

Два уравнения (неравенства) равносильны, если каждое из них является следствием другого.

РАВНОСИЛЬНЫЕ И НЕРАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

3. Множество решений второго уравнения (неравенства) содержит не все решения первого, т. е. теряются решения. Эта ситуация самая неприятная. Возможно, поэтому у неё даже нет специального названия.

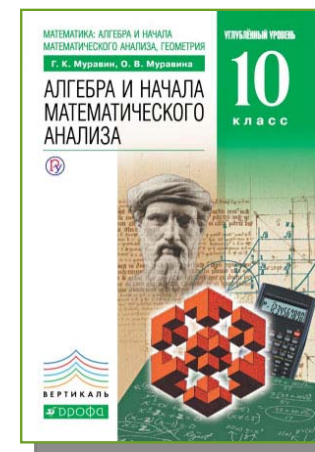
Можно, конечно сказать, что первое уравнение (неравенство) является следствием второго, но звучит это как-то странно.

$$(a) \Leftarrow (b)$$

РАВНОСИЛЬНЫЕ И НЕРАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Во всех трёх случаях множество решений первого уравнения (неравенства) сравнивается с множеством решений второго. Однако обычно, когда мы выполняем преобразование, решений у нас ещё нет. И сравниваем мы множества решений, анализируя сами преобразования, которые применяем. Некоторые преобразования не могут изменить множества решений, такие преобразования называют **равносильными**. Применение других может привести к посторонним решениям или к потере решений, — эти преобразования называют **неравносильными**. Так, например, к равносильным преобразованиям относится замена $\sin^2 x$ тождественно равным ему выражением $1 - \cos^2 x$. А при замене $\sin x$ выражением $\sqrt{1 - \cos^2 x}$ будут потеряны решения (если они есть), при которых $\sin x < 0$, следовательно, это преобразование **неравносильное**.

Заметим, что неравносильное преобразование может привести и к равносильному уравнению или неравенству, но в этом нельзя быть уверенным, т. е. *неравносильное преобразование не гарантирует сохранения множества решений*.



РАВНОСИЛЬНЫЕ И НЕРАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим сначала две основные причины неравносильности преобразований.

1. Изменение области допустимых значений переменной (ОДЗ)

Наиболее часто изменение ОДЗ связано с применением формул. Некоторые формулы действуют на всём множестве действительных чисел, и их применение является равносильным преобразованием. Таковы, например, формулы сокращённого умножения. А вот в формуле $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ заме-

на её левой части, имеющей смысл при любом значении x , её правой частью приводит к **сужению ОДЗ** за счёт всех значений $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$, при которых не существует тангенс.

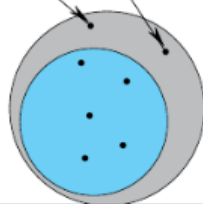
РАВНОСИЛЬНЫЕ И НЕРАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Расширение ОДЗ влечёт, например, замена суммы логарифмов $\log_2 f(x) + \log_2 g(x)$ логарифмом произведения $\log_2 (f(x) \cdot g(x))$, поскольку последнее выражение, в отличие от первого, имеет смысл и при отрицательных значениях $f(x)$ и $g(x)$.

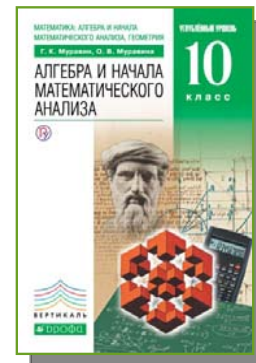
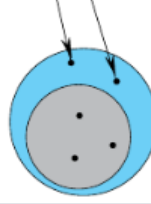
Расширение ОДЗ может привести к появлению посторонних решений, а сужение — к потере решений. Чтобы этого избежать, при расширении ОДЗ следует рассматривать дополнительные условия, запрещающие решениям попадать в район расширения. Если же ОДЗ сузилось, — нужно дополнительно поискать решения в районе сужения.

На следующих диаграммах (рис. 124) схематически показаны случаи расширения и сужения ОДЗ.

Решения, которые находятся в районе расширения ОДЗ, следует отбросить



Следует дополнительно искать решения в районе сужения ОДЗ



РАВНОСИЛЬНЫЕ И НЕРАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

2. Расширение сферы действия правил

Использование правил действий с равенствами и неравенствами иногда предполагает наличие условий, при которых эти правила применимы. Так, например, вы знаете, что *обе части равенства можно умножить или разделить на отличное от нуля число*. Однако при умножении обеих частей уравнения на выражение с переменной множитель может иметь нули, которые объединяются с корнями исходного уравнения. А значит, нули множителя следует проверить отдельно — они могут оказаться посторонними решениями. Кроме того, умножение или деление на выражение с переменной может привести к сужению исходной ОДЗ, о последствиях чего уже упоминалось.

РАВНОСИЛЬНЫЕ И НЕРАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

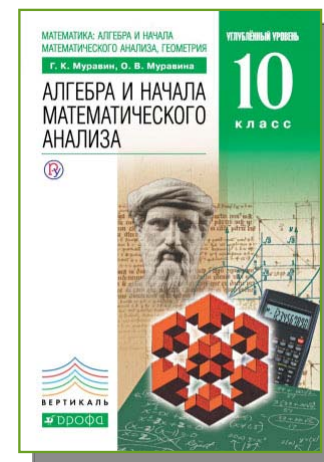
Рассуждения, которые вы проводили при решении уравнений и неравенств, можно при оформлении решения заменить соответствующей математической символикой. Речь идёт об употреблении знаков равносильности « $\Leftrightarrow$ », следования « $\Rightarrow$ », системы « $\{$ » и совокупности « $[$ ».

Знак равносильности « $\Leftrightarrow$ » ставится между уравнениями или неравенствами в случае проведения равносильного преобразования, а знак следования « $\Rightarrow$ » — при неравносильном преобразовании, которое может повлечь за собой появление посторонних решений.

Знак системы « $\{$ » требует одновременного выполнения указанных с его помощью условий, а знак совокупности « $[$ » показывает, что должно выполняться хотя бы одно из условий. Так, например, условие равенства произведения нулю можно записать символически:

$$f(x) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0, \\ x \in \text{ОДЗ}. \end{cases}$$

Заметим, что, если в результате неравносильного преобразования получится равносильное уравнение или неравенство, в записи решения всё равно не следует ставить знак « $\Leftrightarrow$ ».



корпорация
российский
учебник



РАВНОСИЛЬНЫЕ И НЕРАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

524. Является ли равносильным преобразование, связанное с заменой выражения а) выражением б)?

Если преобразование неравносильно, укажите причину неравносильности. Запишите дополнительные условия, выполнение которых следует проверить, чтобы избежать появления посторонних решений, или какие случаи следует дополнительно рассмотреть, чтобы не потерять решения.

Задание 1. Запишите в чате число, составленное из равносильных преобразований.

$$1. \text{ а) } \frac{x^2 - 1}{x + 1} ; \text{ б) } x - 1;$$

$$2. \text{ а) } xy - x^2 ; \text{ б) } x(y - x);$$

$$3. \text{ а) } \sqrt{x^2 + 2x + 1} ; \text{ б) } x + 1;$$

$$4. \text{ а) } \sqrt{x^2 - 2x + 1} ; \text{ б) } |x - 1|;$$

$$5. \text{ а) } x - y ; \text{ б) } (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}).$$

Задание 1. Запишите в чате число, составленное из равносильных преобразований.

$$1. \frac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1;$$

$$2. xy - x^2 = x(y - x);$$

$$3. \sqrt{x^2 + 2x + 1} = x + 1;$$

$$4. \sqrt{x^2 - 2x + 1} = |x - 1|;$$

$$5. x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

Ответ: 24.

РАВНОСИЛЬНЫЕ И НЕРАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

525. Является ли равносильным преобразование уравнения а) в уравнение б)?

Если преобразование неравносильно, укажите причину неравносильности. Запишите дополнительные условия, выполнение которых следует проверить, чтобы избежать появления посторонних решений, или случаи, которые следует дополнительно рассмотреть, чтобы не потерять решения.

РАВНОСИЛЬНЫЕ И НЕРАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1) а) $\sqrt{3x^2 + 2x - 1} = 2x - 1;$

б) $x^2 - 6x + 2 = 0;$

2) а) $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x - 2} = 4;$

б) $2x + 3 + x - 2 + 2\sqrt{2x + 3} \cdot \sqrt{x - 2} = 16;$

3) а) $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{x - 2} = 4;$

б) $2x + 3 + x - 2 + 2\sqrt{(2x + 3)(x - 2)} = 16;$

РАВНОСИЛЬНОСТЬ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

536. ● Обоснуйте следующие равносильности:

$$1) \sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$$

$$2) \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x); \end{cases} \end{cases}$$

$$3) \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x); \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

535. Объясните, почему не нужно делать проверку корней в следующем решении иррационального уравнения:

$$\sqrt{3x-5} = x-1, \quad 3\sqrt{3x-5} = 3x-3, \quad 3x-5-3\sqrt{3x-5}+2=0,$$

$$\sqrt{3x-5} = 1 \text{ или } \sqrt{3x-5} = 2, \quad 3x-5=1 \text{ или } 3x-5=4,$$

$$x=2 \text{ или } x=3.$$

Ответ: 2; 3.

Задание 2. Дайте в чате краткий ответ на вопрос: «Нужна ли проверка корней в этом уравнении?» (Да или нет)

5.7. Найдите корень уравнения $\sqrt{3x + 49} = 10$.

Решение. Уравнение $\sqrt{3x + 49} = 10$ иррациональное.

Возведем уравнение в квадрат: $3x + 49 = 100$, $3x = 100 - 49$, $3x = 51$, $x = 51 : 3$, $x = 17$.

Ответ: 17.

РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

✓ **Пример 1.** Решить уравнение $\sqrt{3x - 5} = x - 1$.

Решение.

$$\begin{aligned}\sqrt{3x - 5} = x - 1 &\Rightarrow 3x - 5 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 3. \end{cases}\end{aligned}$$

Проверка. При $x = 2$ имеем: $x - 1 = 2 - 1$ больше нуля, следовательно, число 2 — корень данного уравнения. При $x = 3$ имеем: $x - 1 = 3 - 1$ больше нуля, следовательно, число 3 — корень данного уравнения.

Ответ: 2; 3.

Примечание. Как оказалось, первое и второе уравнения в цепочке преобразований равносильны. Однако в момент перехода это ещё не было известно, и, следовательно, ошибкой было бы поставить между ними знак « $\Leftrightarrow$ ». Если же нам потребуется, чтобы все преобразования были равносильными, решение надо будет оформить, например, так:

$$\begin{aligned}\sqrt{3x - 5} = x - 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5 = x^2 - 2x + 1, \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2, \\ x = 3, \end{cases} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 3. \end{cases}\end{aligned}$$

РАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ

4) а) $\log_{7-x} (x^3 + 9) = \log_{7-x} ((x + 3)(x - 1)^2);$

б) $x^3 + 9 = (x + 3)(x - 1)^2;$

5) а) $|\sin x| \cos x = \sin^2 x;$

б) $\cos x = \sin x;$

6) а) $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2;$

б) $\log_{\cos x} \sin x + \frac{1}{\log_{\cos x} \sin x} = 2;$

РАВНОСИЛЬНЫЕ И НЕРАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

11) а) $2 \lg f(x);$

б) $\lg f^2(x);$

12) а) $\lg f^3(x);$

б) $3 \lg f(x);$

13) а) $\ln (f(x) \cdot g(x));$

б) $\ln f(x) + \ln g(x).$

РАВНОСИЛЬНЫЕ И НЕРАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

525. Является ли равносильным преобразование уравнения а) в уравнение б)?

Если преобразование неравносильно, укажите причину неравносильности. Запишите дополнительные условия, выполнение которых следует проверить, чтобы избежать появления посторонних решений, или случаи, которые следует дополнительно рассмотреть, чтобы не потерять решения.

РАВНОСИЛЬНОСТЬ ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

$$4) \log_{x-3} f(x) > \log_{x-3} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 4, \\ 0 < f(x) < g(x), \\ x > 4, \\ f(x) > g(x) > 0; \end{cases}$$

$$5) \lg (f(x) \cdot g(x)) = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \lg f(x) + \lg g(x) = 5, \\ \lg (-f(x)) + \lg (-g(x)) = 5; \end{cases}$$

$$6) \log_{g(x)} f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (f(x) - 1)(g(x) - 1) \geq 0, \\ x \in \text{ОДЗ}; \end{cases}$$

Задание 3. Нужно ли находить ОДЗ и делать проверку корней по ОДЗ в решении этих логарифмических уравнений?

5.9. Найдите корень уравнения $\log_8 (5x + 47) = 3$.

Решение. Уравнение $\log_8 (5x + 47) = 3$ логарифмическое.

ОДЗ: $5x + 47 > 0$.

$5x + 47 = 8^3$, $5x + 47 = 512$, $5x = 512 - 47$, $5x = 465$, $\underline{x} = 465 : 5$, $\underline{x} = 93$.

Выполняется ОДЗ, значит, $\underline{x} = 93$ – корень уравнения.

Ответ: 93.

5.10. Найдите корень уравнения $\log_3 (-10x - 14) = 4$.

Решение. Уравнение $\log_3 (-10x - 14) = 4$ логарифмическое.

ОДЗ: $-10x - 14 > 0$.

$\log_3 (-10x - 14) = 4$, $-10x - 14 = 3^4$, $-10x = 81 + 14$, $-10x = 95$, $\underline{x} = 95 : (-10)$,
 $\underline{x} = -9,5$.

Проверяем ОДЗ: $-10 \cdot (-9,5) - 14 = 95 - 14 > 0$.

Ответ: $-9,5$.

5.11. Найдите корень уравнения $\log_2 (-3x + 8) = 7$.

Решение. Уравнение $\log_2 (-3x + 8) = 7$ логарифмическое.

ОДЗ: $-3x + 8 > 0$.

$\log_2 (-3x + 8) = 7$, $-3x + 8 = 7^2$, $-3x + 8 = 49$, $-3x = 49 - 8$, $-3x = 41$, $x = -41 : 3$,
 $\underline{x} = -13\frac{2}{3}$. Проверяем условие ОДЗ.

Ответ: $-13\frac{2}{3}$.

Задание 3. Нужно ли делать проверку корней по ОДЗ в решении этого комбинированного уравнения?

13.1. а) Решите уравнение $2\log_3^2(2\cos x) - 5\log_3(2\cos x) + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

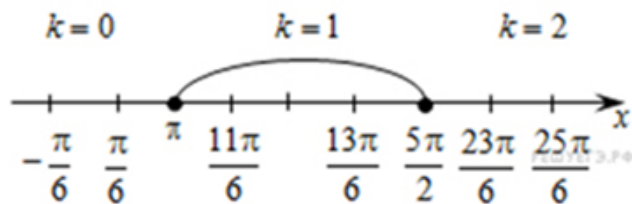
Решение. Пусть $\log_3(2\cos x) = t$, тогда $2t^2 - 5t + 2 = 0$, откуда $t_1 = 2$, $t_2 = 0,5$.

Если $\log_3(2\cos x) = 2$, то $2\cos x = 9$, $\cos x = 4,5$. Известно, что $|\cos x| \leq 1$, то корней нет.

Если $\log_3(2\cos x) = 0,5$, $2\cos x = \sqrt{3}$, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Найдем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.



Из рисунка видно, что заданному отрезку принадлежат корни $\frac{11\pi}{6}$ и $\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$.



корпорация
российский
учебник



РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

15

Решите неравенство $\log_{11}(8x^2 + 7) - \log_{11}(x^2 + x + 1) \geq \log_{11}\left(\frac{x}{x+5} + 7\right)$.

Решение. Правая часть неравенства определена при $x < -5$ и $x > -\frac{35}{8}$.

Поскольку при любых значениях x выражение $8x^2 + 7$ принимает положительные значения, при $x < -5$ и $x > -\frac{35}{8}$ неравенство принимает вид:

$$\frac{8x^2 + 7}{x^2 + x + 1} \geq \frac{8x + 35}{x + 5}; \quad \frac{8x^3 + 40x^2 + 7x + 35}{(x + 5)(x^2 + x + 1)} \geq \frac{8x^3 + 43x^2 + 43x + 35}{(x + 5)(x^2 + x + 1)};$$
$$\frac{3x^2 + 36x}{(x + 5)(x^2 + x + 1)} \leq 0; \quad \frac{3x(x + 12)}{(x + 5)(x^2 + x + 1)} \leq 0,$$

откуда $x \leq -12$; $-5 < x \leq 0$. Учитывая ограничения $x < -5$ и $x > -\frac{35}{8}$,

получаем: $x \leq -12$; $-\frac{35}{8} < x \leq 0$.

Ответ: $(-\infty; -12].$

РАВНОСИЛЬНЫЕ И НЕРАВНОСИЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

$$6) \text{ а) } \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{3} \right);$$

$$\text{б) } \frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x};$$

$$7) \text{ а) } \sqrt{1 - \sin^2 x};$$

$$\text{б) } \cos x;$$

$$8) \text{ а) } 1 + \operatorname{tg}^2 x;$$

$$\text{б) } \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$7) \text{ а) } \operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin |x|};$$

$$\text{б) } \operatorname{tg}^2 |x| = \frac{1 - \cos |x|}{1 - \sin |x|};$$

$$8) \text{ а) } 2 \sin 2x + \cos 2x + 1 = 0;$$

$$\text{б) } \frac{4 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 1 = 0.$$

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ



Пример 2. Решить уравнение

$$2 \sin 2x + \cos 2x + 1 = 0.$$

Решение. Выразим синус и косинус через тангенс половинного аргумента — приём, который называют *универсальной подстановкой*:

$$2 \sin 2x + \cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + 1 = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ 2 \sin 2x + \cos 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \operatorname{tg} x + 2 + 1 = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ 0 - 1 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n, -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

13

а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos 2x = \sqrt{3} \cos x + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x + 1 - 2\sin^2 x = \sqrt{3} \cos x + 1; \sin x - 2\sin^2 x = 0; \sin x \cdot (2\sin x - 1) = 0.$$

Значит, $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

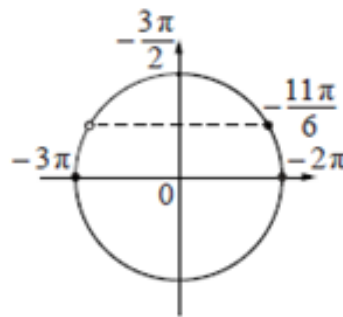
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Получим числа: -3π ; -2π ; $-\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) πk , $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$$

б) -3π ; -2π ; $-\frac{11\pi}{6}$.



РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

13. Дано уравнение $\sqrt{0,5 + \sin^2 x} + \cos 2x = 1$.

а) Решите уравнение.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Решение.

1) $y = \sin^2 x$, $y \in [0; 1]$.

2) $\sqrt{0,5 + y} = 2y$, $4y^2 - y - 0,5 = 0$, $8y^2 - 2y - 1 = 0$, $y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{8}$, $y = \frac{1 \pm 3}{8}$,

$y = 0,5$ с учетом возможных значений y . $\sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\sin x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

13

а) Решите уравнение

$$2\cos^3 x + \sqrt{3}\cos^2 x + 2\cos x + \sqrt{3} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде

$$(2\cos x + \sqrt{3})(\cos^2 x + 1) = 0.$$

Значит, или $\cos^2 x = -1$, что невозможно, или $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда

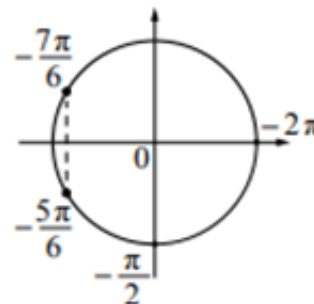
$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $-\frac{7\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$

б) $-\frac{7\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}.$



РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

13

а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos 2x = \sqrt{3}\cos x + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x + 1 - 2\sin^2 x = \sqrt{3}\cos x + 1; \sin x - 2\sin^2 x = 0; \sin x \cdot (2\sin x - 1) = 0.$$

Значит, $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

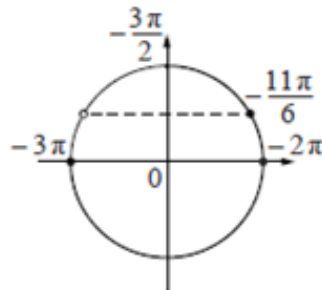
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Получим числа: -3π ; -2π ; $-\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) πk , $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } -3\pi; -2\pi; -\frac{11\pi}{6}.$$



РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.1. Найдите корень уравнения $5^{6+x} = 5$.

Решение. Уравнение $5^{6+x} = 5$ показательное. Основания степени равны, перейдем к равенству оснований степени.

$$5^{6+x} = 5, 5^{6+x} = 5^1, 6+x = 1, x = 1-6, x = -5.$$

Ответ: -5 .

5.2. Найдите корень уравнения $3^{x-5} = 81$.

Уравнение $3^{x-5} = 81$ показательное. Приведем уравнение к основанию 3.

$3^{x-5} = 3^4$. Если равны основания степени, то равны и показатели степени.

$$x-5 = 4, x = 5+4 = 9.$$

Ответ: 9.

5.3. Найдите корень уравнения $5^{9+x} = 125$.

Решение. Уравнение $5^{9+x} = 125$ показательное. Приведем уравнение к основанию 5.

$5^{9+x} = 5^3$. Если равны основания степени, то равны и показатели степени.

$$9+x = 3, x = 3-9, x = -6.$$

Ответ: -6 .

РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.4. Найдите корень уравнения $4^{-5+\underline{x}} = 64$.

Решение. Уравнение $4^{-5+\underline{x}} = 64$ показательное. Приведем уравнение к основанию 4.
 $4^{-5+\underline{x}} = 4^3$, $-5 + \underline{x} = 3$, $\underline{x} = 5 + 3$, $\underline{x} = 8$.

Ответ: 8.

5.6. Найдите корень уравнения $2^{3+\underline{x}} = 0,4 \cdot 5^{3+\underline{x}}$.

Решение. Уравнение $2^{3+\underline{x}} = 0,4 \cdot 5^{3+\underline{x}}$ показательное.

Разделим обе части уравнения на $5^{3+\underline{x}} \neq 0$, получим

$$\frac{2^{3+\underline{x}}}{5^{3+\underline{x}}} = 0,4 \text{ или } \left(\frac{2}{5}\right)^{3+\underline{x}} = \frac{2}{5}, \text{ откуда следует, что } 3 + \underline{x} = 1, \underline{x} = -2.$$

Ответ: -2.

РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

✓ **Пример 1.** Решить уравнение $9^x - 8 \cdot 3^x = 9$.

Решение. Введём вспомогательную переменную $t: t = 3^x$, тогда $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2 = t^2$. Поскольку переменная t может принимать только положительные значения, задача сводится к нахождению положительного корня уравнения $t^2 - 8t - 9 = 0$.

Корни этого квадратного уравнения $t_1 = -1$, $t_2 = 9$, значит, искомый корень 9.

Возвращаясь к переменной x , получим $3^x = 9$, $3^x = 3^2$. В силу монотонности своё значение 3^2 функция $y = 3^x$ принимает единственный раз при $x = 2$.

Ответ: 2.

✓ **Пример 2.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9^{x+1} = 3^{3y+2}, \\ 4x^2 - 2x = y + 13. \end{cases}$$

Решение. Перепишем первое уравнение заданной системы $9^{x+1} = 3^{3y+2}$ как равенство степеней с одинаковыми основаниями: $3^{2x+2} = 3^{3y+2}$. Поскольку каждое своё значение показательная функция принимает по одному разу, из равенства значений показательной функции следует равенство значений её аргумента: $2x + 2 = 3y + 2$, $2x = 3y$.

Подставляя $3y$ вместо $2x$ во второе уравнение системы, получим:

$$(3y)^2 - 3y = y + 13, \quad 9y^2 - 4y - 13 = 0, \quad y_1 = -1, \quad y_2 = \frac{13}{9}.$$

Найдём соответствующие значения x из равенства $2x = 3y$:

$$x_1 = -\frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{13}{6}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -\frac{3}{2}, y_1 = -1; \quad x_2 = \frac{13}{6}, y_2 = \frac{13}{9}.$$

✓ **Пример 3.** Найти область определения функции

$$y = \sqrt[4]{0,25^{x-1} - 9 \cdot 0,5^x + 2}.$$

Решение. Выражение, стоящее под знаком корня четной степени, должно быть неотрицательно:

$$0,25^{x-1} - 9 \cdot 0,5^x + 2 \geq 0.$$

Введём вспомогательную переменную $t: t = 0,5^x$ и найдём положительные решения неравенства $0,25^{-1} \cdot t^2 - 9t + 2 \geq 0$:

$$\begin{cases} 4t^2 - 9t + 2 \geq 0, \\ t > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} t \leq \frac{1}{4} \text{ или } t \geq 2, \\ t > 0, \end{cases}$$

$$0 < t \leq \frac{1}{4} \text{ или } t \geq 2 \text{ (рис. 55)}.$$

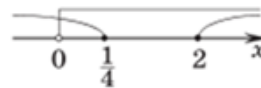


Рис. 55

Вернёмся к переменной x . $0 < 0,5^x \leq \frac{1}{4}$ или $0,5^x \geq 2$. Поскольку $0 < 0,5^x$ при всех значениях x , имеем:

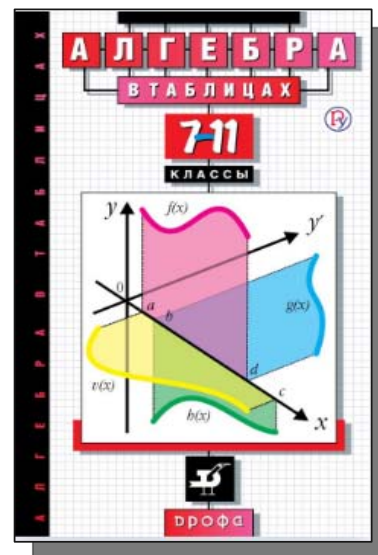
$$0,5^x \leq 0,5^2 \text{ или } 0,5^x \geq 0,5^{-1}.$$

Показательная функция с основанием 0,5 является убывающей, поэтому большему её значению соответствует меньшее значение аргумента, значит: $x \geq 2$ или $x \leq -1$.

$$\text{Ответ: } D(y) = (-\infty; -1] \cup [2; +\infty).$$



СПРАВОЧНЫЕ ПОСОБИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ



<https://rosuchebnik.ru>



УЧЕНИКАМ

Онлайн-уроки

Образование в удобном для тебя формате!

Расписание онлайн-уроков

Готовимся к ВПР, ОГЭ и ЕГЭ. Учимся отвечать на сложные вопросы, повторяем материал, каждый день узнаем что-нибудь новое!

Подробнее >



Расписание онлайн-уроков



ВСЕ ОНЛАЙН-УРОКИ

ВПР

ЕГЭ

ОГЭ

ТРУДНЫЕ ВОПРОСЫ

БИОЛОГИЯ

ГЕОГРАФИЯ

ИСТОРИЯ

МАТЕМАТИКА

ОБЖ

ОБЩЕСТВОЗНАНИЕ

РУССКИЙ ЯЗЫК

ТЕХНОЛОГИЯ

ФИЗИКА

ФИЗИЧЕСКАЯ КУЛЬТУРА

1 класс 2 класс 3 класс 4 класс 5 класс 6 класс 7 класс 8 класс 9 класс 10 класс

11 класс

1

апреля

13:30-14:30 4 класс

Подготовка к ВПР по русскому языку и математике (1 часть). Зубаирова О.В.

17:30-18:30 7 класс

ОГЭ. Физика. «Плавание тел». Пешкова А.В.

2

апреля

11:30-12:30 11 класс

ЕГЭ. Биология. «Циклы развития растений». Бобряшова И.А.

16:00-17:00 11 класс

Трудные вопросы математики. «Предел». Альперин М.И.

17:30-18:30 8 класс

ОГЭ. Физика. «Конденсатор. Лампа накаливания. Электрические нагревательные приборы». Пешкова А.В.

3

апреля

10:00-11:00 10 класс

ЕГЭ. Биология. «Виды изменчивости (1 часть)». Антонова А.А., Кондратьева Е.М.

13:00-14:00 4 класс

Подготовка к ВПР по русскому языку и математике (2 часть). Зубаирова О.В.

17:30-18:30 9 класс

ОГЭ. Физика. «Преломление света. Дисперсия. Цвета тел. Происхождение спектров». Пешкова А.В.

6

апреля

11:30-12:30 7 класс

ВПР. Математика. «Подготовка к ВПР-2020. Разбор заданий». Муравина О.В.

<https://rosuchebnik.ru>



корпорация
российский
учебник



Информационно-методическая поддержка

Муравин Георгий Константинович
Муравина Ольга Викторовна
Сайт: Muravins.ru

Хотите купить?



Отдел продаж
sales@rosuchebnik.ru



Цифровая среда школы
lecta.rosuchebnik.ru

Хотите продолжить общение?



youtube.com/user/drofapublishing



fb.com/rosuchebnik



vk.com/ros.uchebnik



ok.ru/rosuchebnik

rosuchebnik.ru, [росучебник.рф](mailto:rosuchebnik.ru)

Москва, Пресненская наб., д. 6, строение 2
+7 (495) 795 05 35
help@rosuchebnik.ru

Нужна методическая поддержка?

Методический центр
8-800-700-64-83 (звонок бесплатный)
help@rosuchebnik.ru

Хотите купить?



Отдел продаж
sales@rosuchebnik.ru



LECTA

Цифровая среда
школы
lecta.rosuchebnik.ru

Хотите продолжить общение?



youtube.com/user/drofapublishing



fb.com/rosuchebnik



vk.com/ros.uchebnik



ok.ru/rosuchebnik