



МАТЕМАТИКА

10-11 класс

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ. ЗАДАНИЕ № 5. РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ



Федотова Ирина Ивановна,
директор методического центра
«Санкт-Петербург» корпорации
«Российский учебник»

ЕГЭ: ЗАДАЧА № 5



Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант
контрольных измерительных материалов
единого государственного экзамена 2020 года
по математике

Профильный уровень

подготовлен Федеральным государственным бюджетным
научным учреждением

«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

5

Найдите корень уравнения $3^{x-5} = 81$.

Ответ: _____.

ИЛИ

Найдите корень уравнения $\sqrt{3x+49} = 10$.

Ответ: _____.

ИЛИ

Найдите корень уравнения $\log_8(5x+47) = 3$.

Ответ: _____.

ИЛИ

Решите уравнение $\sqrt{2x+3} = x$. Если корней окажется несколько, то в ответ запишите наименьший из них.

Ответ: _____.

© 2020 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки

ЕГЭ 2020. ЗАДАЧА № 5. ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ

- **ЛИНЕЙНЫЕ, КВАДРАТНЫЕ, КУБИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ,**

Например, $x^2 - 15 = (x - 15)^2$

- **РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ:** $\frac{x-7}{7x+9} = \frac{x-7}{x-3}$

- **ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ:** $\sqrt{\frac{2x+5}{3}} = 5$

- **ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ:** $4^{3+5x} = 0,8 \cdot 5^{3+5x}$

- **ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ:** $\log_3(15 - 5x) = 3 \log_3 5$



Моя школа в online

4 четверть. Учусь дома. Учусь сам!

Учебные материалы для самостоятельной работы в помощь учителям, ученикам 1–11 классов и их родителям.

Выбрать предмет



Макарычев Ю. Н. и др. Алгебра. 8 класс. Под ред. С. А. Теляковского



Мерзляк А. Г. и др. Алгебра. 8 класс

Выберите тему

1

✓ Решение уравнений, которые сводятся к квадратным уравнениям

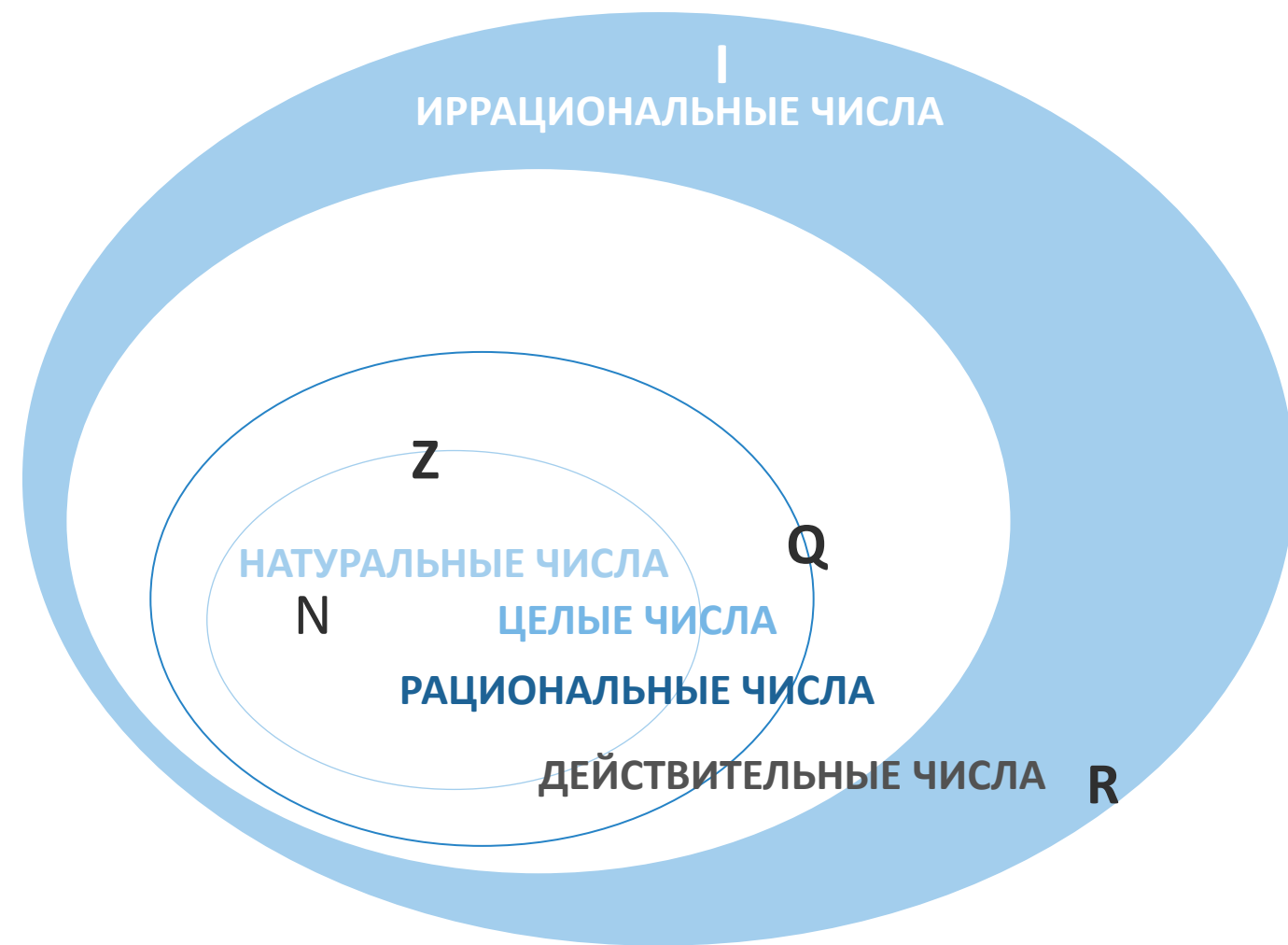
2

✓ Решение уравнений, которые сводятся к квадратным уравнениям

3

✓ Решение уравнений, которые сводятся к квадратным уравнениям (продолжение)

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА



1,2,3,4,..., - **натуральные числа**

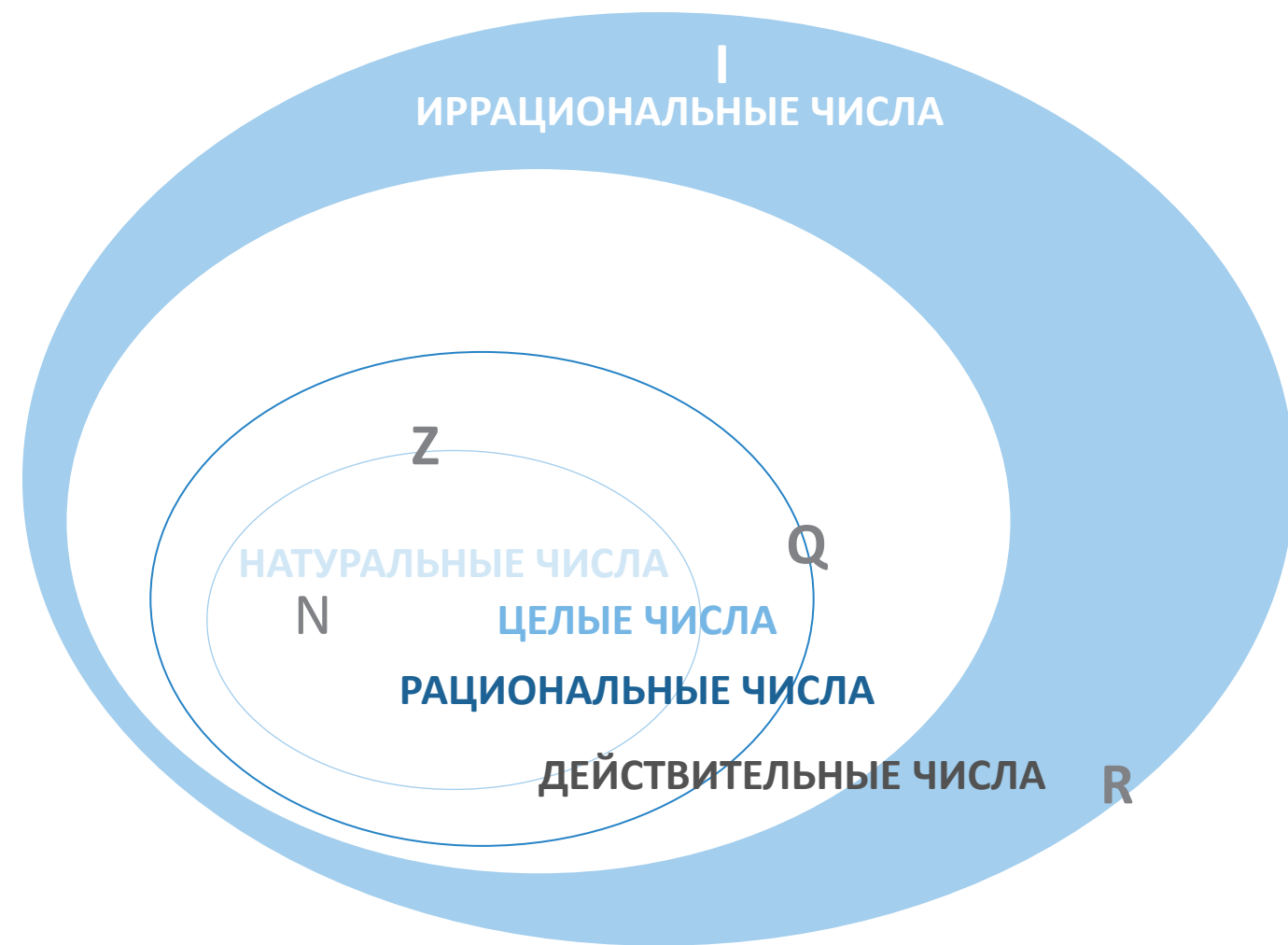
Натуральные числа, им противоположные и 0 – **целые числа**

Числа, которые можно представить в виде дроби m/n , где m, n – натуральные – **рациональные числа**

Числа, которые нельзя представить в виде дроби m/n – **иррациональные числа**

Рациональные и иррациональные – **действительные числа**

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА



Числа, которые нельзя представить в виде дроби m/n , где m, n – натуральные – **иррациональные числа**

Иррациональное число может быть представлено в виде бесконечной непериодической дроби.

Примеры:

Число $\pi \approx 3,141592653589793238462643383279...$

$$\sqrt{2} \approx 1.41421356237....$$

$$4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} \approx 1,58740105 ...$$

$\sqrt{25}$, $\frac{1}{3} \approx 0,33333 ...$ – не являются иррациональными числами

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определим вид уравнения:

1. $3 \cdot (x+1) = x$ - линейное
2. $3 \cdot (x+1) = \sqrt{x}$ - иррациональное
3. $3 \cdot (x+1) = x^2$ - квадратное
4. $3 \cdot (x+1) = x^{-1}$ - рациональное
5. $3 \cdot (x+1) = x^{\frac{1}{3}}$ - иррациональное

Уравнение - это равенство вида

$$f(x) = g(x),$$

где f и g – функции.

Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ называют множество значений переменной x , при которых имеют смысл обе части уравнения.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Что нам указывает, что данное уравнение иррациональное?

В иррациональном уравнении переменная содержится под знаком корня или возведена в дробную степень, которую нельзя свести к дробному числу.

$$\sqrt[3]{x - 2} = -0,5$$

$$\sqrt{2x + 1} = 3$$

$$3 - 5x = x^{\frac{1}{2}}$$

УРАВНЕНИЕ - ЭТО РАВЕНСТВО ВИДА $f(x) = g(x)$, где f и g – функции.

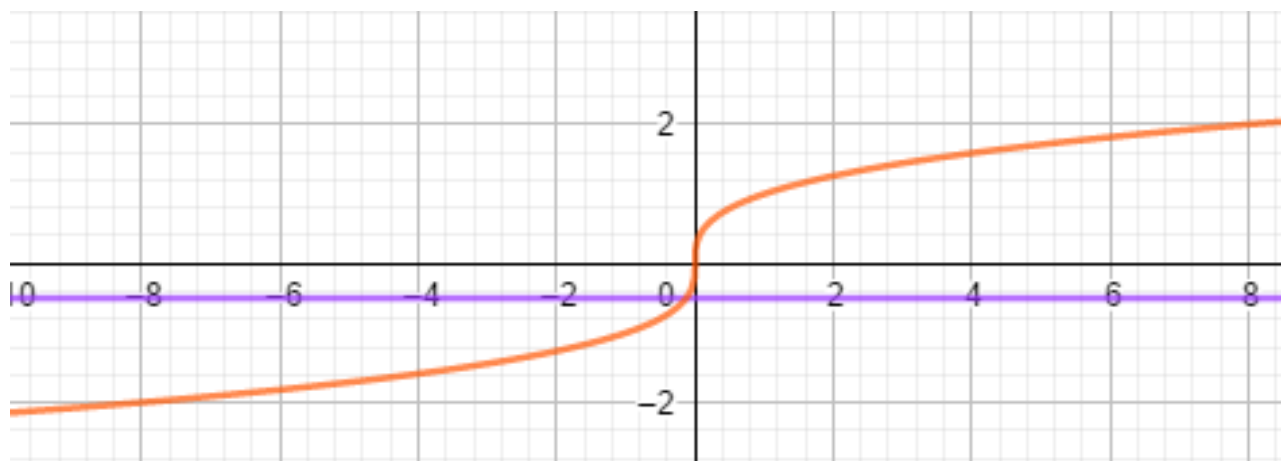
Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ называют множество значений переменной x , при которых имеют смысл обе части уравнения.

Решить уравнение: $\sqrt[3]{x} = -0,5$

Левая часть $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (Область определения – множество действительных чисел)

Правая часть $g(x) = -0,5$ (Область определения – множество действительных чисел)

Область определения уравнения – множество действительных чисел.



УРАВНЕНИЕ - ЭТО РАВЕНСТВО ВИДА $f(x) = g(x)$, где f и g – функции.

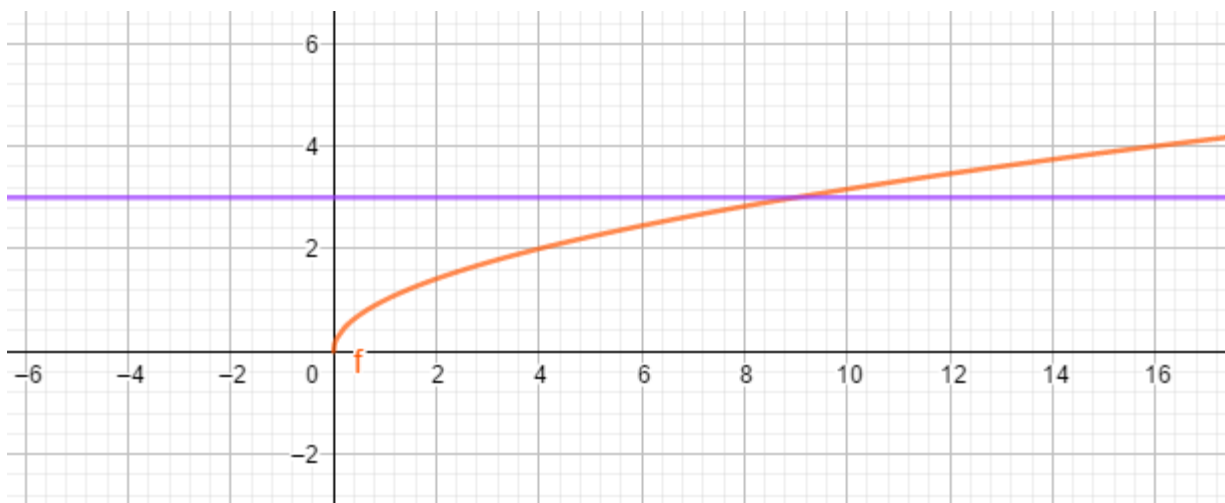
Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ называют множество значений переменной x , при которых имеют смысл обе части уравнения.

Решить уравнение: $\sqrt{x} = 3$

Левая часть $f(x) = \sqrt{x}$ (Область определения – множество неотрицательных чисел)

Правая часть $g(x) = 3$ (Область определения – множество действительных чисел)

Область определения уравнения - множество неотрицательных чисел.



РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ВАЖНО СОБЛЮДАТЬ РАВНОСИЛЬНОСТЬ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ.

Равносильными называются уравнения, множества корней которых совпадают. Равносильными также считаются уравнения, которые не имеют корней.

ТЕОРЕМА 1.

Если обе части уравнения возвести в нечетную степень, то получим равносильное уравнение.

ТЕОРЕМА 2.

При возведении обеих частей уравнения в четную степень получаем уравнение, являющееся следствием данного (могут появиться посторонние корни)

При решении простейших иррациональных уравнений необходимо:

- возвести обе части уравнения в нужную степень (получим рациональное уравнение)
- решить уравнение
- если возводили в четную степень, то сделать проверку

РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пример 1.

Решить уравнение:

$$\sqrt[3]{2x + 1} = -3$$

(возведем обе части уравнения в третью степень)

$$(\sqrt[3]{2x + 1})^3 = (-3)^3$$

$$2x + 1 = -27$$

$$x = -14$$

Ответ: -14.

РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пример 2.

Решить уравнение:

а) $\sqrt{2x + 31} = 9$

(возведем обе части уравнения во вторую степень)

$$(\sqrt{2x + 31})^2 = 9^2$$

$$2x + 31 = 81$$

$$2x = 50$$

$$x = 25$$

Ответ: 25.

б) $\sqrt{2x + 31} = -9$

Ответ: нет корней

РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пример 3.

Решить уравнение:

$$\sqrt{40 + 3x} = x \quad (\text{область определения – множество неотрицательных чисел})$$

(возведем обе части уравнения во вторую степень)

$$(\sqrt{40 + 3x})^2 = x^2$$

$$40 + 3x = x^2$$

$$x^2 - 3x - 40 = 0 \text{ – квадратное, дискриминант неотрицательный}$$

Найдем корни по теореме Виета

$$x = -5 \text{ и } x = 8$$

(возводили в четную степень, выполняем проверку)

Если $x = -5$, то $\sqrt{40 + 3 \cdot (-5)} = -5$ – не удовлетворяет области определения

Если $x = 8$, то $\sqrt{40 + 3 \cdot 8} = 8$ – истинно

Ответ: 8.

РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пример 3.

Решить уравнение:

$\sqrt{40 + 3x} = x$ (область определения – множество неотрицательных чисел)

(возведем обе части уравнения во вторую степень)

$$(\sqrt{40 + 3x})^2 = x^2; 40 + 3x = x^2$$

$x^2 - 3x - 40 = 0$ – квадратное, дискриминант неотрицательный

Найдем корни по теореме Виета

$$x = -5 \text{ и } x = 8$$

(возводили в четную степень, выполняем проверку)

Если $x = -5$, то $\sqrt{40 + 3 \cdot (-5)} = -5$ – не удовлетворяет области определения

Если $x = 8$, то $\sqrt{40 + 3 \cdot 8} = 8$ – истинно

Ответ: 8.

Второй способ.

$$\sqrt{40 + 3x} = x$$

Решение:

$$\begin{cases} (\sqrt{40 + 3x})^2 = x^2, \\ x \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 40 + 3x = x^2, \\ x \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 40 = 0, \\ x \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5, \\ x \geq 0; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 8, \\ x \geq 0; \end{cases}$$

$$x = 8$$

Ответ: 8.

РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пример 4.

Решить уравнение:

$$\sqrt{\frac{2x+5}{3}} = 5$$

(возведем обе части уравнения во вторую степень)

$$\left(\sqrt{\frac{2x+5}{3}}\right)^2 = 5^2$$

$$\frac{2x+5}{3} = 25$$

$$2x = 70$$

$$x = 35$$

Ответ: 35.

РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пример 5.

Решить уравнение:

а) $\sqrt{61 - 9x} = 5$

(возведем обе части уравнения во вторую степень)

$$(\sqrt{61 - 9x})^2 = 5^2$$

$$61 - 9x = 25$$

$$-9x = -36$$

$$x = 4$$

Ответ: 4.

б) $\sqrt[3]{x - 5} = 3$

(возведем обе части уравнения в третью степень)

$$(\sqrt[3]{x - 5})^3 = 3^3$$

$$x - 5 = 27$$

$$x = 32$$

Ответ: 32.

РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пример 6.

Решить уравнение:

$$(\sqrt{3x+4})^2 = (\sqrt{x-2})^2$$

(применим формулу $(\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0$)

$$\begin{cases} 3x + 4 = x - 2, \\ x - 2 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = -6, \\ x \geq 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3, \\ x \geq 2; \end{cases}$$

Ответ: нет корней.

РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пример 7.

Решить уравнение:

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$$

(возведем обе части уравнения в квадрат)

$$2x-3+2\sqrt{2x-3}\sqrt{4x+1}+4x+1=16$$

$$6x-2+2\sqrt{(2x-3)(4x+1)} = 16$$

$$2\sqrt{(2x-3)(4x+1)}=18-6x$$

$$\sqrt{(2x-3)(4x+1)}=9-3x$$

$$(2x-3)(4x+1)=81-54x+9x^2$$

$$x^2-44x+84=0$$

$$x=42 \text{ и } x=2$$

42-посторонний корень

Ответ:2.

МЕТОД РАВНОСИЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 12. Метод равносильных преобразований для решения иррациональных уравнений

Вы знаете, что посторонние корни уравнения можно выявить в результате проверки.

Когда идёт речь о проверке как об этапе решения уравнения, невозможно избежать проблемы её технической реализации. Например, число $\frac{-2 + 6\sqrt{11}}{7}$ является корнем уравнения $\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1}$. Чтобы в этом убедиться, надо выполнить значительную вычислительную работу.

Для подобных ситуаций возможен другой путь решения — метод равносильных преобразований.

Теорема 12.1

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись доказательством теоремы 11.1, докажите эту теорему самостоятельно.

Замечание. Уравнение $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ также равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Выбор соответствующей системы, как правило, связан с тем, какое из неравенств, $f(x) \geq 0$ или $g(x) \geq 0$, решить легче.

Когда сделаны уроки

Примеры решения более сложных иррациональных уравнений и неравенств, а также их систем

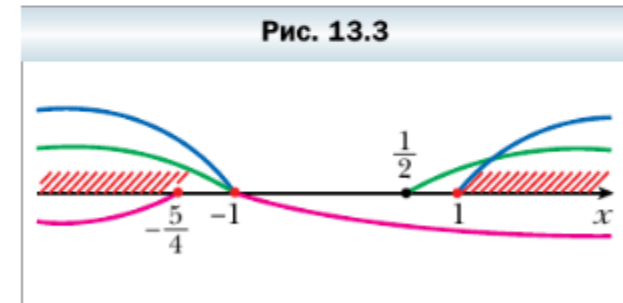
Пример 1. Решите уравнение $\sqrt{4x^2 + 9x + 5} - \sqrt{2x^2 + x - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$.

Решение. Разложим квадратные трёхчлены, стоящие под радикалами, на множители: $\sqrt{(x+1)(4x+5)} - \sqrt{(x+1)(2x-1)} = \sqrt{(x-1)(x+1)}$.

Теперь важно не сделать распространённую ошибку, а именно применить теорему о корне из произведения в таком виде: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. На самом деле записанная формула справедлива лишь для $a \geq 0$ и $b \geq 0$. Если же $a \leq 0$ и $b \leq 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.

Поскольку областью определения данного уравнения является множество $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right] \cup [1; +\infty) \cup \{-1\}$ (рис. 13.3), то данное уравнение равносильно совокупности двух систем и одного уравнения.

Рис. 13.3



ЭФФЕКТИВНАЯ ПОМОЩЬ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ

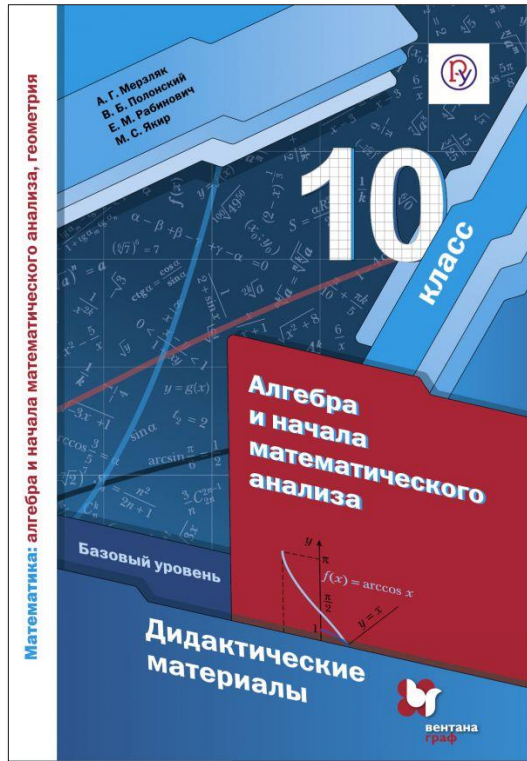
УМК А.Г. Мерзляка. Алгебра и начала
математического анализа (10-11) Б



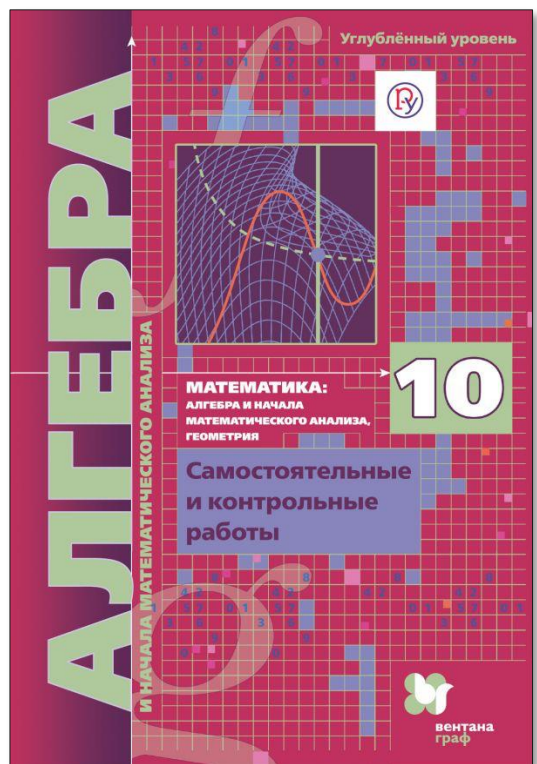
УМК А.Г. Мерзляка. Алгебра и начала
математического анализа (10-11) У



ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ



САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ



ПО ВОПРОСАМ МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОДДЕРЖКИ И ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ



Методическая поддержка
«Российский учебник»
help@rosuchebnik.ru
8 (800) 2000-550 (звонок бесплатный)

