МЕТОД ОБЪЕМОВ КАК УДОБНЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

ПРОСВЕЩЕНИЕ

корпорация российский учебник

ИЗДАТЕЛЬСТВО БИНОМ

Виктория Любимова

учитель математики высшей категории,
методист ИМЦ Колпинского района Санкт-Петербурга

viklubimova@mail.ru https://clck.ru/Nojco

Методы решения стереометрических задач

Полезнее одну задачу решить несколькими способами,
чем решить несколько однотипных задач одним способом

Основные методы решения стереометрических задач:

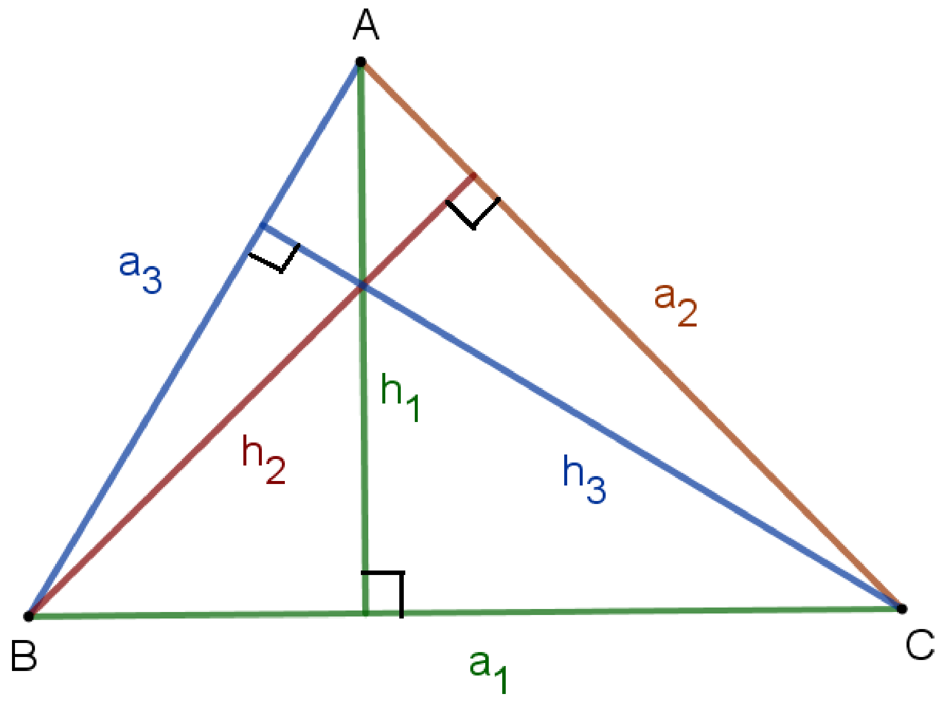
- поэтапно-вычислительный
- метод дополнительных построений
- координатный метод
- координатно-векторный метод
- векторный метод
- метод объёмов
- метод опорных задач

Подготовительные задачи

Из планиметрии обучающимся уже знаком **метод площадей:**

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} a_1 \cdot h_1 = \frac{1}{2} a_2 \cdot h_2 = \frac{1}{2} a_3 \cdot h_3,$$

откуда $h_2 = \frac{a_1 \cdot h_1}{a_2}$

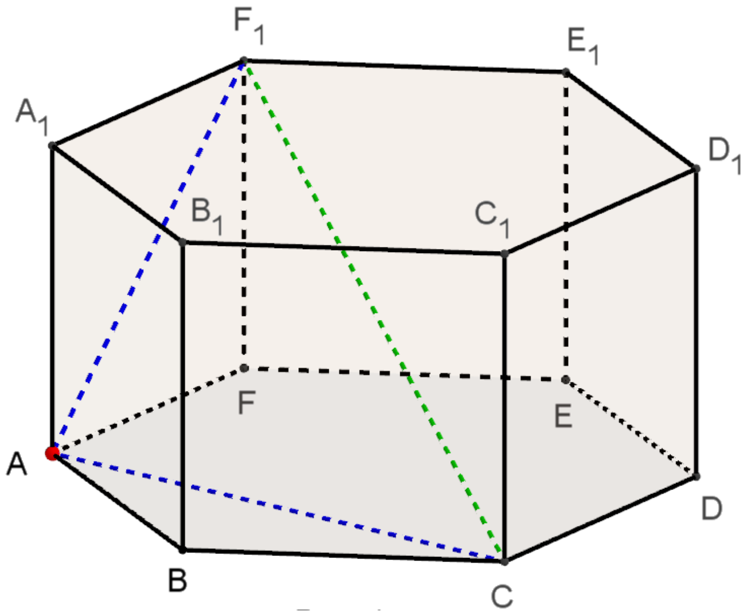


Метод площадей полезно вспомнить, применяя его при решении стереометрических задач на нахождение расстояния от точки до прямой

Подготовительные задачи

Задача А (прямоугольный треугольник). В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой CF_1 .

Решение:



В треугольнике ACF_1 длины сторон: $AC = \sqrt{3}$, $AF_1 = \sqrt{2}$.

$FF_1 \perp ABC$ как ребро прямой призмы, AF – проекция AF_1 на ABC, $AC \perp AF$ по свойству правильного шестиугольника, значит, по теореме о трех перпендикулярах $AC \perp AF_1$.

По теореме Пифагора $CF_1 = \sqrt{3+2} = \sqrt{5}$.

$\rho(A; CF_1)$ - высота прямоугольного треугольника к гипотенузе CF_1 ,

$S_{\Delta ACF_1} = \frac{1}{2} \cdot CF_1 \cdot \rho(A; CF_1) = \frac{1}{2} \cdot AF_1 \cdot AC$, откуда

$$\rho(A; CF_1) = \frac{AF_1 \cdot AC}{CF_1} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

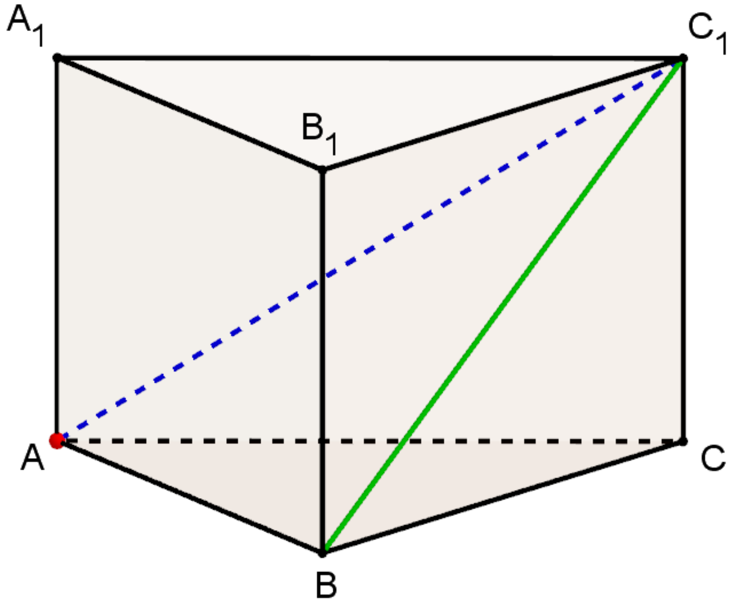
Ответ: $\frac{\sqrt{30}}{5}$.

Источник условия: задача №11(ж) из пособия Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Многогранники: типы задач и методы их решения http://alexlarin.net/ege/2013/C22013.html

Подготовительные задачи

Задача Б (равнобедренный треугольник). В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BC_1 .

Решение:



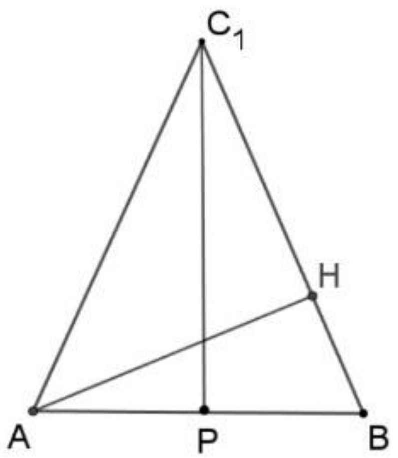
В треугольнике ABC_1 длины сторон $AC_1 = BC_1 = \sqrt{2}, AB = 1.$

Высота, проведенная к основанию AB:

$$C_1P = \sqrt{BC_1^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

AH – высота к стороне BC_1 ,

$$\rho(A;\ BC_1) = AH = \frac{AB \cdot C_1P}{BC_1} = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$



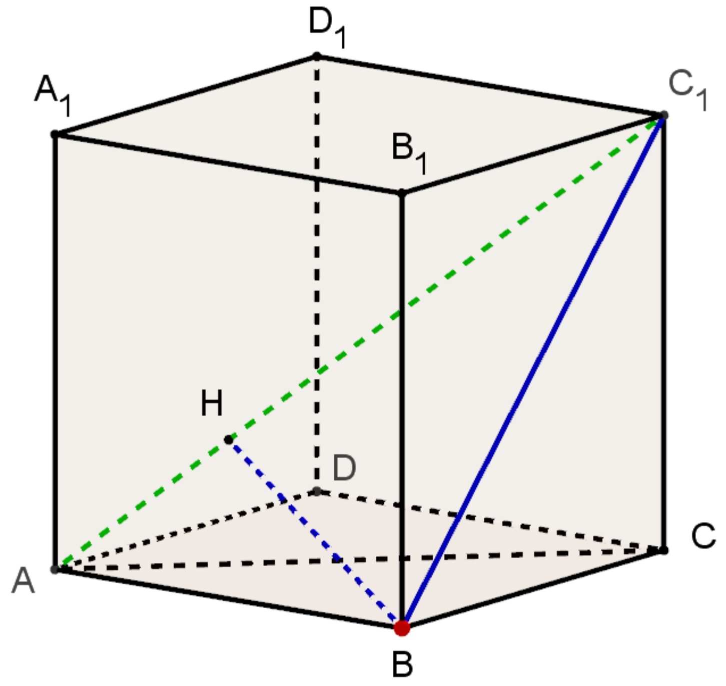
Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

Источник условия: задача № 8 из пособия Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Многогранники: типы задач и методы их решения http://alexlarin.net/ege/2013/C22013.html

Подготовительные задачи

Задача В (разносторонний, не прямоугольный треугольник). Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – ромб $ABCD$, в котором $AB = 10$, $AC = 6\sqrt{7}$. Боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{21}$. Найдите расстояние от вершины B до прямой AC_1.

Решение:



В треугольнике BAC_1 длины сторон: $AB = 10$,

$$BC_1 = \sqrt{100 + 9 \cdot 21} = \sqrt{289} = 17,$$

$$AC_1 = \sqrt{36 \cdot 7 + 9 \cdot 21} = \sqrt{9 \cdot 7 \cdot (4 + 3)} = 21.$$

$$\rho(B; AC_1) = BH = \frac{2S}{AC_1}.$$

Можно рассмотреть разные способы нахождения площади треугольника BAC_1 :

1 способ: формула Герона

Полупериметр треугольника BAC_1 равен 24,

$S = \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 14} = 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84$, откуда $\rho(B;\ AC_1) = \frac{2 \cdot 84}{21} = 8$

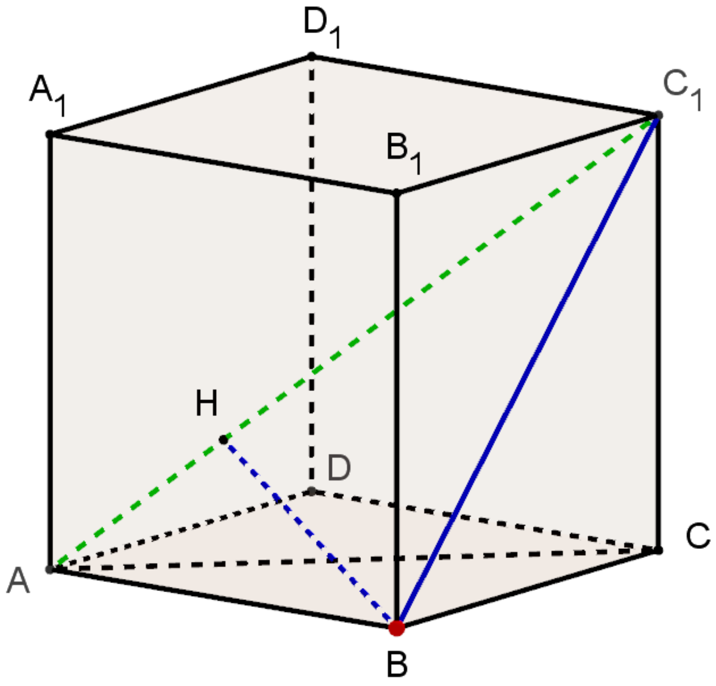
Ответ: 8.

Источник условия: задача № 16 из пособия Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Многогранники: типы задач и методы их решения http://alexlarin.net/ege/2013/C22013.html

Подготовительные задачи

Задача B (разносторонний, не прямоугольный треугольник). Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – ромб $ABCD$, в котором $AB = 10$, $AC = 6\sqrt{7}$. Боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{21}$. Найдите расстояние от вершины B до прямой AC_1.

Решение:



В треугольнике BAC_1 длины сторон: $AB = 10$, $BC_1 = 17$, $AC_1 = 21$.

$$\rho(B;\ AC_1) = BH = \frac{2S}{AC_1}.$$

2 способ: нахождение синуса угла через косинус, вычисленный с использованием теоремы косинусов

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC_1^2 - BC_1^2}{2 \cdot AB \cdot AC_1} = \frac{100 + 441 - 289}{2 \cdot 10 \cdot 21} = \frac{252}{420} = \frac{3}{5},$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}, \qquad BH = AB \cdot \sin A = 10 \cdot \frac{4}{5} = 8.$$

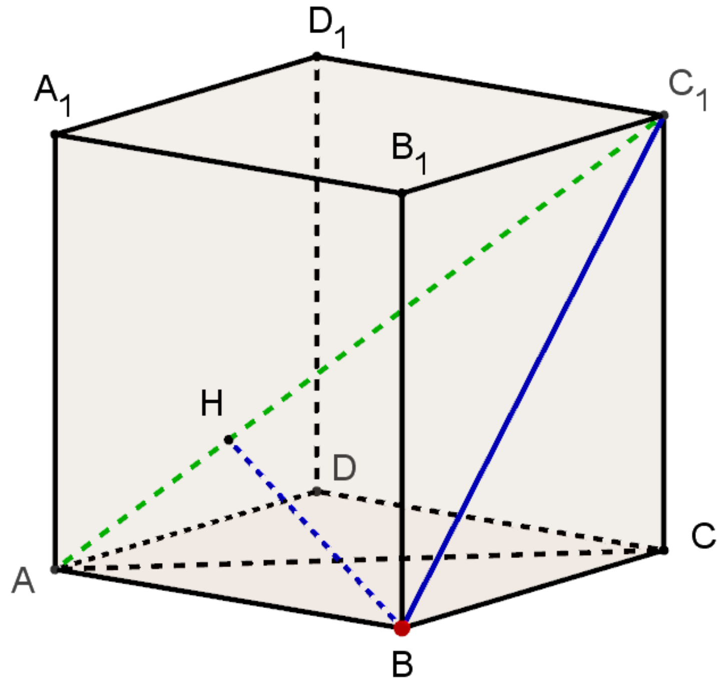
Ответ: 8.

Источник условия: задача № 16 из пособия Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Многогранники: типы задач и методы их решения http://alexlarin.net/ege/2013/C22013.html

Подготовительные задачи

Задача B (разносторонний, не прямоугольный треугольник). Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – ромб $ABCD$, в котором $AB = 10$, $AC = 6\sqrt{7}$. Боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{21}$. Найдите расстояние от вершины B до прямой AC_1.

Решение:



В треугольнике BAC_1 длины сторон: $AB = 10$, $BC_1 = 17$, $AC_1 = 21$.

$\rho(B;\ AC_1) = BH = \dfrac{2S}{AC_1}$.

3 способ: нахождение длины одной из частей, на которые сторону AC_1 делит основание высоты H.

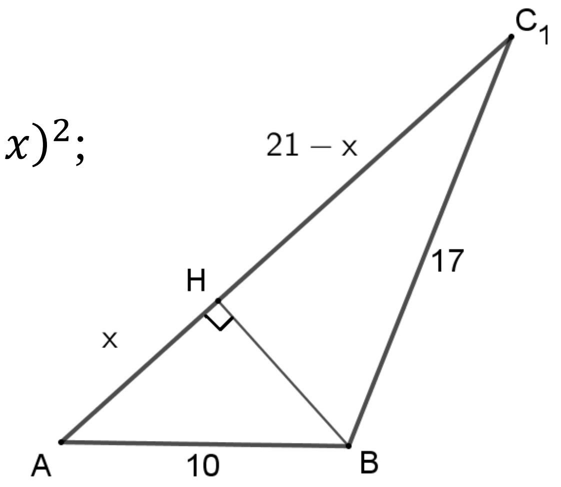
Пусть $AH = x$, тогда $HC_1 = 21 - x$.

По теореме Пифагора $100 - x^2 = 289 - (21 - x)^2$;

откуда $x = 6$.

$\rho(B;\ AC_1) = BH = \sqrt{100 - 36} = 8$.

Ответ: 8.



Источник условия: задача № 16 из пособия Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Многогранники: типы задач и методы их решения http://alexlarin.net/ege/2013/C22013.html

Суть метода объемов

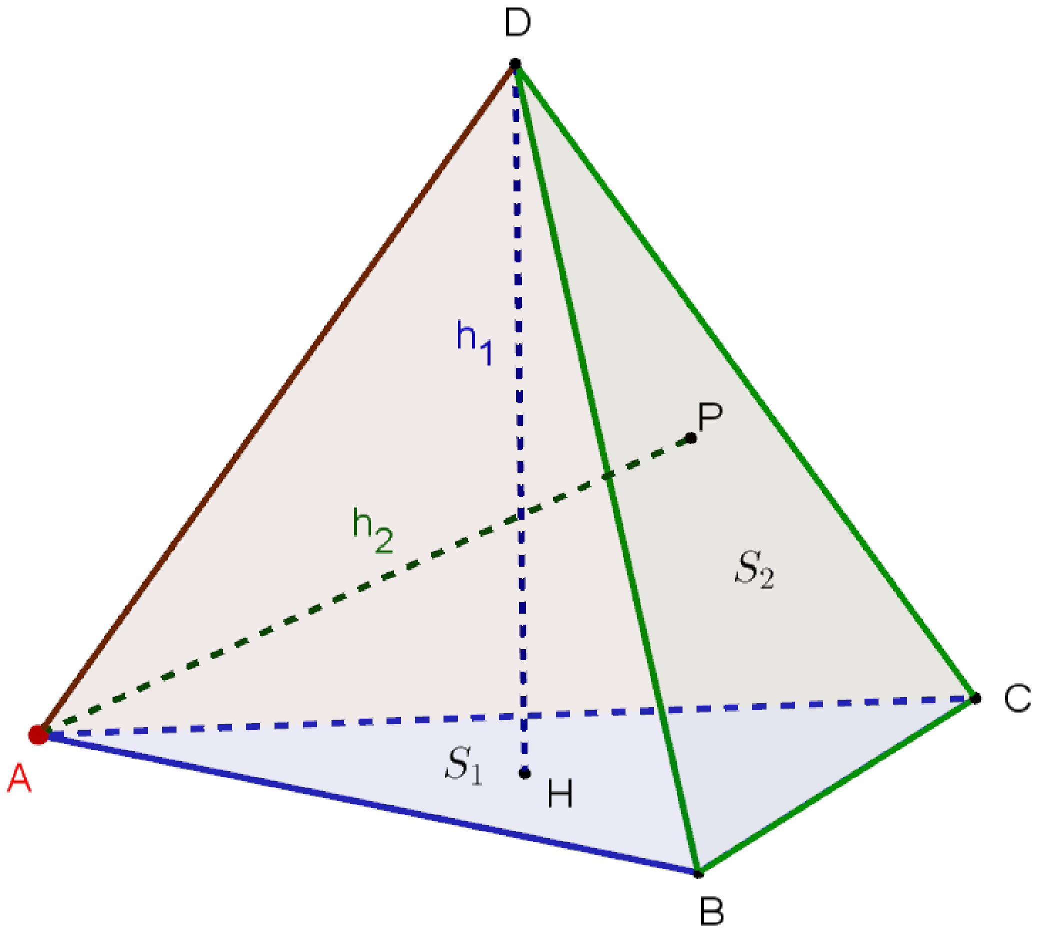
$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{BCD} \cdot \rho(A;\ BCD) = \frac{1}{3} \cdot S_{ACD} \cdot \rho(B;\ ACD) = \frac{1}{3} \cdot S_{ABD} \cdot \rho(C;\ ABD) = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot \rho(D;\ ABC),$$

то есть $S_1 \cdot h_1 = S_2 \cdot h_2$

$$h_2 = \frac{h_1 \cdot S_1}{S_2}$$

Пример:

$$\rho(A;\ BCD) = \frac{\rho(D;\ ABC) \cdot S_{ABC}}{S_{BCD}}$$



Алгоритм метода объемов

1 Рассмотреть треугольную пирамиду, обозначение которой составлено следующим образом: одна буква – данная точка, три другие – обозначение плоскости, до которой нужно найти расстояние (первое основание пирамиды), также можно выбирать другие точки на этой плоскости

2 Выбрать второе основание так, чтобы было удобно вычислять и высоту к нему, и площадь треугольника, то есть удобно вычислить объём пирамиды.

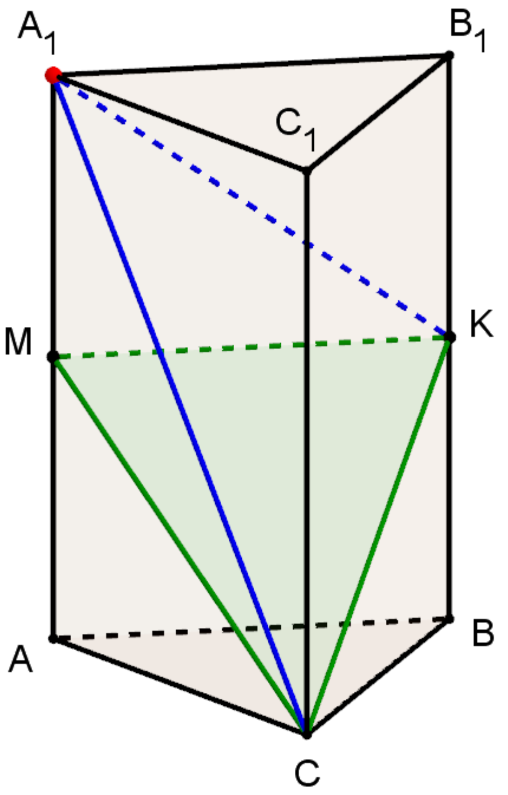
3 Вычислить площади двух треугольников (двух граней пирамиды, выбираемых в качестве основания в первом и втором случае) и длину одного отрезка (высота ко второй выбранной грани), затем подставить полученные числа в формулу для объёма.

Можно также пользоваться сокращённой записью формулы: $h_2 = \frac{S_1 \cdot h_1}{S_2}$

Нахождение расстояния от точки до плоскости

Задача 1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M – середина ребра AA_1, точка K – середина ребра BB_1. Найдите расстояние от вершины A_1 до плоскости CMK, если $AA_1 = 6$, $AB = 4$

Решение:



Объем пирамиды A_1CMK: $V = \frac{1}{3} \cdot S_{CMK} \cdot \rho(A_1;\ CMK) = \frac{1}{3} \cdot S_{A_1MK} \cdot \rho(C;\ A_1MK)$

тогда

$$\rho(A_1;\ CMK) = \frac{S_{A_1MK} \cdot \rho(C;\ A_1MK)}{S_{CMK}}.$$

$$S_{A_1MK} = \frac{1}{2} A_1M \cdot MK = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AA_1 \cdot AB = \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot 4 = 6.$$

Так как $ABC \perp ABB_1$, то $\rho(C;\ A_1MK) = \rho(C;\ AB) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 2\sqrt{3}$.

$CM = CK = \sqrt{AC^2 + AM^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$, тогда

$$S_{CMK} = \frac{1}{2} MK \cdot \sqrt{CM^2 - \left(\frac{MK}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{25 - 4} = 2\sqrt{21}.$$

Таким образом, $\rho(A_1;\ CMK) = \frac{6 \cdot 2\sqrt{3}}{2\sqrt{21}} = \frac{6}{\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{7}}{7}$.

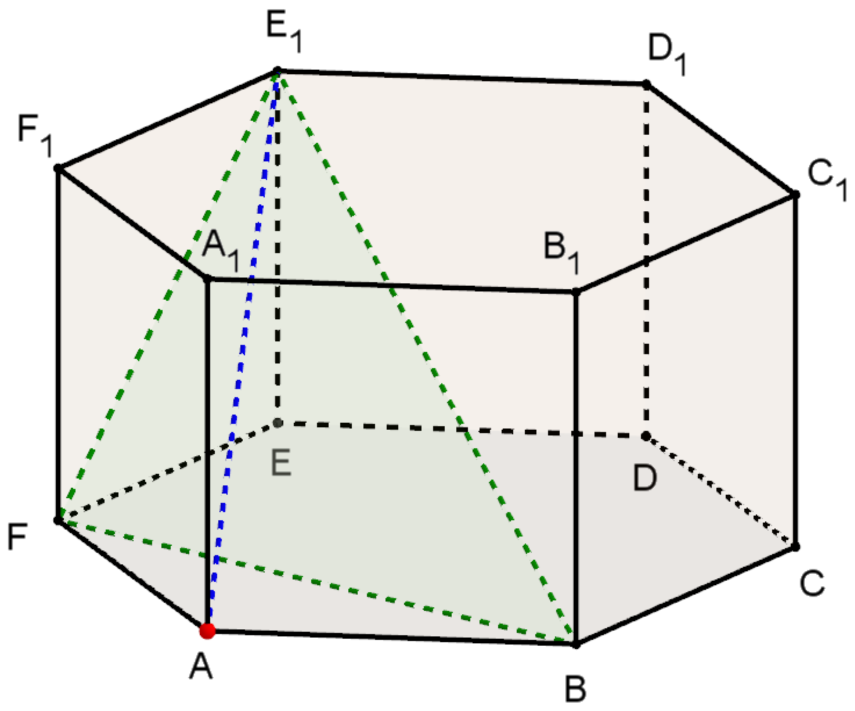
Ответ: $\frac{6\sqrt{7}}{7}$.

Источник условия: задача № 28 из пособия Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Многогранники: типы задач и методы их решения http://alexlarin.net/ege/2013/C22013.html

Нахождение расстояния от точки до плоскости

Задача 2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости BFE_1.

Решение:



В пирамиде $ABFE_1$ $\quad \rho(A;\ BFE_1) = \dfrac{S_{ABF} \cdot \rho(E_1;\ ABF)}{S_{BFE_1}}.$

$$S_{ABF} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AF \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad \rho(E_1;\ ABF) = 1,$$

В треугольнике BFE_1 $BF = \sqrt{3}, FE_1 = \sqrt{2}$. Так как $BF \perp FE$, то по теореме о трёх перпендикулярах $BF \perp FE_1$, тогда

$$S_{BFE_1} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\rho(A; BFE_1) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

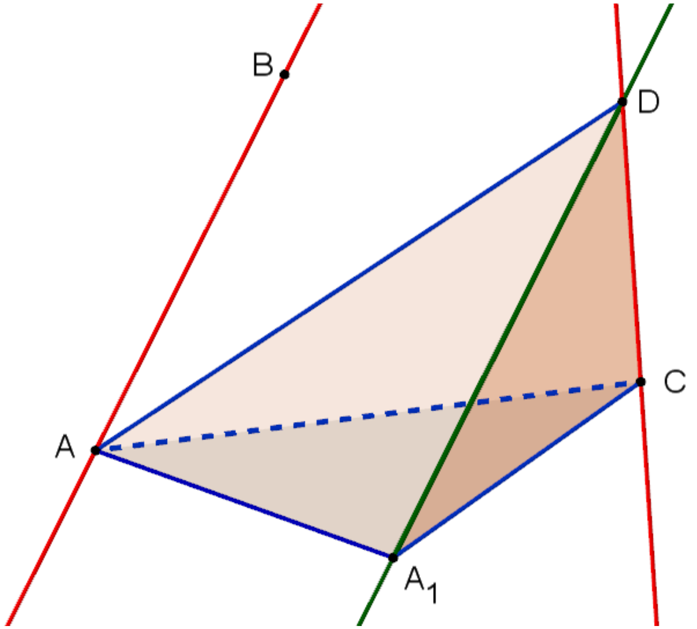
Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми

Алгоритм:

1 Построить прямую, параллельную одной из двух скрещивающихся прямых и пересекающую другую прямую. Две пересекающие прямые определяют плоскость.

2 Найти расстояние от любой точки первой из скрещивающихся прямых до этой плоскости методом объёмов.

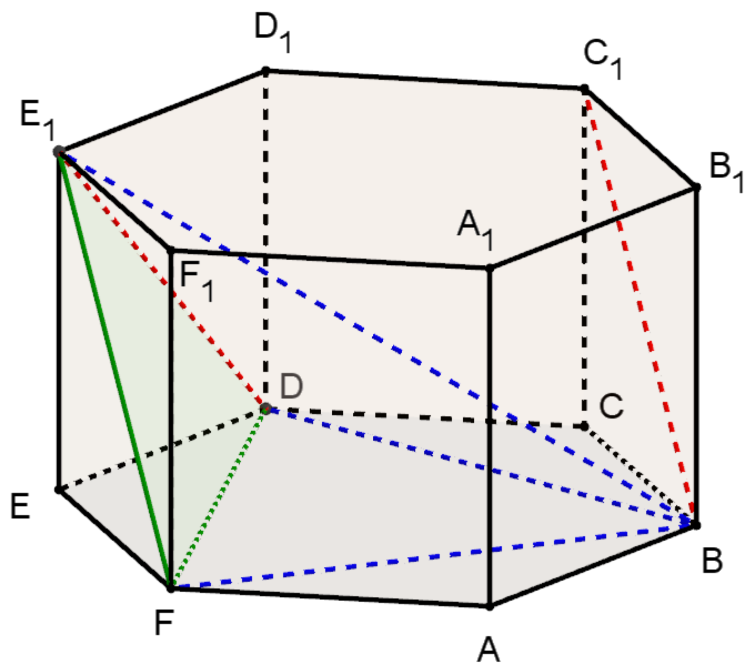


Пример: найти $\rho(AB;\ CD)$, пусть $A_1D || AB$, $\rho(AB;\ CD) = \rho(A;\ A_1CD)$

Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми

Задача 3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми DE_1 и BC_1.

Решение:



$FE_1 \parallel BC_1$, тогда $\rho(DE_1;\ BC_1) = \rho(B; FDE_1)$.

В пирамиде $BFDE_1$ $\quad \rho(B; FDE_1) = \dfrac{S_{BDF} \cdot \rho(E_1; BDF)}{S_{FDE_1}}$.

В треугольнике BDF $BD = DF = BF = \sqrt{3}$, отсюда

$$S_{BDF} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}. \qquad \rho(E_1; BDF) = E_1E = 1.$$

В треугольнике FDE_1 $\quad DE_1 = FE_1 = \sqrt{2},\ \ FD = \sqrt{3}$, отсюда

$$S_{FDE_1} = \frac{1}{2} \cdot FD \cdot \sqrt{DE_1^2 - \left(\frac{FD}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2 - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

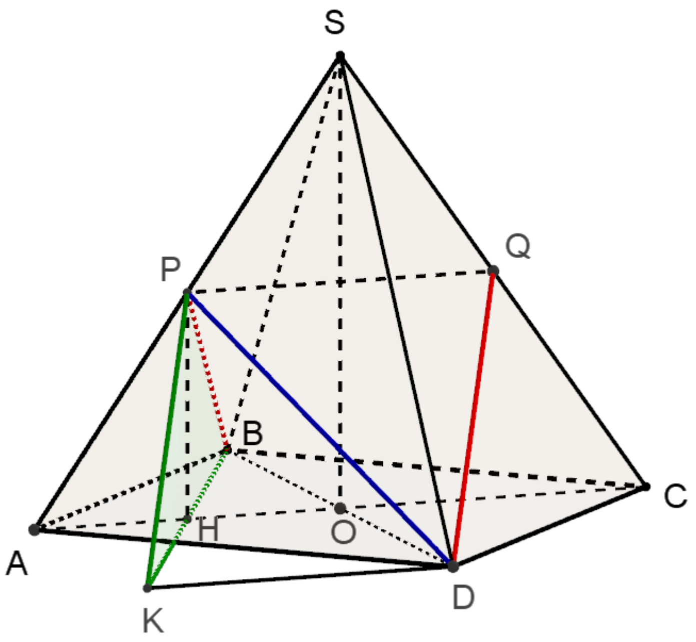
Таким образом, $\rho(DE_1;\ BC_1) = \rho(B;\ FDE_1) = \dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot 1}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Источник условия: задача № 44 из пособия Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Многогранники: типы задач и методы их решения http://alexlarin.net/ege/2013/C22013.html

Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми

Задача 4. Точки P и Q – середины рёбер SA и SC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$.
а) Докажите, что расстояние между прямыми BP и DQ не зависит от высоты пирамиды.
б) Найдите расстояние между прямыми BP и DQ, если основанием пирамиды является квадрат, площадь которого равна 10.



План решения (необходимо подробное пояснение шагов):

А) $KP \parallel DQ, \quad \rho(BP;\ DQ) = \rho(D;\ BKP) = \dfrac{S_{BDK} \cdot \rho(P;\ BDK)}{S_{BKP}}.$

$$S_{BKP} = \frac{1}{2} \cdot PH \cdot BK; \qquad \rho(BP;\ DQ) = \frac{S_{BDK} \cdot PH}{\frac{1}{2} \cdot PH \cdot BK} = \frac{2S_{BDK}}{BK}.$$

Б) $S_{BDK} = \dfrac{1}{2} BD \cdot DK = \dfrac{d^2}{4}, \quad BK = \sqrt{d^2 + \left(\dfrac{d}{2}\right)^2} = \dfrac{d\sqrt{5}}{2}.$

$$\rho(BP;\ DQ) = \frac{2S_{BDK}}{BK} = \frac{2 \cdot \frac{d^2}{4}}{\frac{d\sqrt{5}}{2}} = \frac{d}{\sqrt{5}}. \qquad S = \frac{d^2}{2},\ d = 2\sqrt{5}.$$

$\rho(BP;\ DQ) = 2.$ **Ответ:** 2.

Источник условия: задача из пробного ЕГЭ 2019 года, г. Брянск.

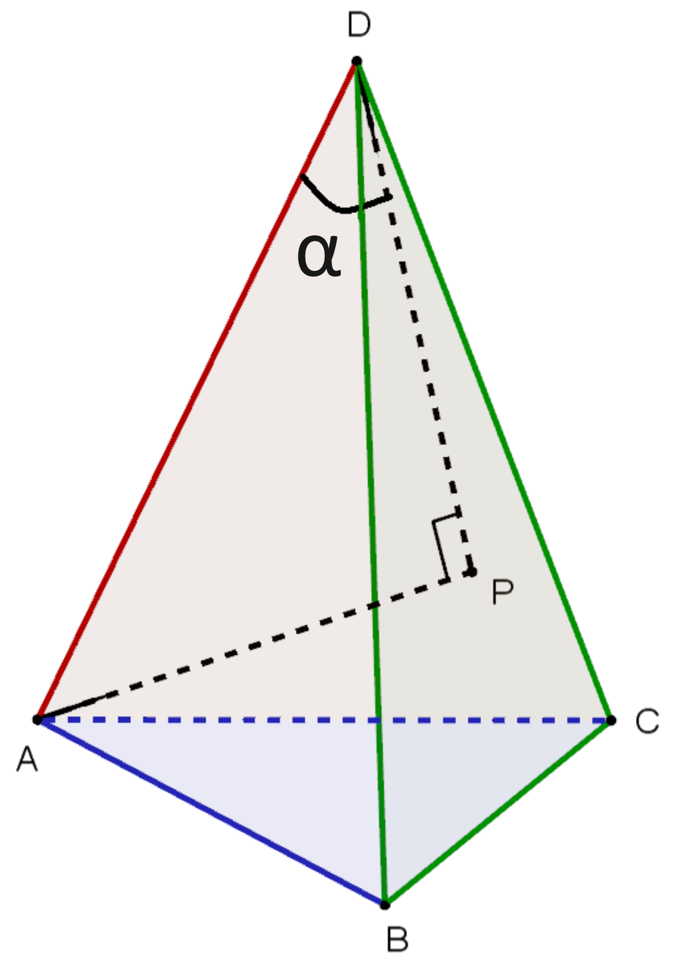
Угол между прямой и плоскостью

Алгоритм

1 Рассмотреть данную прямую или выбрать другую, параллельную ей прямую, чтобы точку пересечения прямой и плоскости можно было удобно увидеть на чертеже.

2 Найти расстояние от любой точки выбранной прямой до данной плоскости методом объёмов (то есть длину перпендикуляра, опущенного из выбранной точки к плоскости)

3 Рассмотреть прямоугольный треугольник, в котором длина катета – найденная длина перпендикуляра, а длина гипотенузы – расстояние от выбранной на прошлом шаге точки прямой до точки пересечения этой прямой и плоскости. Из этого треугольника найти синус искомого угла.

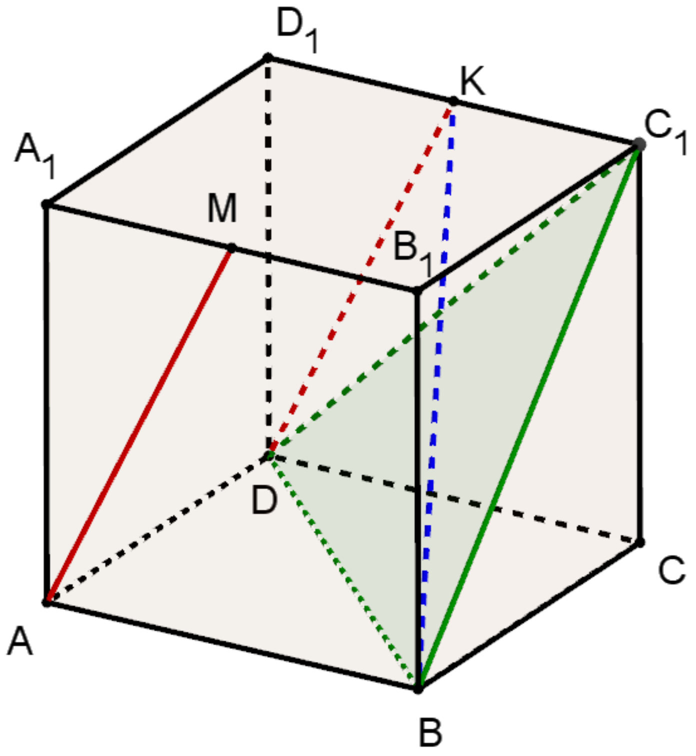


Пример: $\sin \angle(AD; BCD) = \frac{AP}{AD} = \frac{\rho(A; BCD)}{AD}$

Угол между прямой и плоскостью

Задача 5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AM и плоскостью BDC_1.

Решение:



Пусть K – середина C_1D_1, тогда $DK||AM$.

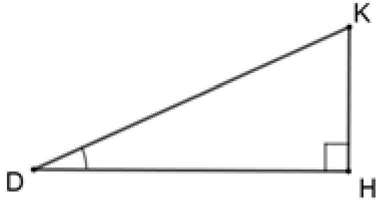
$$\sin\angle(AM; BDC_1) = \sin\angle(DK; BDC_1) = \frac{\rho(K;\ BDC_1)}{DK}.$$

$$\rho(K;\ BDC_1) = \frac{S_{DKC_1}\cdot\rho(B;\ DKC_1)}{S_{BDC_1}}.$$

Примем ребро куба за 1, тогда $S_{DKC_1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{4}$; $\rho(B;\ DKC_1) = BC = 1.$

В треугольнике BDC_1 все стороны равны $\sqrt{2}$, значит, $S_{BDC_1} = \frac{(\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Таким образом, $\rho(K;\ BDC_1) = \frac{\frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = KH.$



$$DK = AM = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$\sin\angle KDH = \frac{KH}{DK} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}.$$

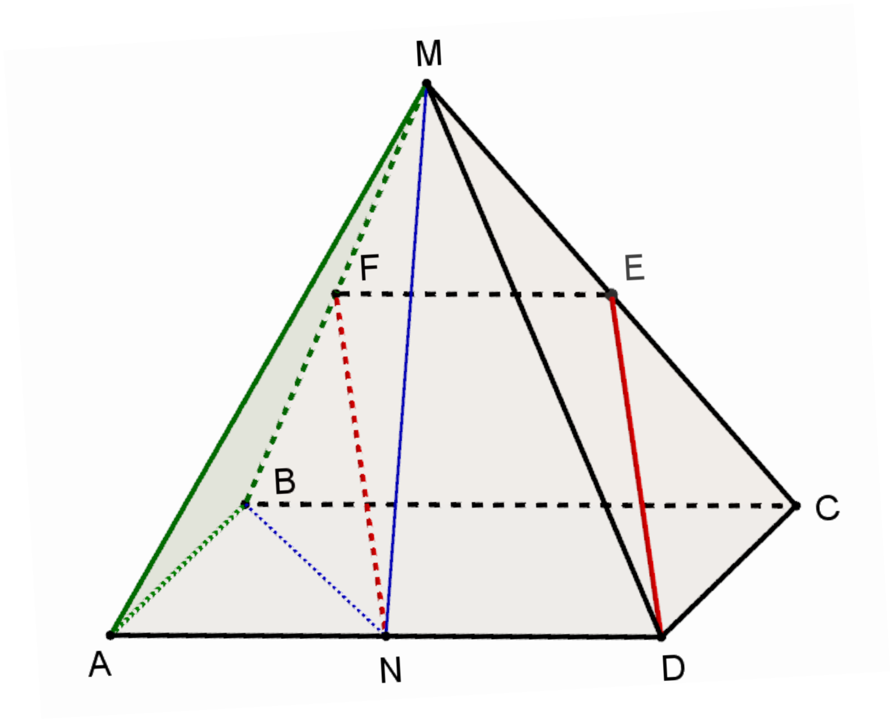
Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

Источник условия: задача № 89 из пособия Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Многогранники: типы задач и методы их решения http://alexlarin.net/ege/2013/C22013.html

Угол между прямой и плоскостью

Задача 6. В правильной четырехугольной пирамиде *MABCD,* все рёбра которой равны 1, точка *E* – середина ребра *MC*. Найдите синус угла между прямой *DE* и плоскостью *AMB.*

Решение:

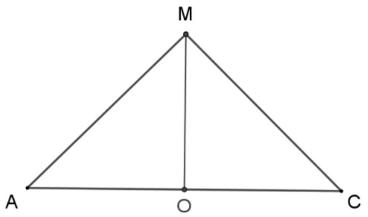


Пусть *N* – середина *AD, F* – середина *MB,* $DN = FE = \frac{1}{2}BC, DN \parallel FE,$ значит, *DEFN* – параллелограмм, откуда $FN \parallel DE$. Таким образом,

$$\sin\angle(DE;\ AMB) = \sin\angle(FN;\ AMB) = \frac{\rho(N;AMB)}{FN}.$$

$$\rho(N;\ AMB) = \frac{S_{ABN}\cdot\rho(M;\ ABN)}{S_{AMB}}.\ S_{ABN} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{4};\ S_{AMB} = \frac{1^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$\rho(M;\ ABN) = MO$, где MO – высота Δ *AMC*, в котором



$AM = MC = 1, AC = \sqrt{2}$: $\rho(M;\ ABN) = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

$$\rho(N;\ AMB) = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{6}};\ NF = DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ (медиана прав. треуг.)

$$\sin\alpha = \frac{\rho(N;AMB)}{FN} = \frac{\frac{1}{\sqrt{6}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

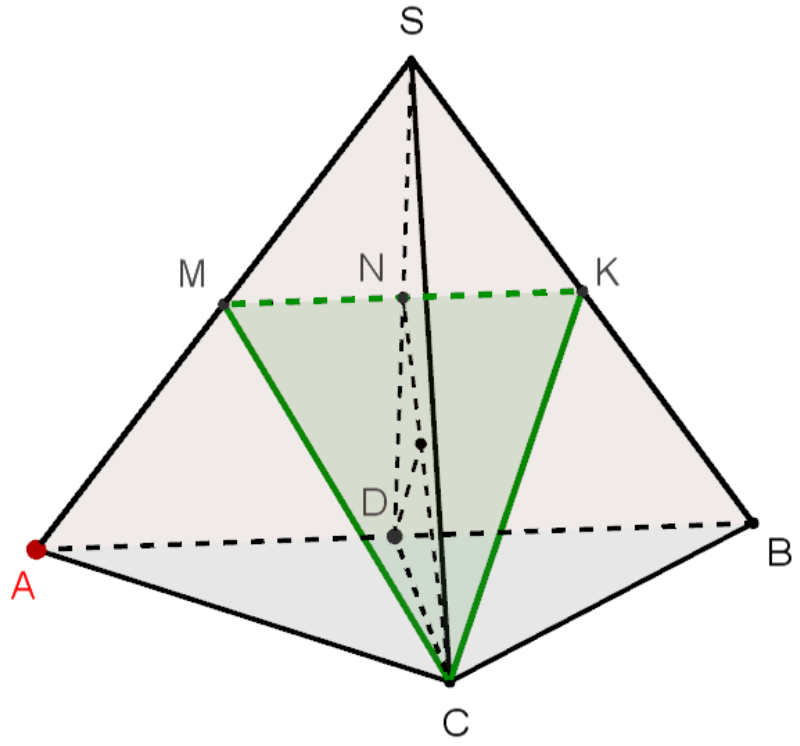
Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Источник условия: задача № 113 из пособия Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Многогранники: типы задач и методы их решения http://alexlarin.net/ege/2013/C22013.html

Метод объемов удобен не всегда

Задача 7. В правильной треугольной пирамиде *SABC* точка *S* – вершина. Точка *M* – середина ребра *SA*, точка *K* – середина ребра *SB*. Найдите расстояние от вершины *A* до плоскости *CMK*, если *SC* = 6, *AB* = 4.

Решение:



$SD = \sqrt{36-4} = 4\sqrt{2}, S_{AMK} = \frac{1}{2} \cdot MK \cdot \frac{1}{2} SD = \frac{2 \cdot 4\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2};$

Из *CDS* по теореме косинусов $\cos D = \frac{32+12-36}{2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{6}};$

$\sin \angle D = \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{6}};\ CD = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$

$\rho(C, AMK) = CD \cdot \sin \angle D = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{23}}{\sqrt{2}};$

$S_{CMK} = \frac{1}{2} \cdot MK \cdot CN = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4.$

$CN = \sqrt{\frac{CD^2}{2} + \frac{SC^2}{2} - \frac{SD^2}{4}} = \sqrt{\frac{12}{2} + \frac{36}{2} - \frac{32}{4}} = \sqrt{16} = 4.$

$\rho(A, CMK) = \frac{S_{AMK} \cdot \rho(C, AMK)}{S_{CMK}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{23}}{\sqrt{2} \cdot 4} = \frac{\sqrt{23}}{2}.$

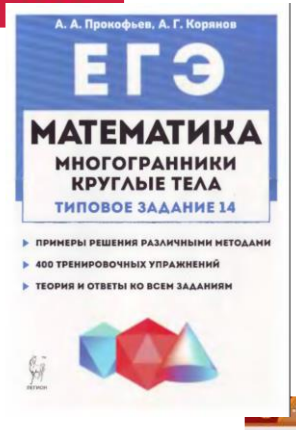
Ответ: $\frac{\sqrt{23}}{2}.$

Источник условия: задача № 32 из пособия Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Многогранники: типы задач и методы их решения http://alexlarin.net/ege/2013/C22013.html

Подробнее

1. Гордин Р. К. ЕГЭ 2020. Математика. Геометрия. Стереометрия. Задача 14 (профильный уровень)/ под. ред. И.В. Ященко – М.: МЦНМО, 2020

2. Прокофьев А. А. , Корянов А. Г.. Математика. ЕГЭ. Многогранники, круглые тела. – Ростов-на-Дону, 2019 или URL: http://alexlarin.net/ege/2013/C22013.html



3. Любимова В. В. Метод объёмов как удобный способ решения стереометрических задач // Математика в школе. – 2019. - № 3. – С. 27-35.

Дополнительные пособия

Безухов Д. М., Пекер В. М., Халиков М. А. и др.
Математика. Стереометрия. Эффективные методы решения задач. Пособие для самостоятельной подготовки

В пособии рассматривается метод координат и векторный метод для решения как типовых стереометрических задач по математике, так и аналогичных задач повышенного уровня сложности, встречающихся в заданиях математических олимпиад, проводимых различными вузами.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ