



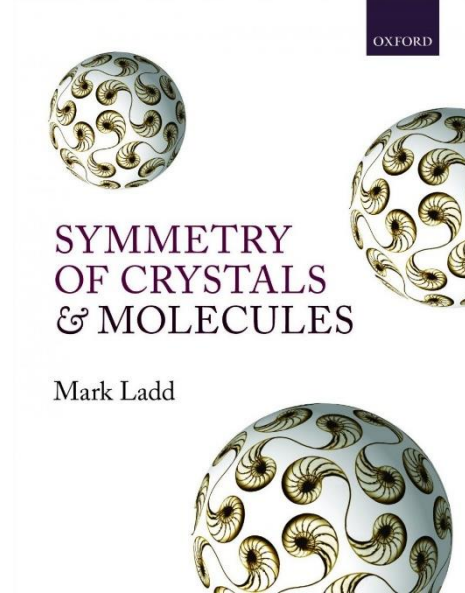
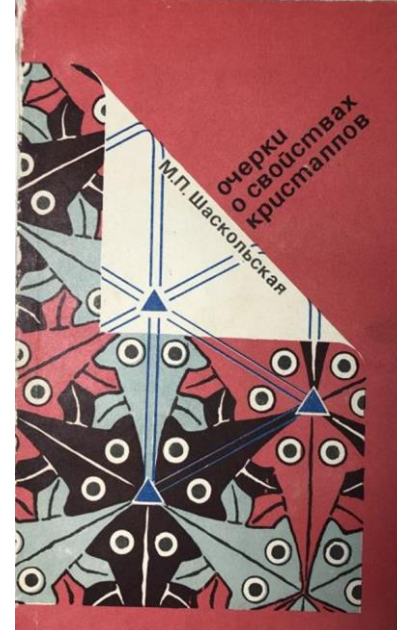
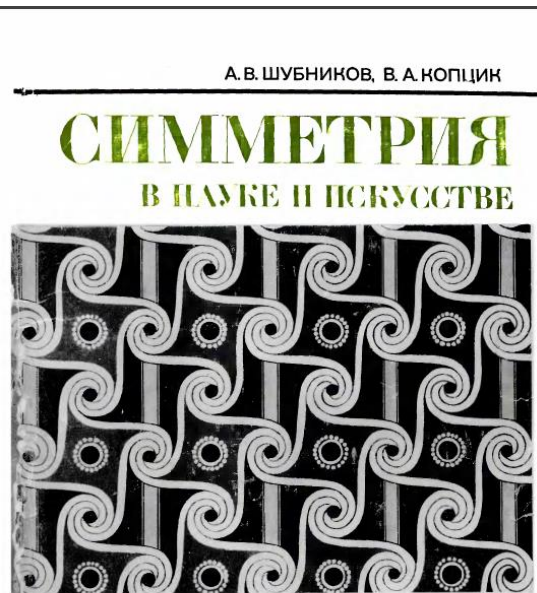
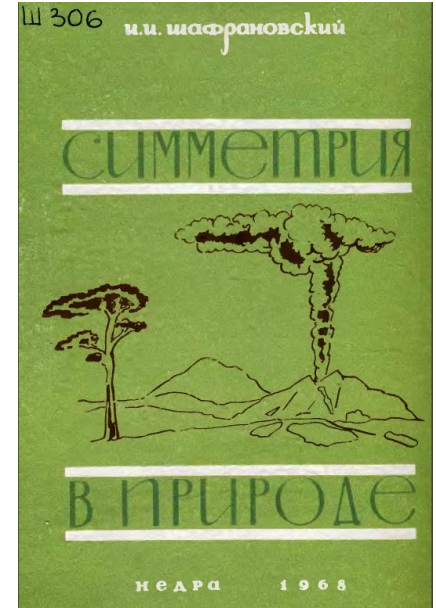
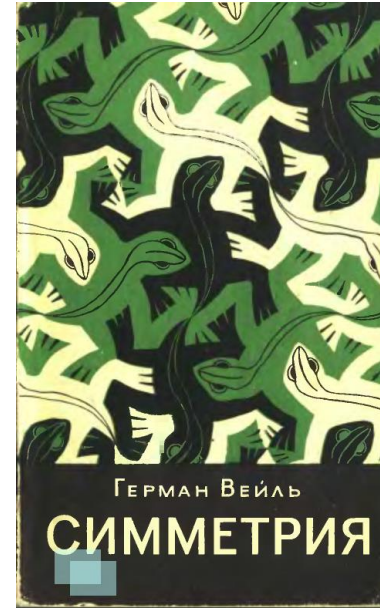
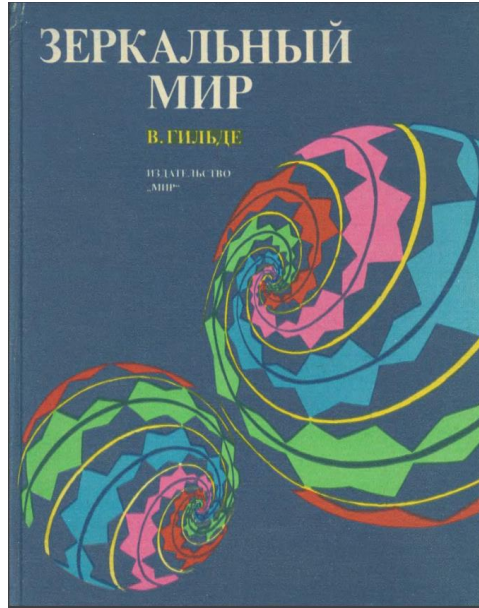
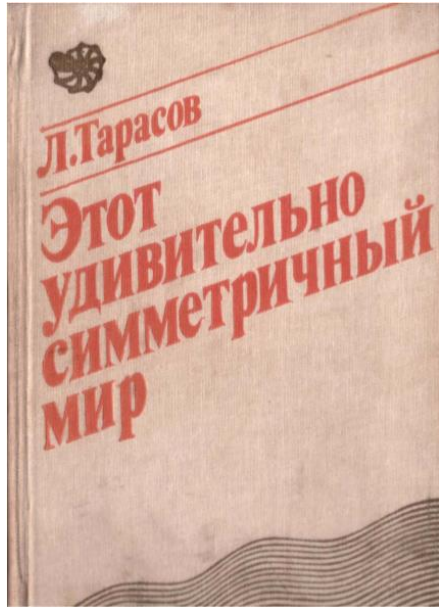
В. А. Смирнов

доктор физ.-мат. наук, профессор,
заведующий кафедрой элементарной математики
Московского педагогического государственного
университета

Наглядная геометрия. Симметрия. Паркетты



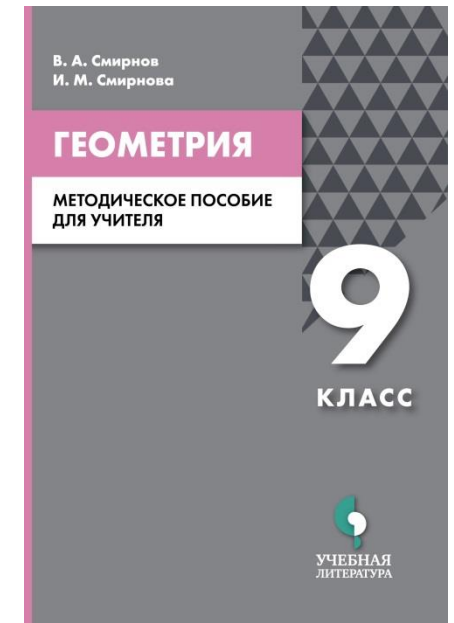
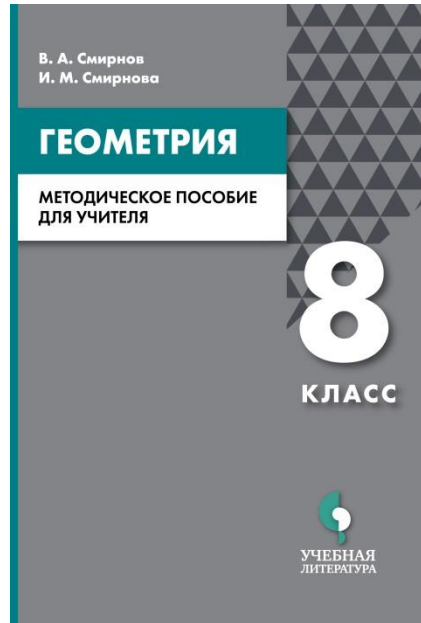
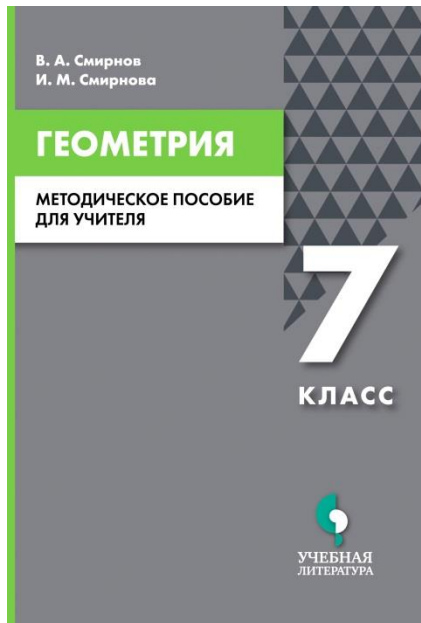
Книги о симметрии



Симметрия в природе



Учебники геометрии 2019 года



Геометрия 8

Предисловие	3	Глава V. Площадь	117
Глава I. Четырёхугольники	5	25. Площадь и её свойства. Площадь прямоугольника	117
1. Параллелограмм и его свойства	5	26. Теорема Пифагора	123
2. Признаки параллелограмма	10	27. Площадь параллелограмма	127
3. Прямоугольник	14	28. Площадь треугольника	130
4. Ромб	18	29. Площадь трапеции	136
5. Средняя линия треугольника	21	30. Площадь многоугольника	140
6. Трапеция	24	31. Равносоставленность. Задачи на разрезание	144
7. Средняя линия трапеции	28	Глава VI*. Геометрия в пространстве	149
8. Теорема Фалеса	32	32. Основные понятия стереометрии	149
Глава II. Векторы и их свойства	39	33. Фигуры в пространстве	152
9. Векторы	39	34. Правильные многогранники	161
10. Сложение векторов	42	35. Развёртки многогранников	165
11. Умножение вектора на число. Разность векторов	46	36. Объём фигур в пространстве	171
12. Разложение вектора	50	37. Площадь поверхности многогранника	176
Глава III. Многоугольники и окружности	55	Предметный указатель	180
13. Углы, связанные с окружностью	55	Ответы	182
14. Треугольники, вписанные в окружность	60		
15. Многоугольники, вписанные в окружность	64		
16. Треугольники, описанные около окружности	69		
17. Многоугольники, описанные около окружности	72		
18. Замечательные точки и линии треугольника	76		
Глава IV. Движение	83		
19. Центральная симметрия и её свойства	83		
20. Поворот. Симметрия n -го порядка	88		
21. Осевая симметрия и её свойства	94		
22. Параллельный перенос	99		
23. Движение и его свойства. Равенство фигур	102		
24*. Паркетты	107		

Авторский сайт: vasmirnov.ru

Этот сайт представляет современный учебно-методический комплект по геометрии для 5-11 классов

Авторы:

Смирнова Ирина Михайловна – доктор педагогических наук, профессор кафедры элементарной математики Московского педагогического государственного университета.

Смирнов Владимир Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой элементарной математики Московского педагогического государственного университета

[Учебно-методический комплект по геометрии](#)

[Программа и тематическое планирование по геометрии для 7-9 классов](#)

[Программа и тематическое планирование по геометрии для 10-11 классов](#)

[Программа по геометрии для 5-6 классов](#)

[Дидактические материалы](#)

Уроки геометрии с "Power Point"

[5-6 классы](#)

[7-9 классы](#)

[10-11 классы](#)

[Геометрия с "GeoGebra"](#)

[Элементарная математика для студентов педагогических вузов](#)

[Статьи о преподавании геометрии](#)



[Видеолекции и вебинары](#)

[Подготовка к ГИА](#)

[Подготовка к ЕГЭ](#)

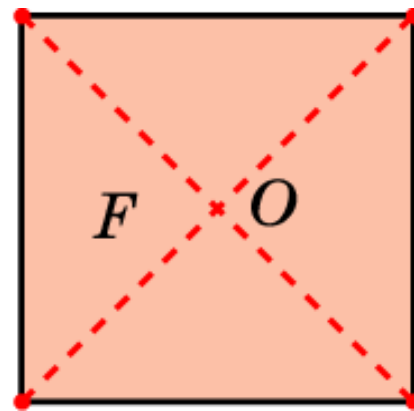
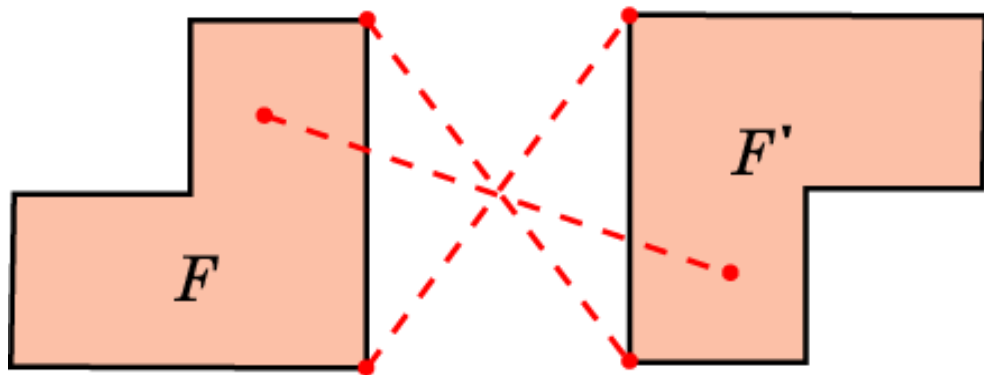
Вопросы, отзывы и пожелания присылайте по адресу: v-a-smirnov@mail.ru

Центральная симметрия

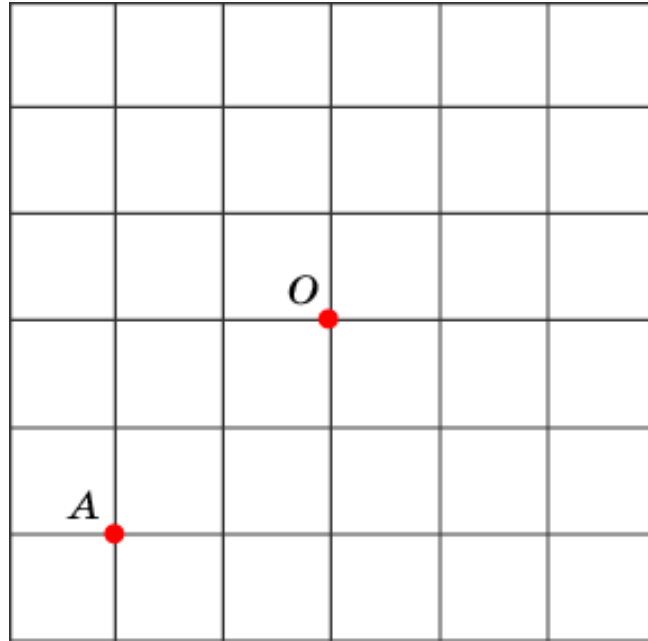
Точки A и A' называются **симметричными** относительно точки O , если O является серединой отрезка AA' . Точка O считается симметричной сама себе.



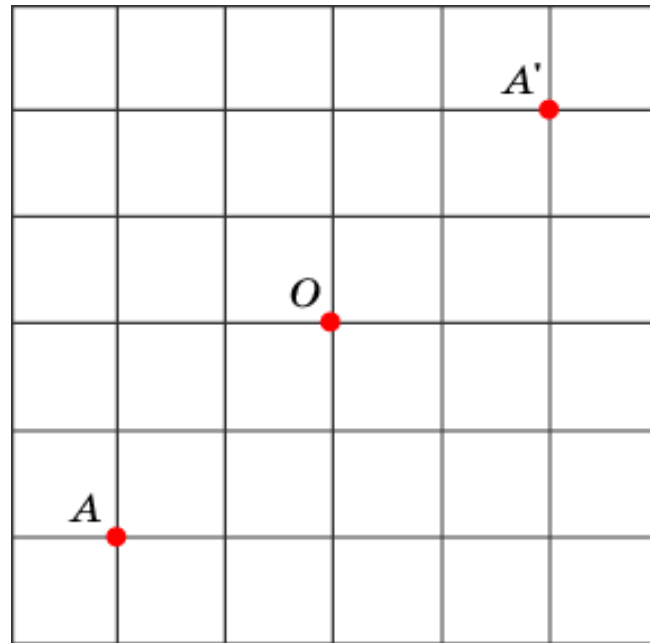
Две фигуры F и F' называются **центрально-симметричными** относительно центра O , если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная точка другой фигуры. Фигура F называется **центрально-симметричной** относительно центра O , если она симметрична сама себе.



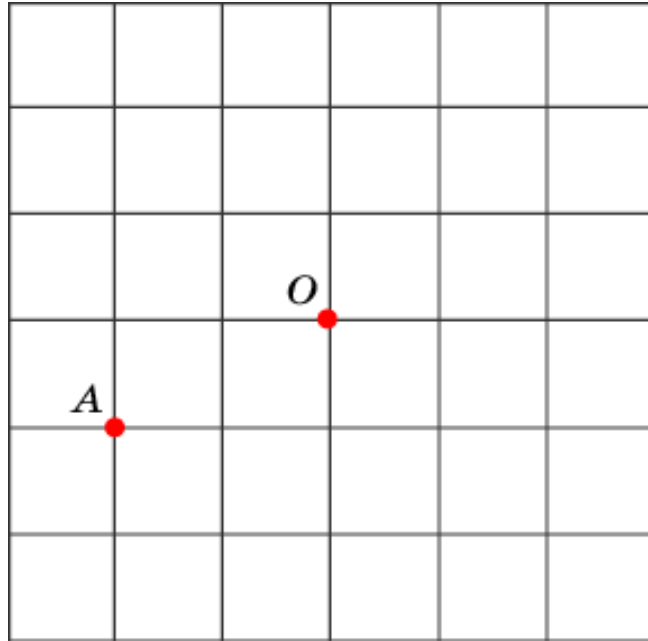
1. Изобразите точку A' , симметричную точке A , относительно точки O .



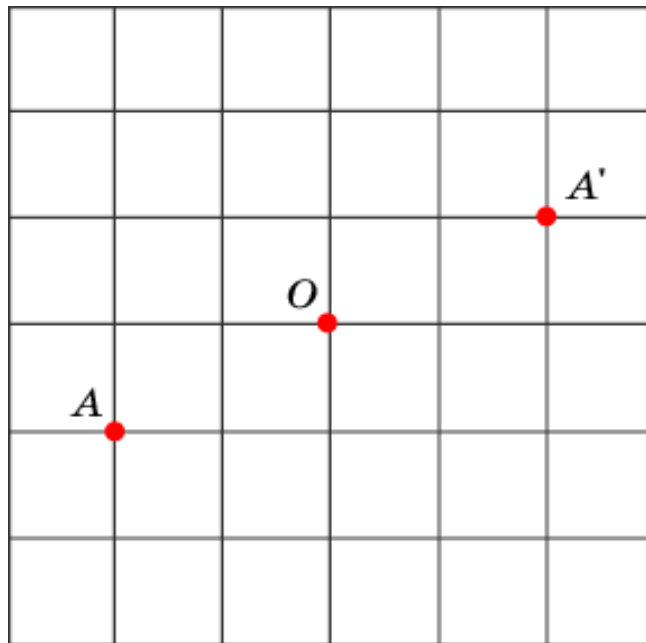
Ответ:



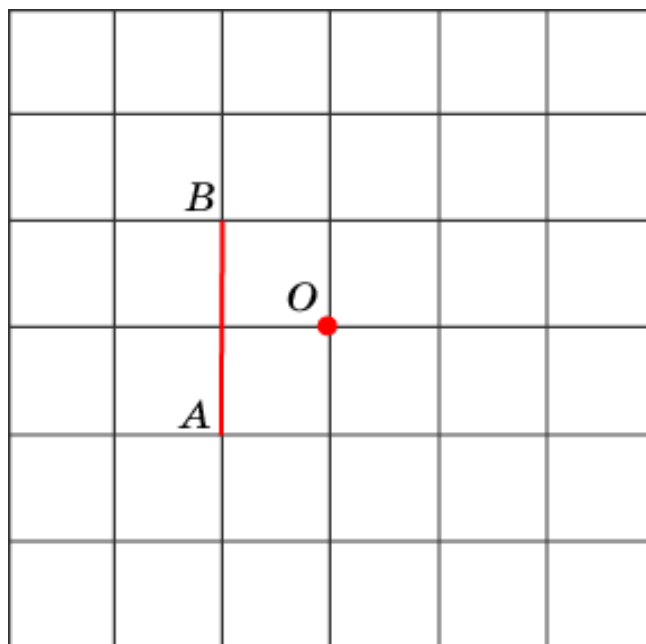
2. Изобразите точку A' , симметричную точке A , относительно точки O .



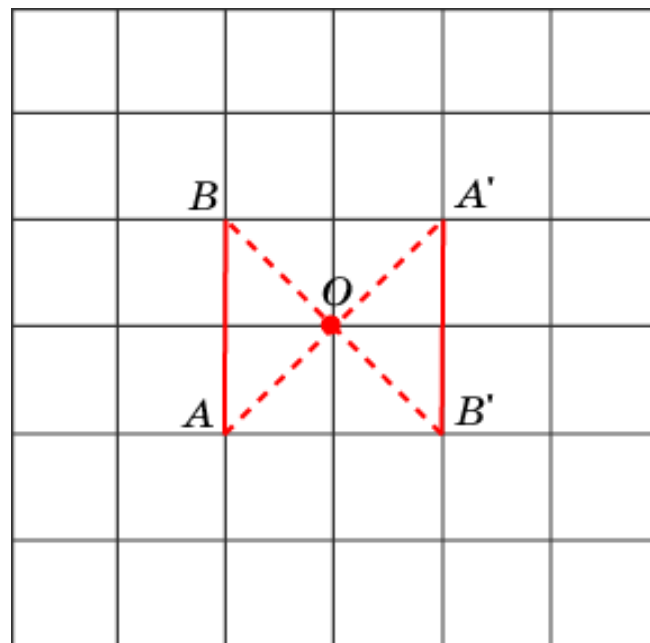
Ответ:



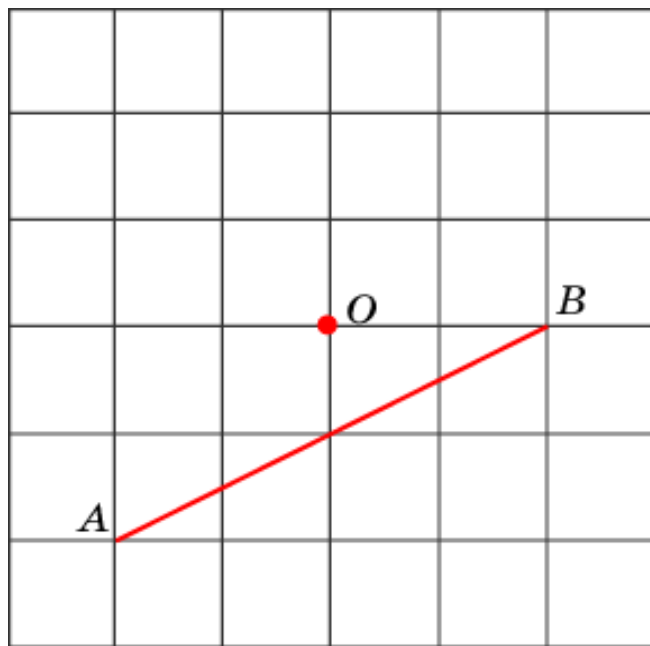
3. Изобразите отрезок $A'B'$, симметричный отрезку AB , относительно точки O .



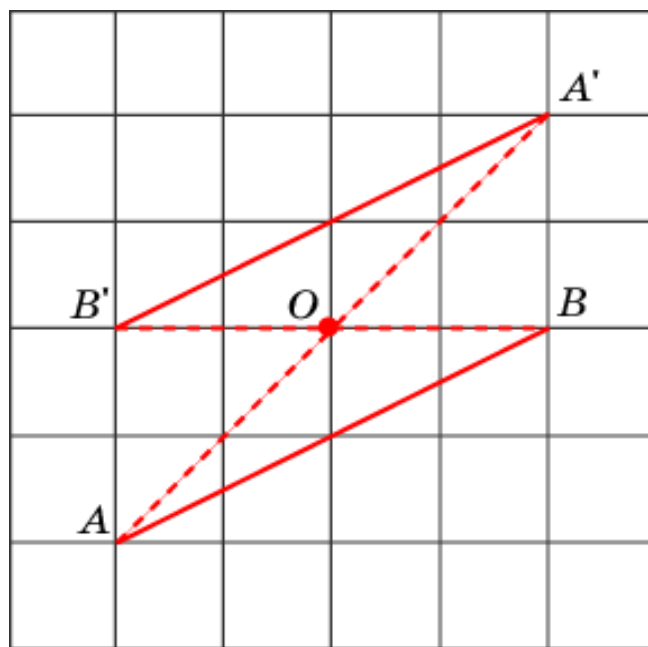
Ответ:



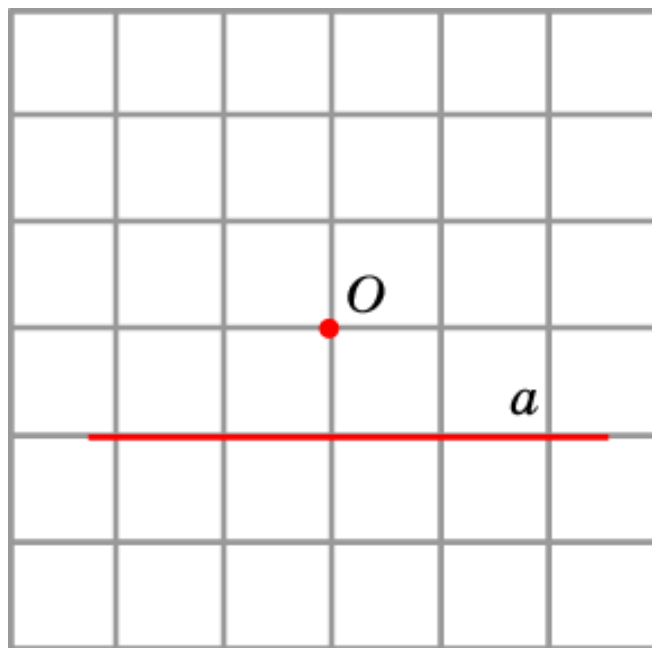
4. Изобразите отрезок $A'B'$, симметричный отрезку AB , относительно точки O .



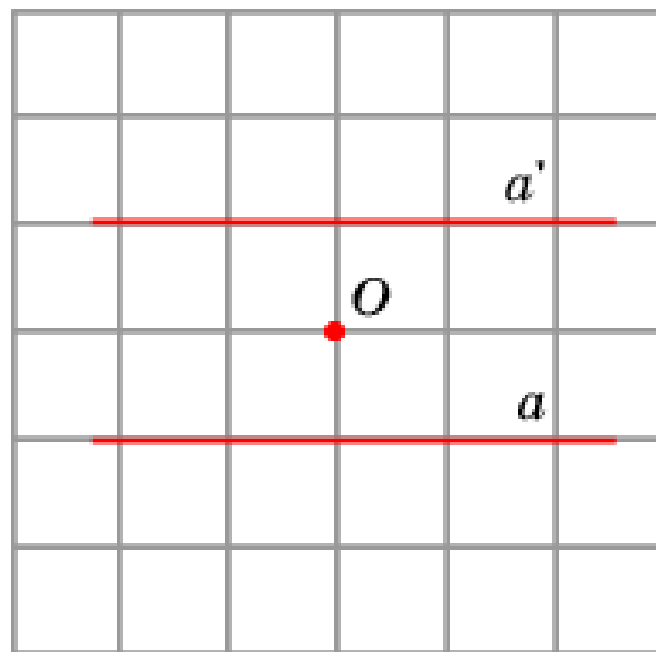
Ответ:



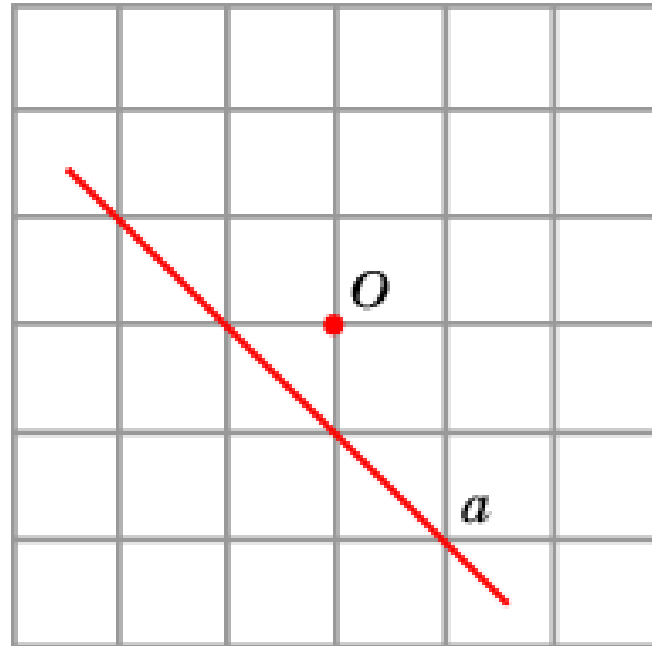
5. Изобразите прямую, симметричную данной прямой a относительно точки O .



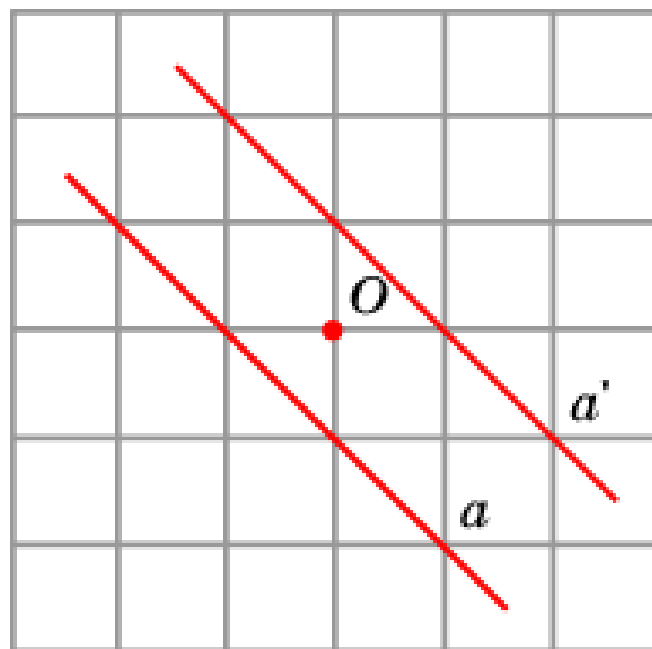
Ответ:



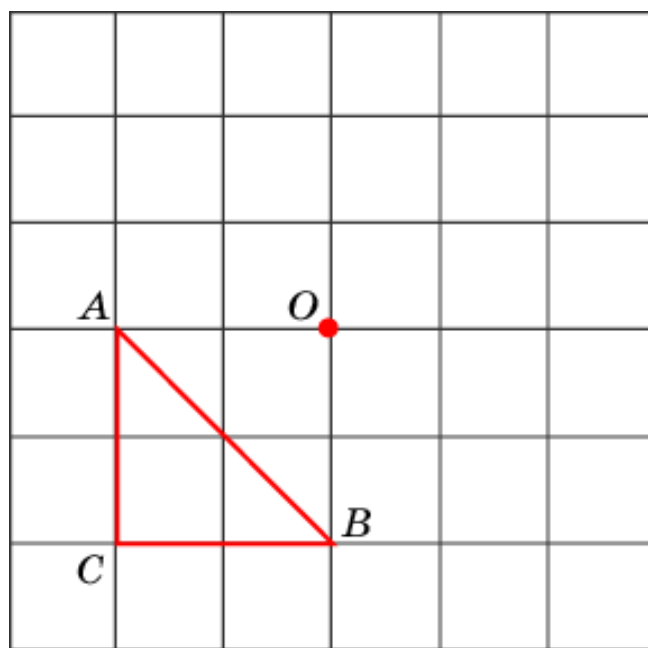
6. Изобразите прямую, симметричную данной прямой a относительно точки O .



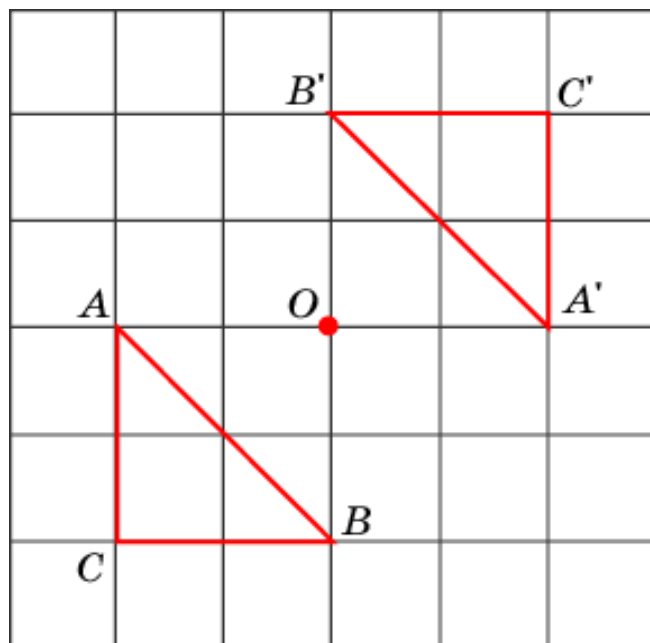
Ответ:



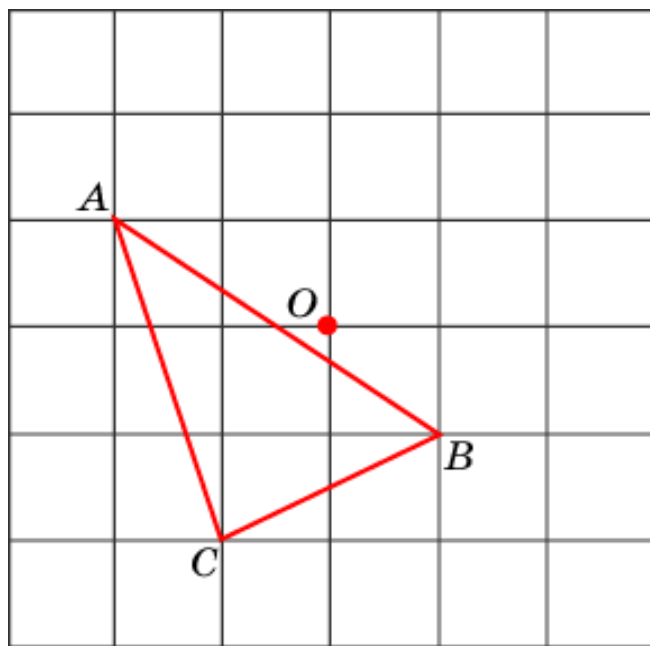
7. Изобразите треугольник $A'B'C'$, симметричный треугольнику ABC , относительно точки O .



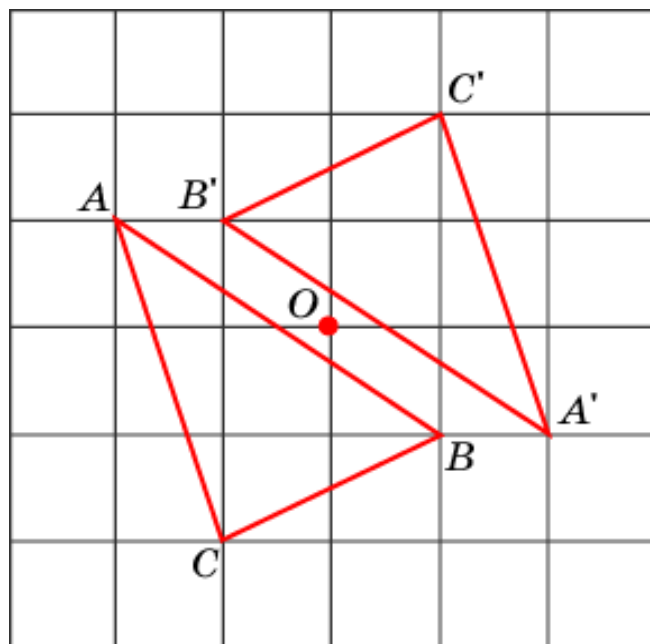
Ответ:



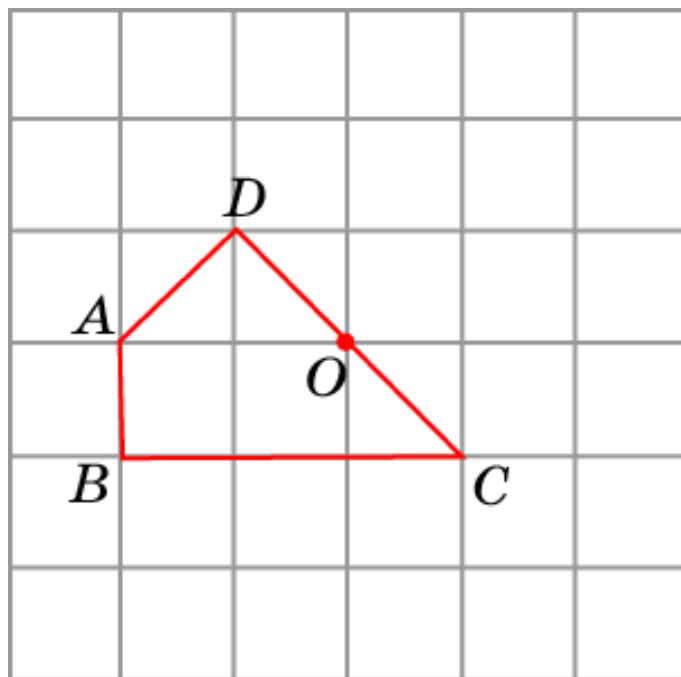
8. Изобразите треугольник $A'B'C'$, симметричный треугольнику ABC , относительно точки O .



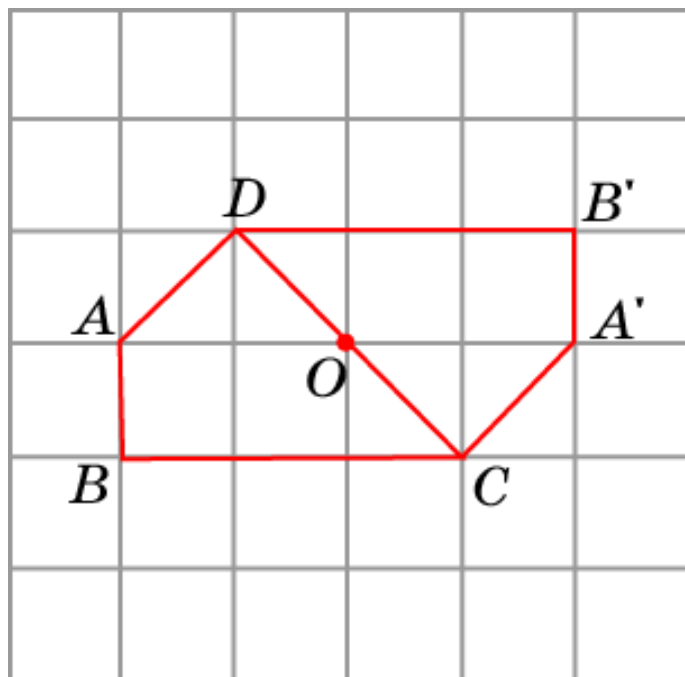
Ответ:



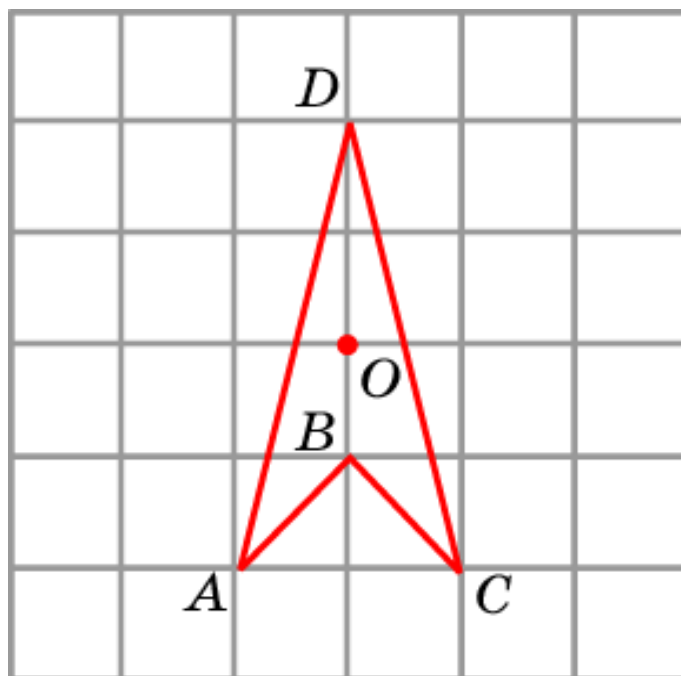
9. Изобразите четырехугольник, симметричный четырехугольнику $ABCD$, относительно точки O .



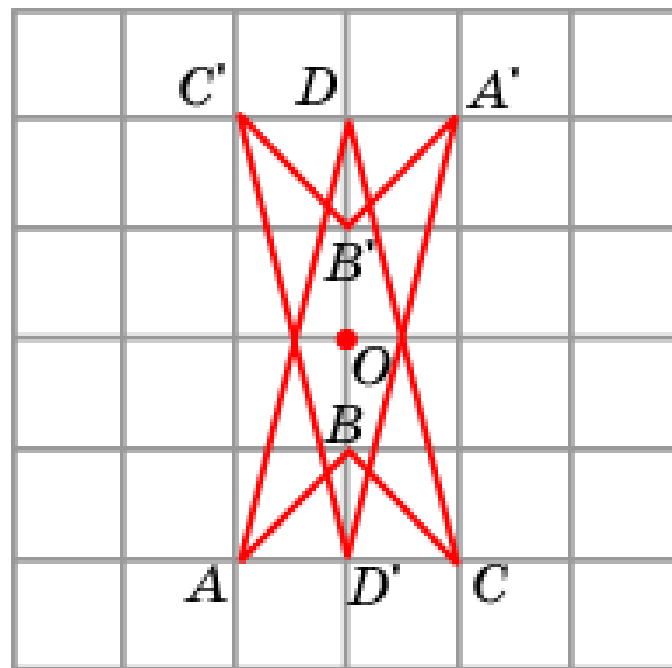
Ответ:



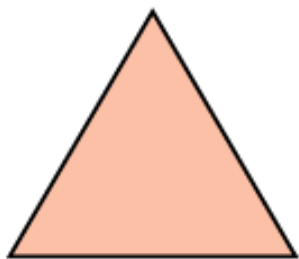
10. Изобразите четырехугольник, симметричный четырехугольнику $ABCD$, относительно точки O .



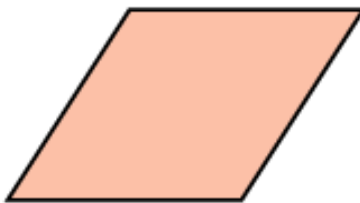
Ответ:



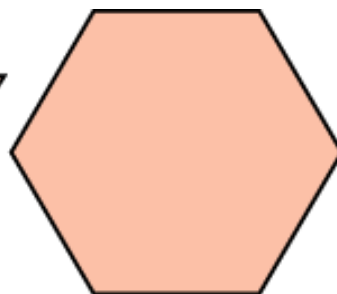
11. Какие из фигур, изображенных на рисунке, имеют центр симметрии?



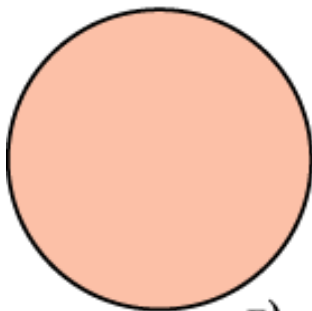
а)



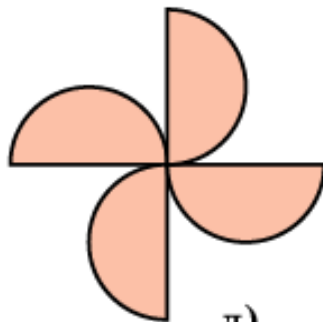
б)



в)



г)



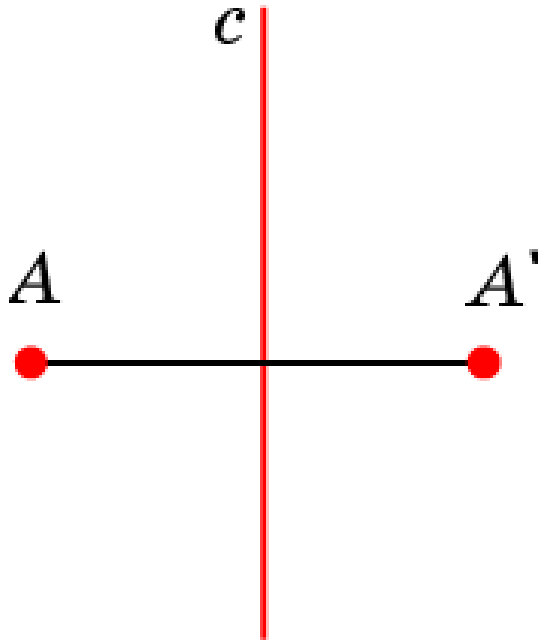
д)



е)

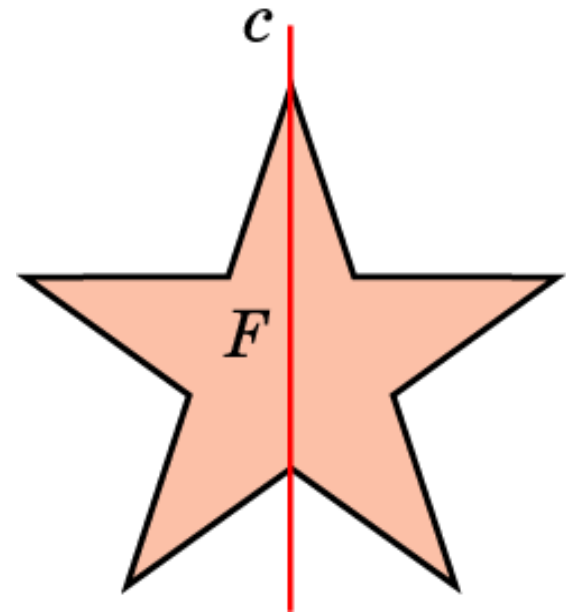
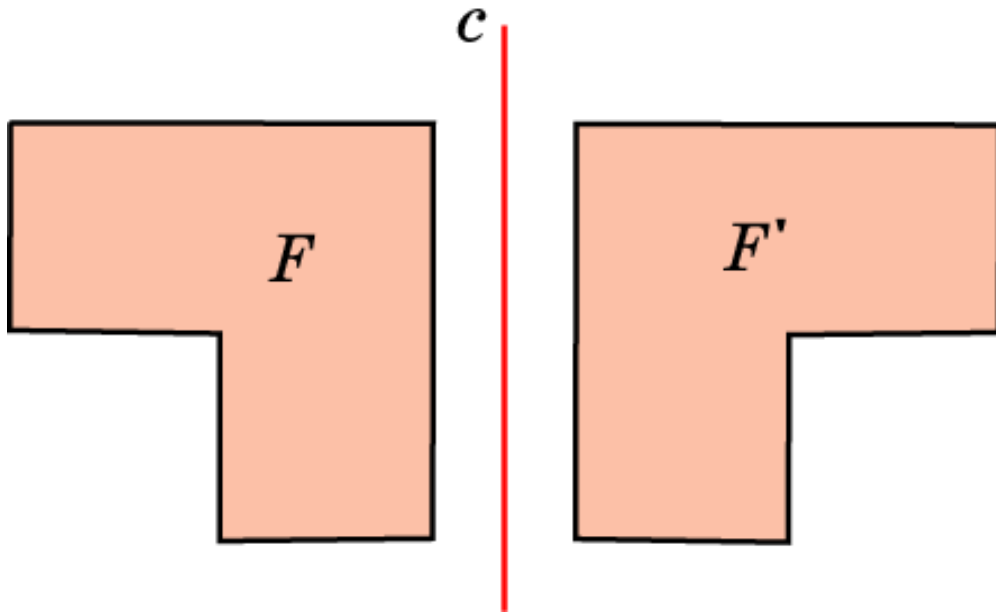
Осевая симметрия

Две точки A и A' называются **симметричными** относительно прямой c , если эта прямая проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна к нему. Каждая точка прямой c считается симметричной самой себе.

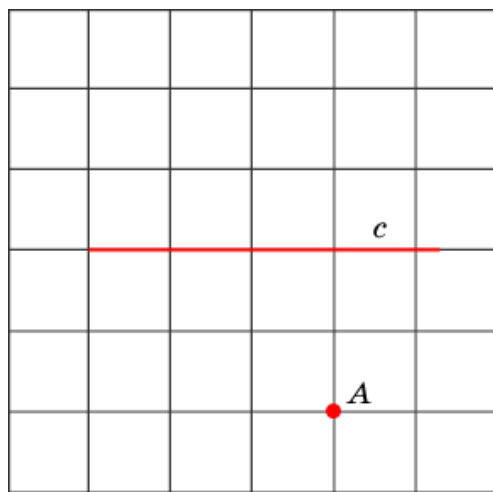


Осевая симметрия

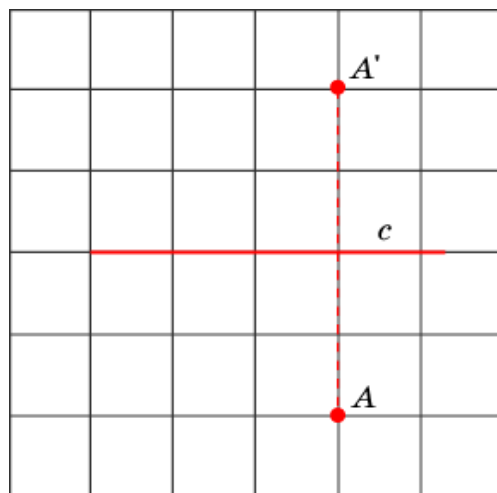
Две фигуры F и F' называются **симметричными** относительно оси c , если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная точка другой фигуры. Фигура F называется **симметричной** относительно оси c , если она симметрична сама себе.



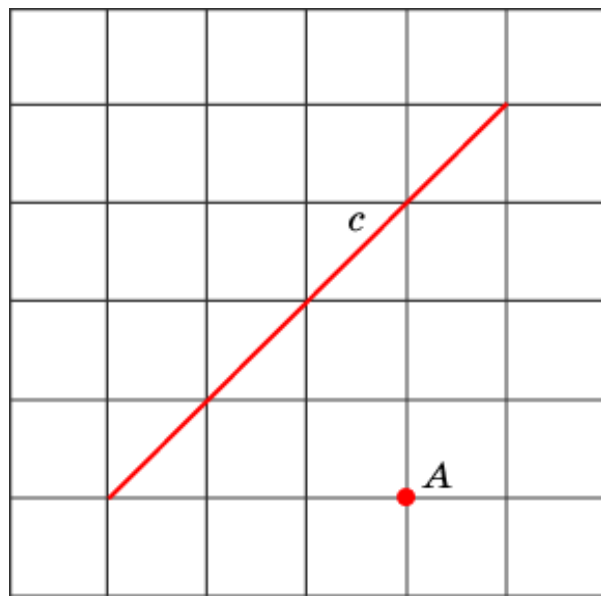
1. Изобразите точку A' , симметричную точке A , относительно прямой c .



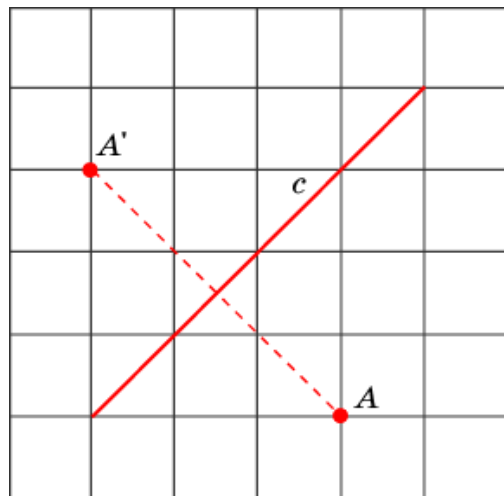
Ответ:



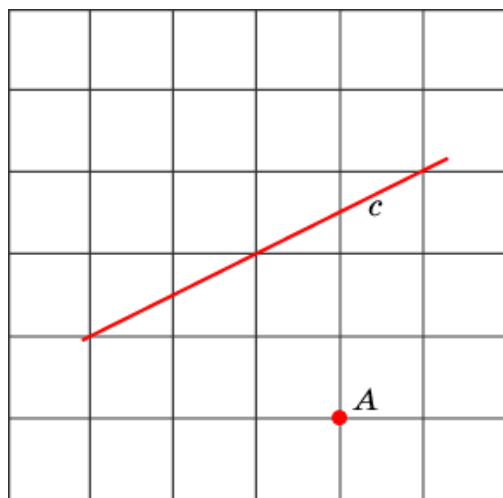
2. Изобразите точку A' , симметричную точке A , относительно прямой c .



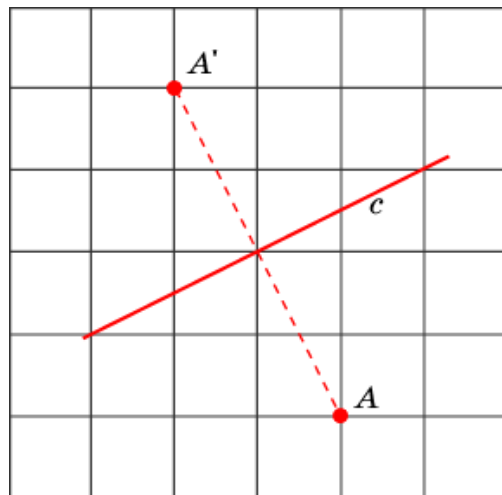
Ответ:



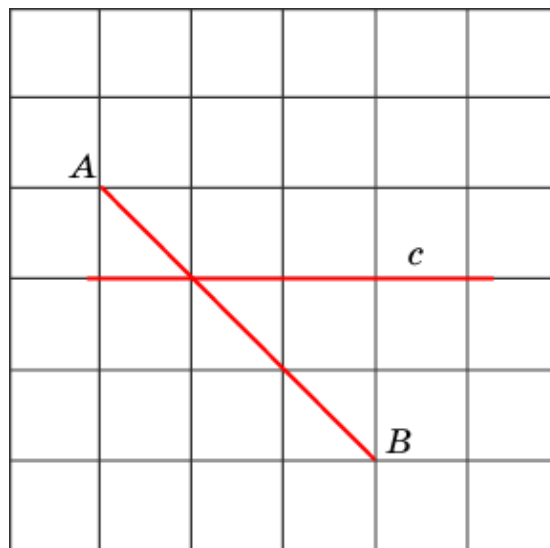
3. Изобразите точку A' , симметричную точке A , относительно прямой c .



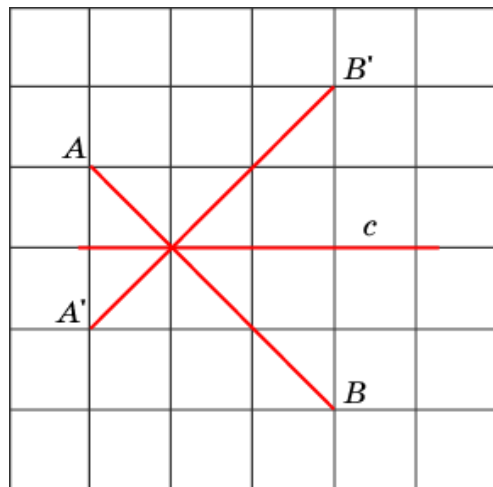
Ответ:



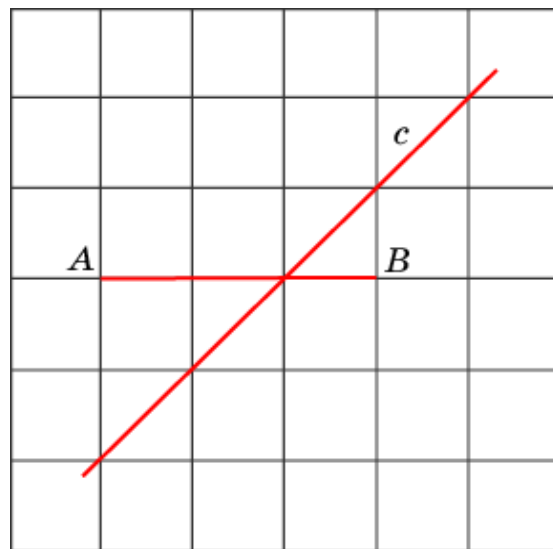
4. Изобразите отрезок $A'B'$, симметричный отрезку AB , относительно прямой c .



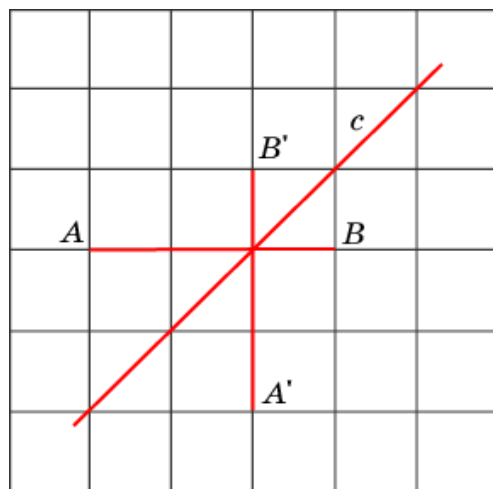
Ответ:



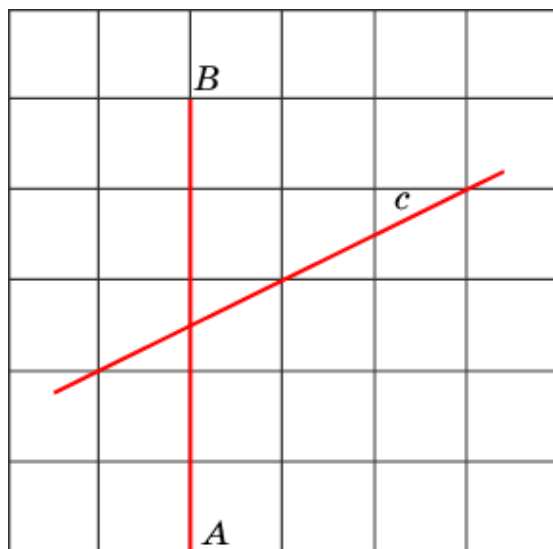
5. Изобразите отрезок $A'B'$, симметричный отрезку AB , относительно прямой c .



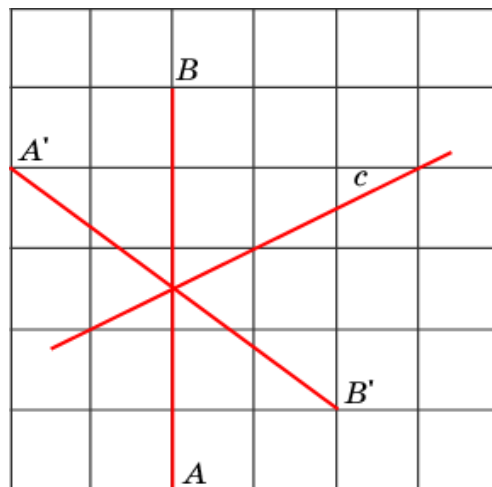
Ответ:



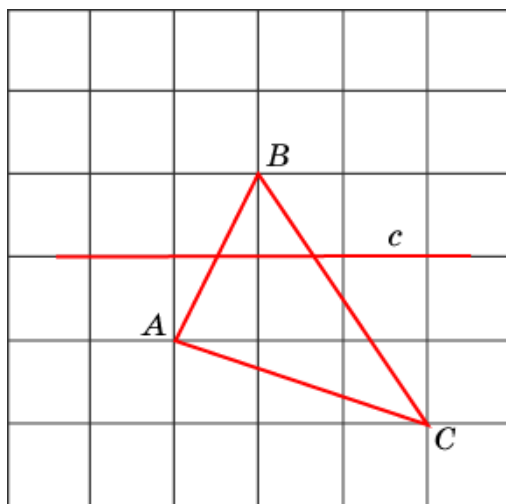
6. Изобразите отрезок $A'B'$, симметричный отрезку AB , относительно прямой c .



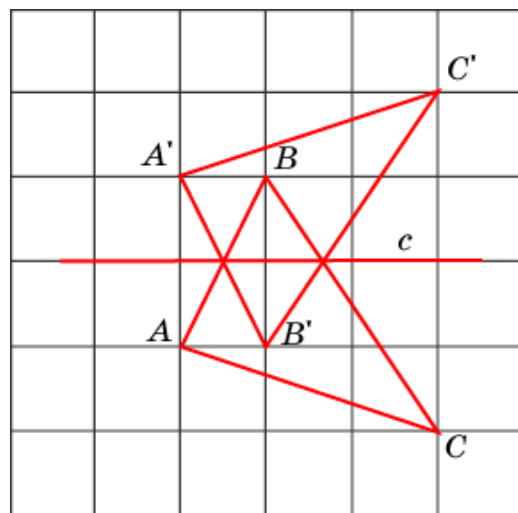
Ответ:



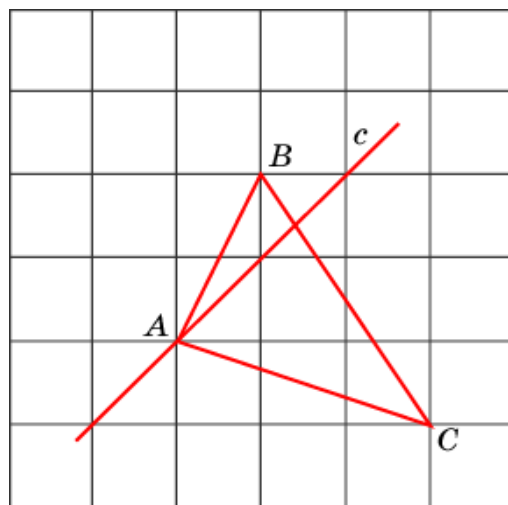
7. Изобразите треугольник $A'B'C'$, симметричный треугольнику ABC , относительно прямой c .



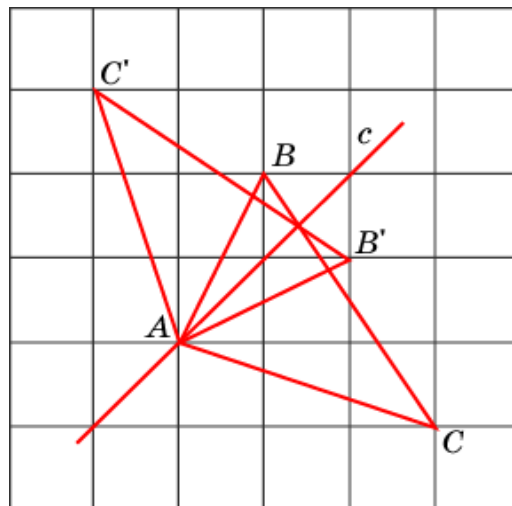
Ответ:



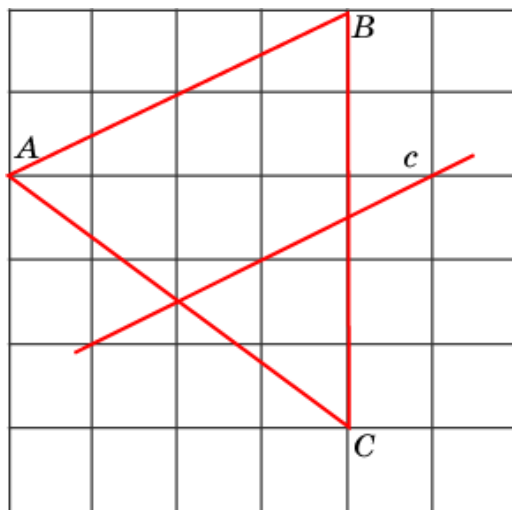
8. Изобразите треугольник $A'B'C'$, симметричный треугольнику ABC , относительно прямой c .



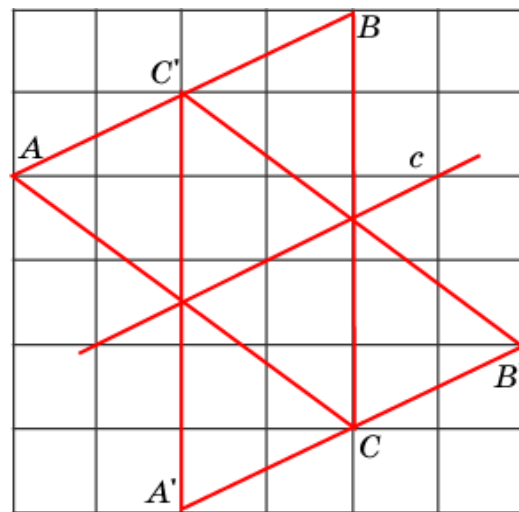
Ответ:



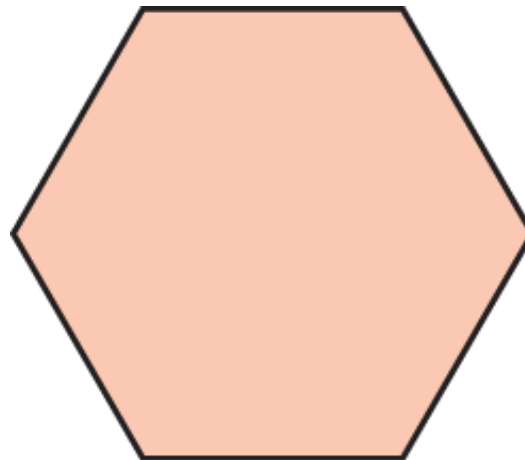
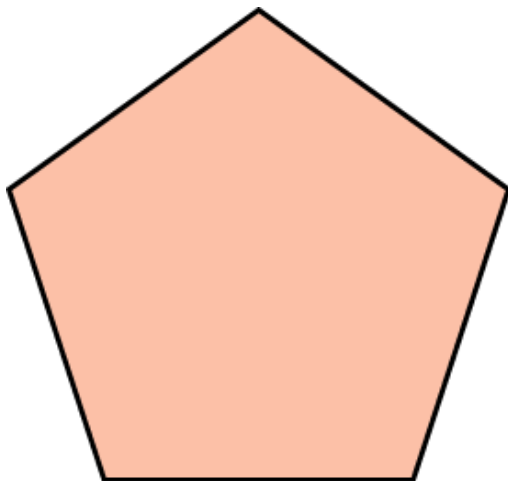
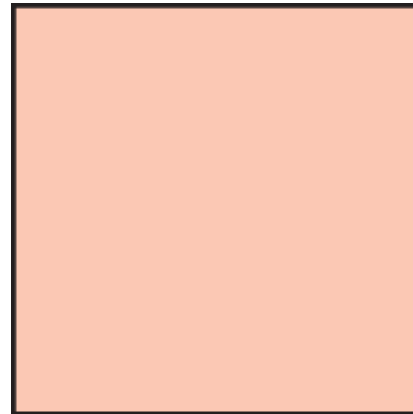
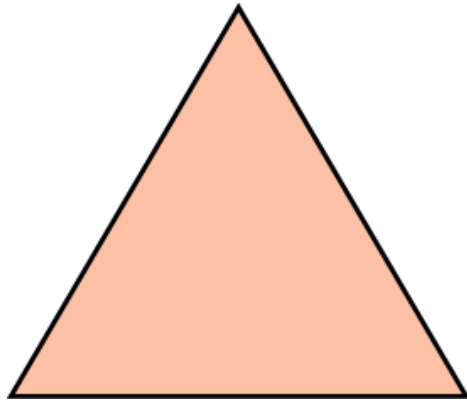
9. Изобразите треугольник $A'B'C'$, симметричный треугольнику ABC , относительно прямой c .



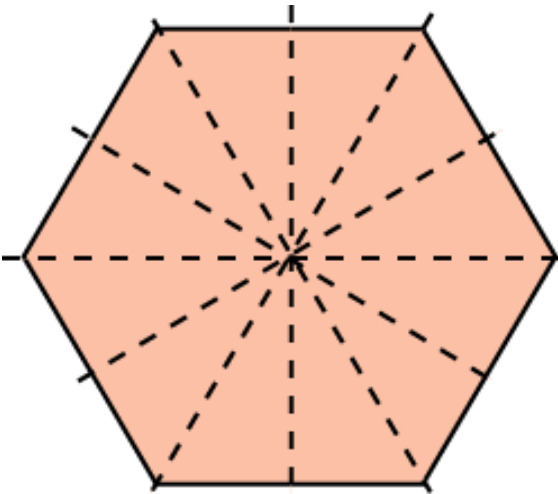
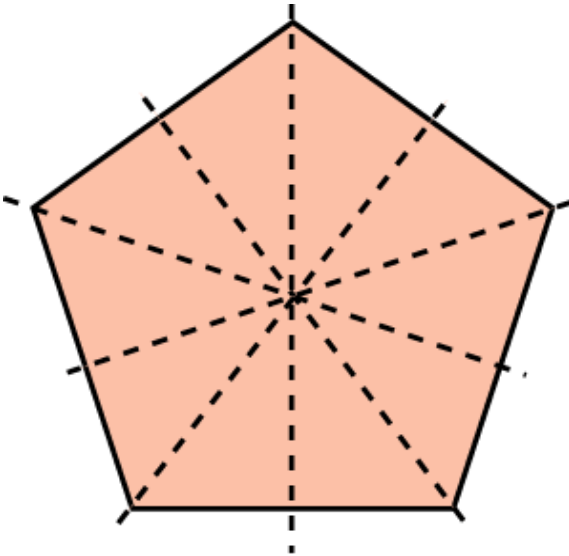
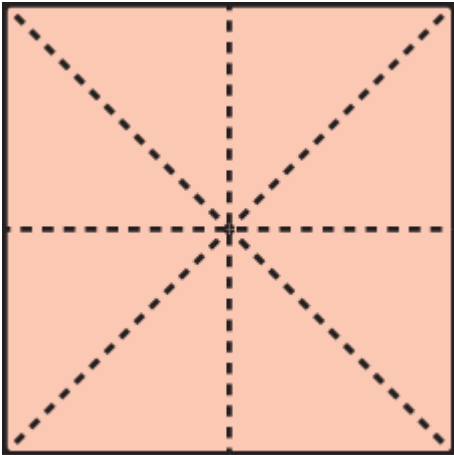
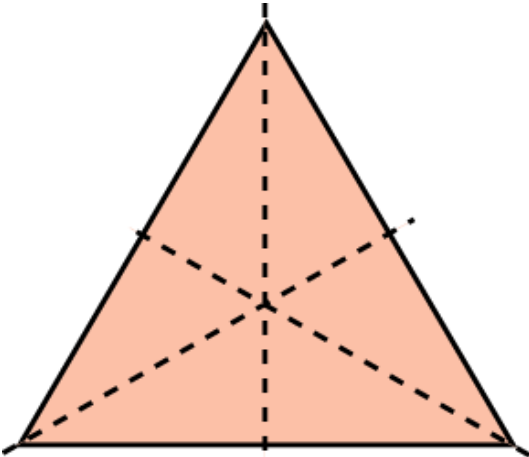
Ответ:



10. Сколько осей симметрии имеет: а) правильный треугольник; б) квадрат; в) правильный пятиугольник? Изобразите эти оси симметрии.

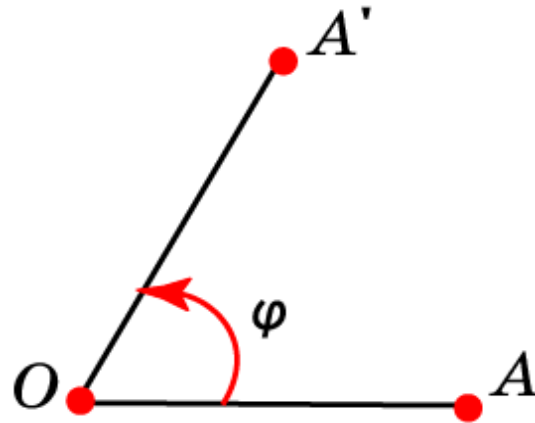


Ответ:



Поворот

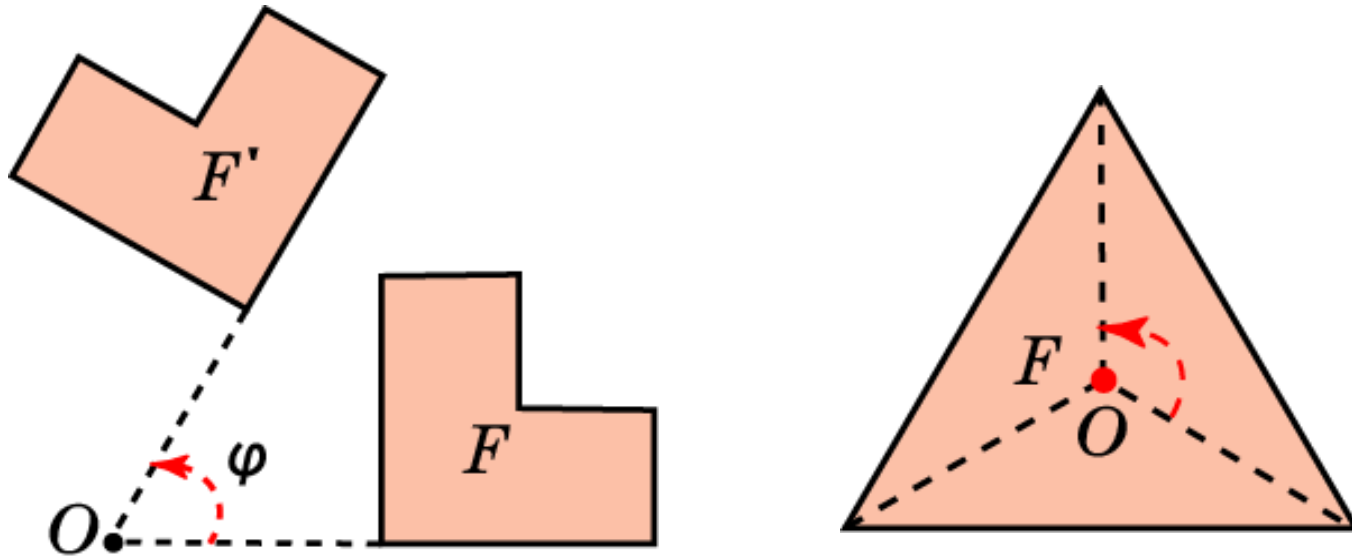
Точка A' плоскости получается из точки A **поворотом** вокруг точки O на угол φ , если $OA' = OA$ и $\angle AOA' = \varphi$.



Преобразование плоскости, при котором данная точка O остается на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг точки O в одном и том же направлении (против часовой стрелки или по часовой стрелке) на заданный угол φ , называется **поворотом** вокруг точки O на угол φ .

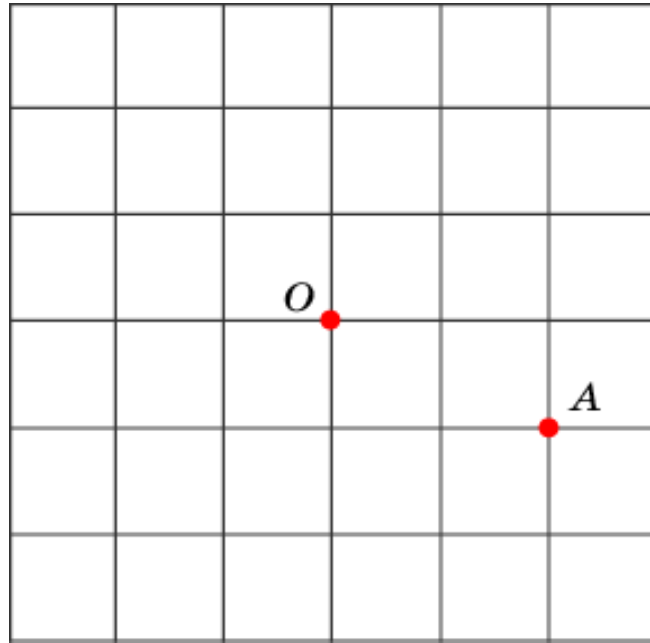
Симметрия n -го порядка

Фигура F' получается **поворотом** фигуры F вокруг точки O на угол φ , если все точки фигуры F' получаются всевозможными поворотами точек фигуры F вокруг точки O на угол φ .

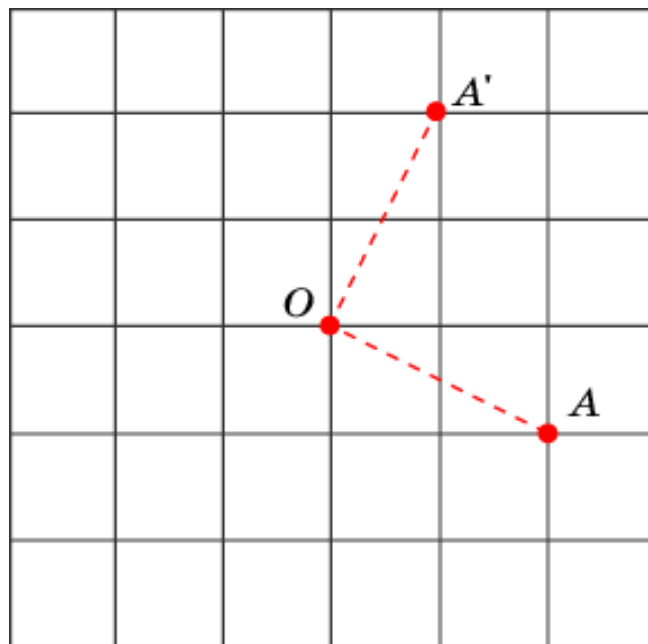


Точка O называется **центром симметрии n -го порядка** фигуры F , если при повороте фигуры F вокруг точки O на угол $\frac{360^\circ}{n}$ фигура F совмещается сама с собой.

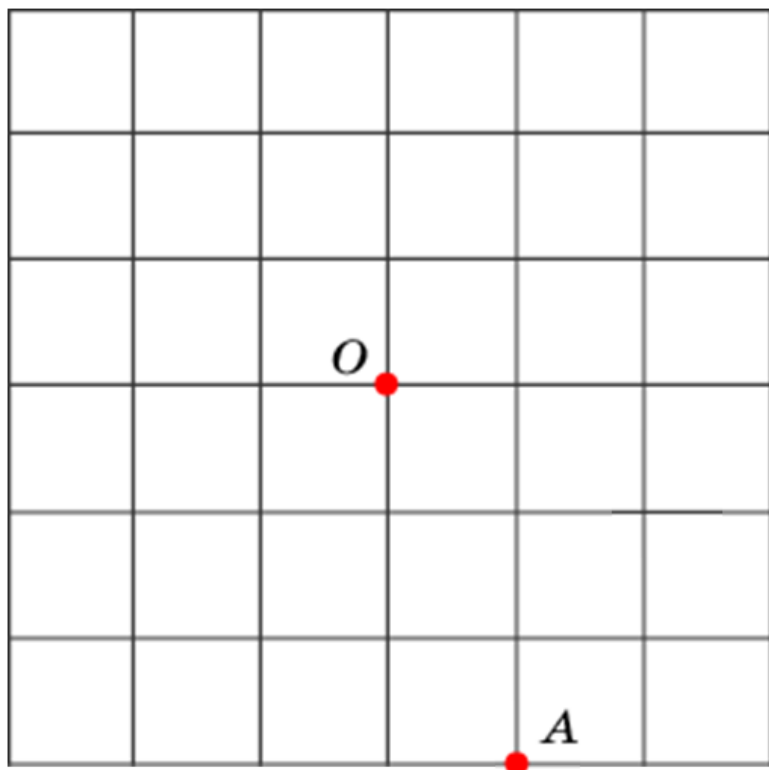
1. Изобразите точку A' , полученную из точки A поворотом вокруг точки O на угол 90° против часовой стрелки.



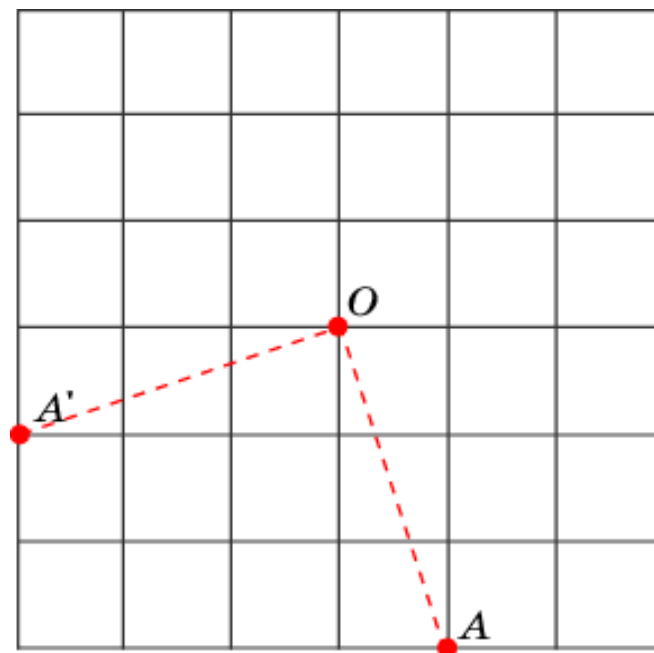
Ответ:



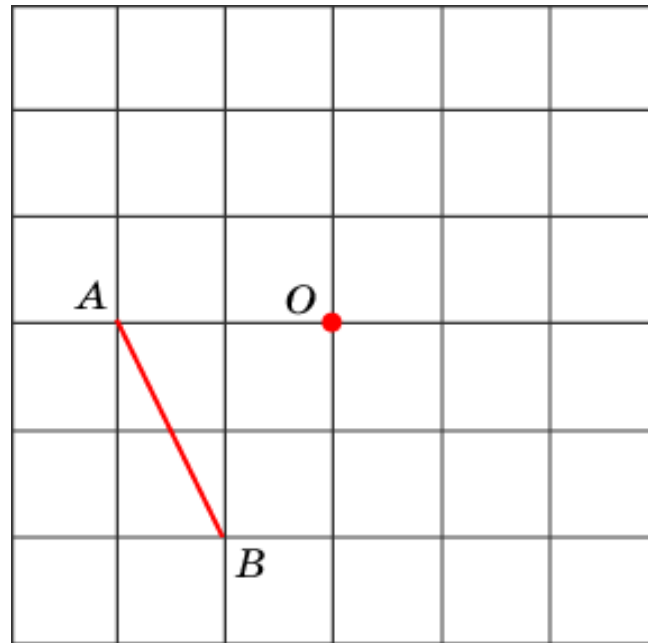
2. Изобразите точку A' , полученную из точки A поворотом вокруг точки O на угол 270° против часовой стрелки.



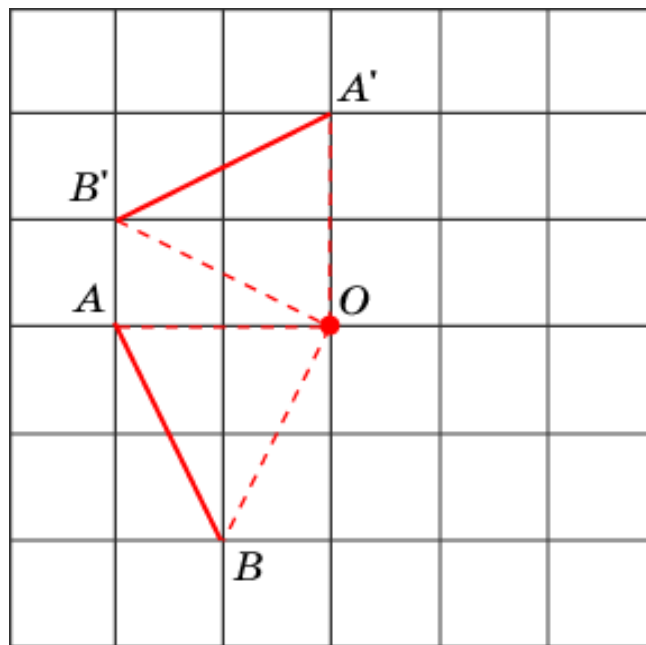
Ответ:



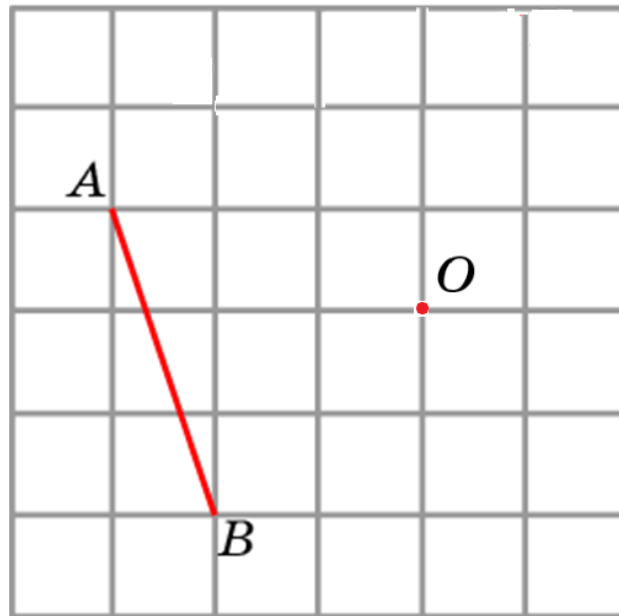
3. Изобразите отрезок $A'B'$, полученный из отрезка AB поворотом вокруг точки O на угол 90° по часовой стрелке.



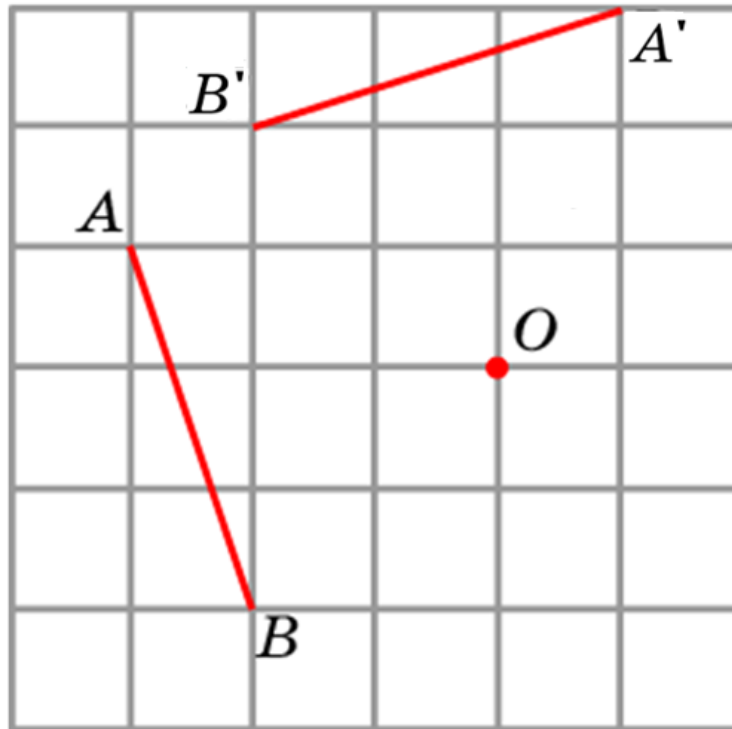
Ответ:



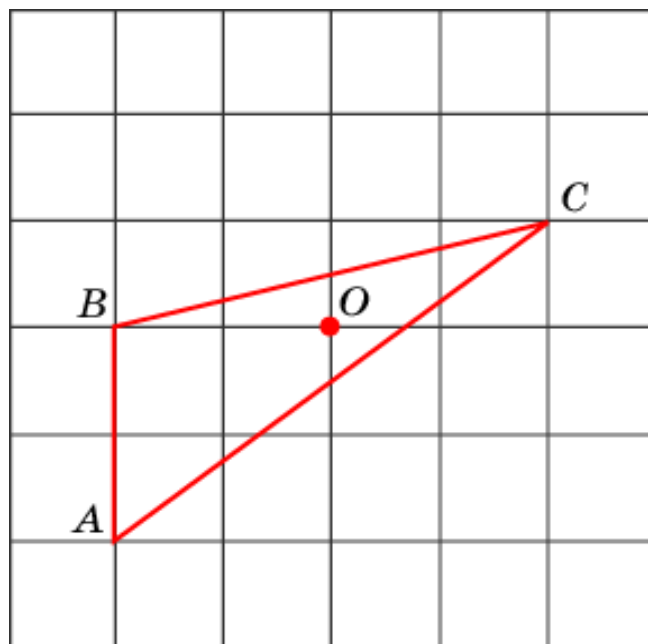
4. Изобразите отрезок $A'B'$, полученный из отрезка AB поворотом вокруг точки O на угол 90° по часовой стрелке.



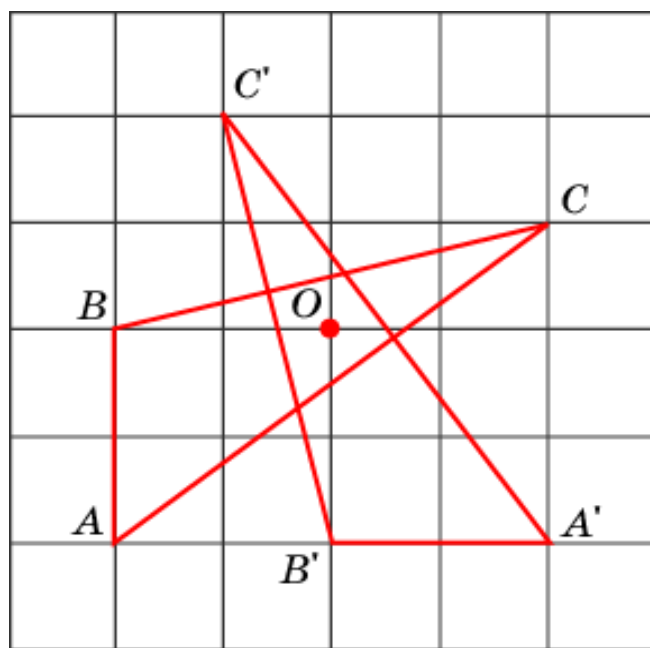
Ответ:



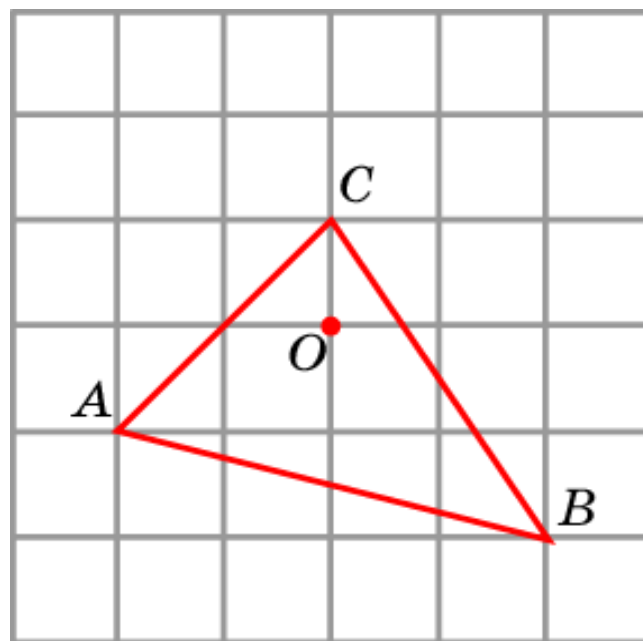
5. Изобразите треугольник $A'B'C'$, полученный из треугольника ABC поворотом вокруг точки O на угол 90° против часовой стрелки.



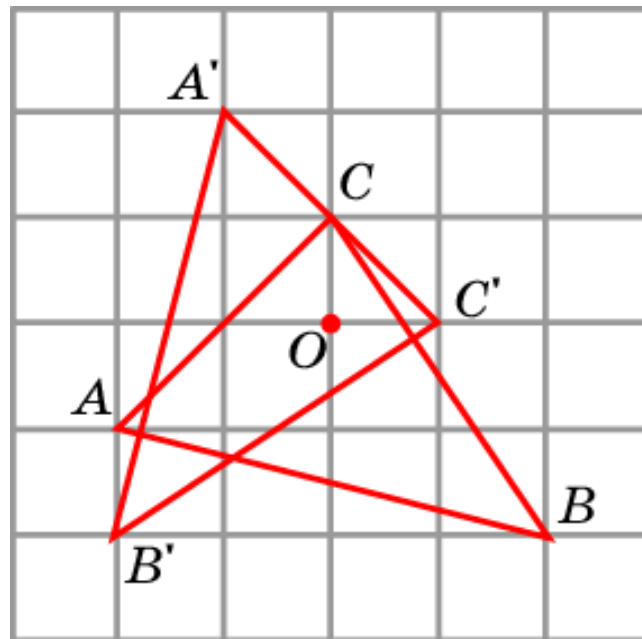
Ответ:



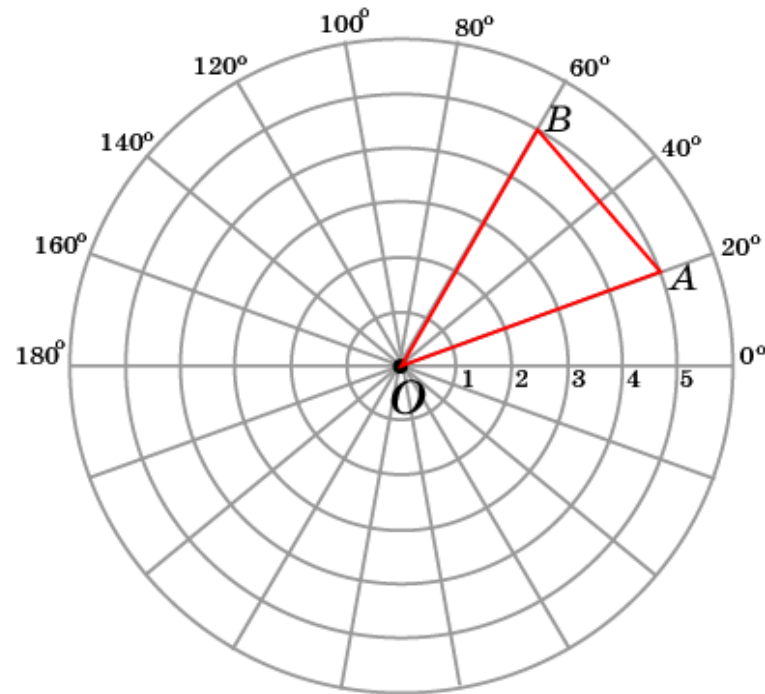
6. Изобразите треугольник $A'B'C'$, полученный из треугольника ABC поворотом вокруг точки O на угол 90° по часовой стрелке.



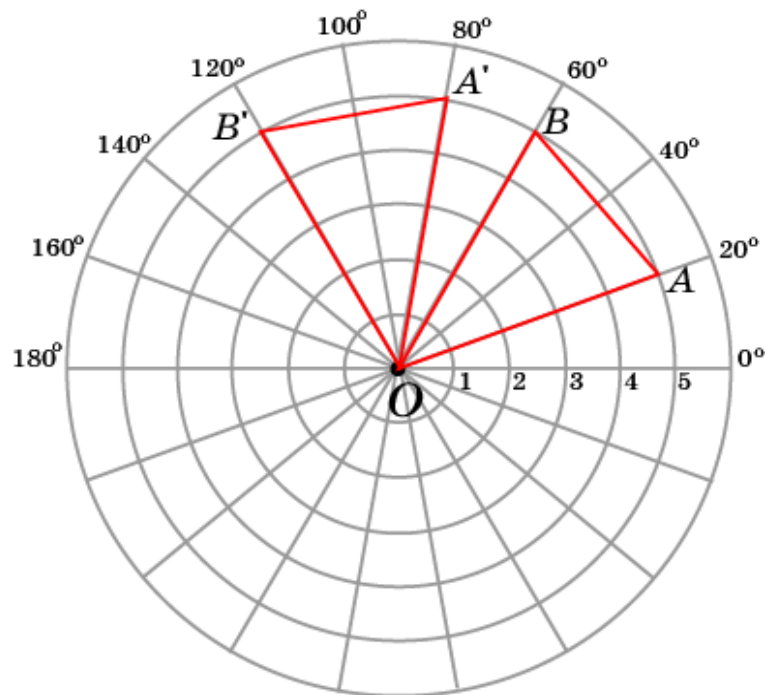
Ответ:



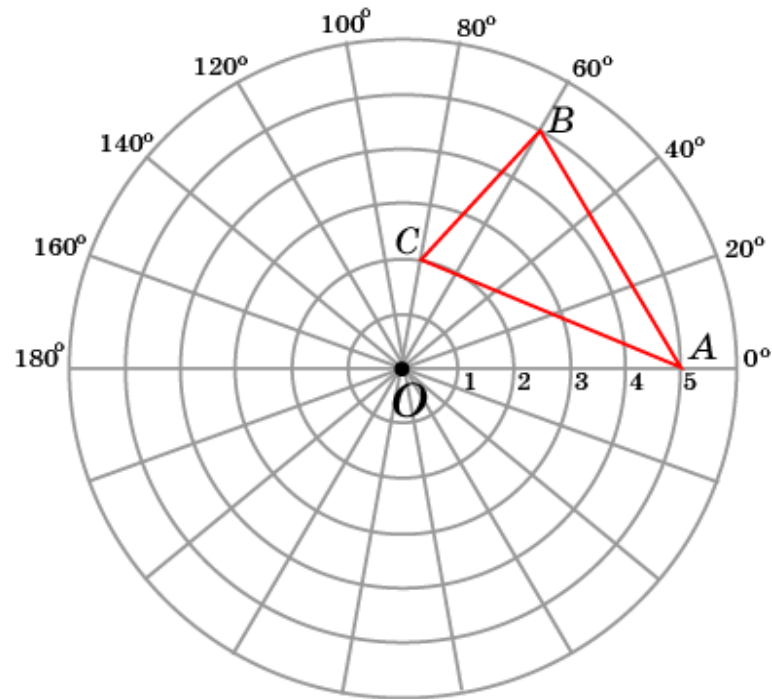
7. Изобразите треугольник, полученный из треугольника OAB поворотом вокруг точки O на угол 60° против часовой стрелки.



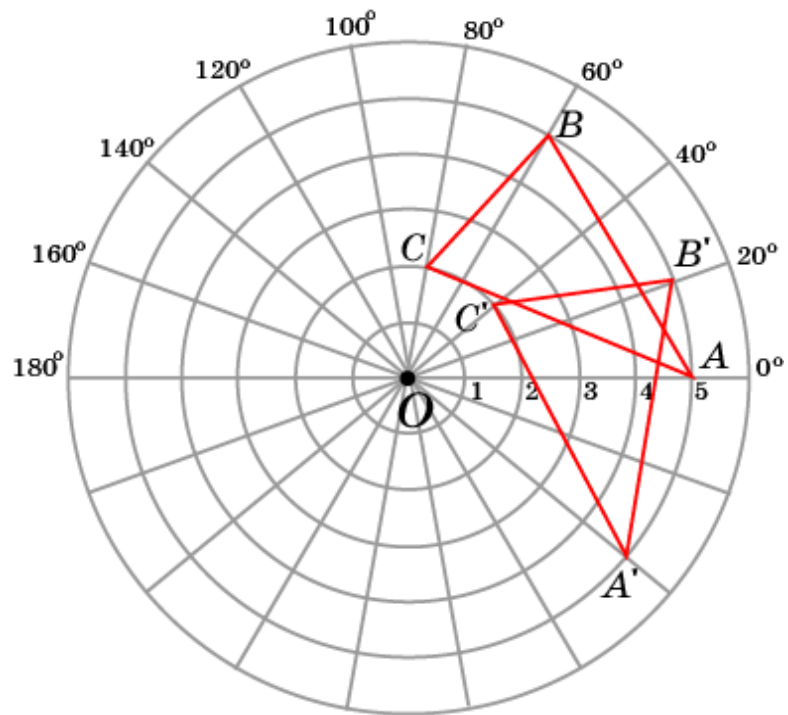
Ответ:



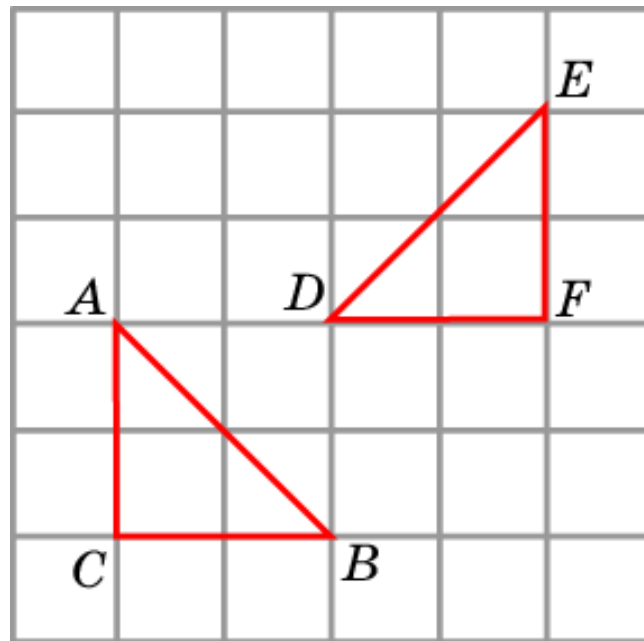
8. Изобразите треугольник, полученный из треугольника OAB поворотом вокруг точки O на угол 40° по часовой стрелке.



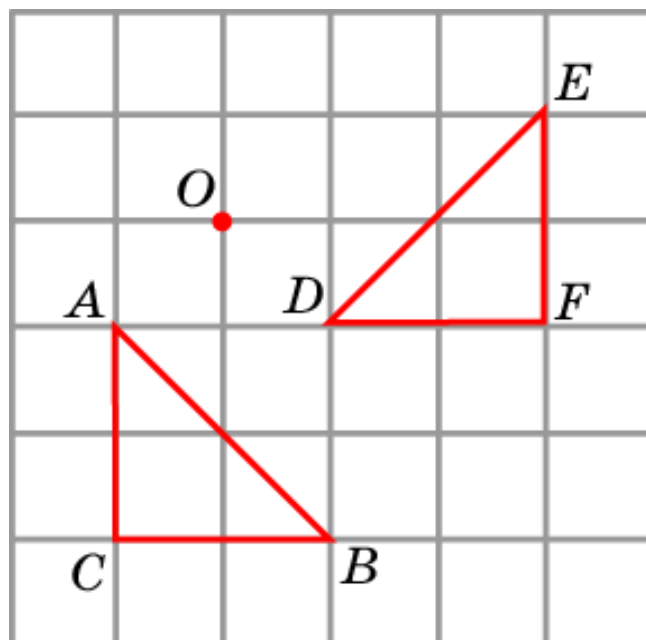
Ответ:



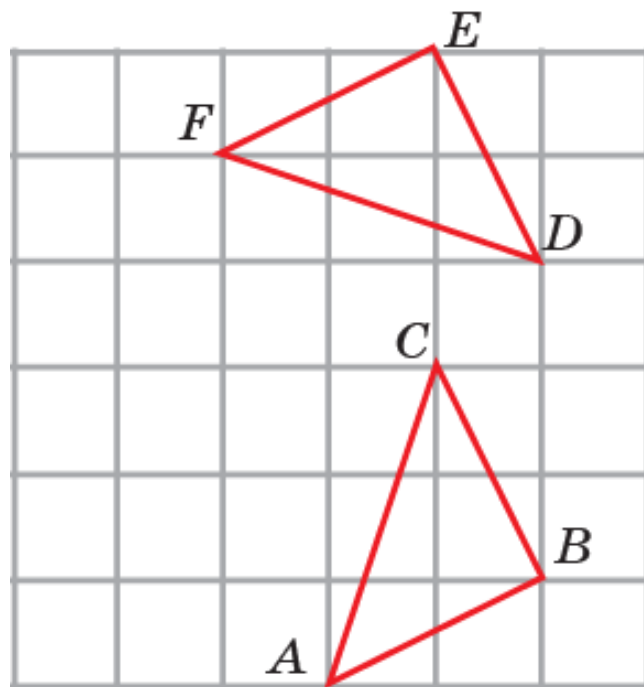
9. Треугольник DEF получен поворотом треугольника ABC на угол 90° против часовой стрелки. Укажите центр поворота.



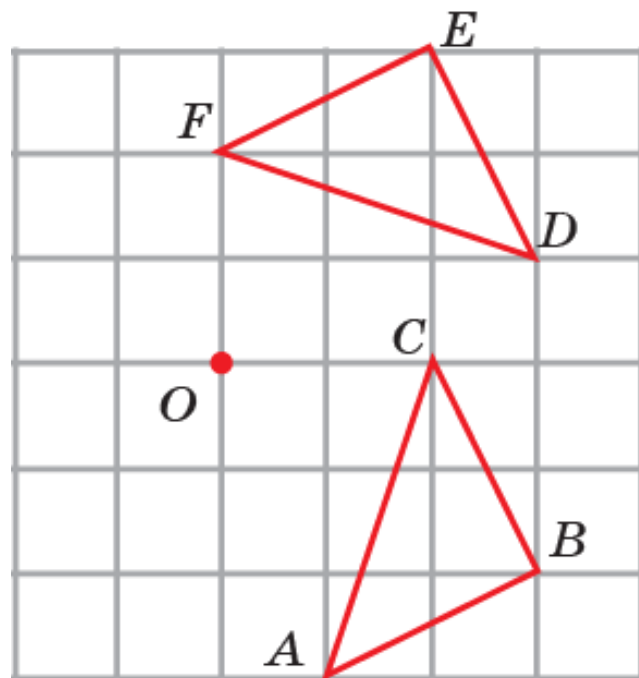
Ответ:



10. Треугольник DEF получен поворотом треугольника ABC на угол 90° против часовой стрелки. Укажите центр поворота.



Ответ:



11. Симметрией какого порядка обладают снежинки?



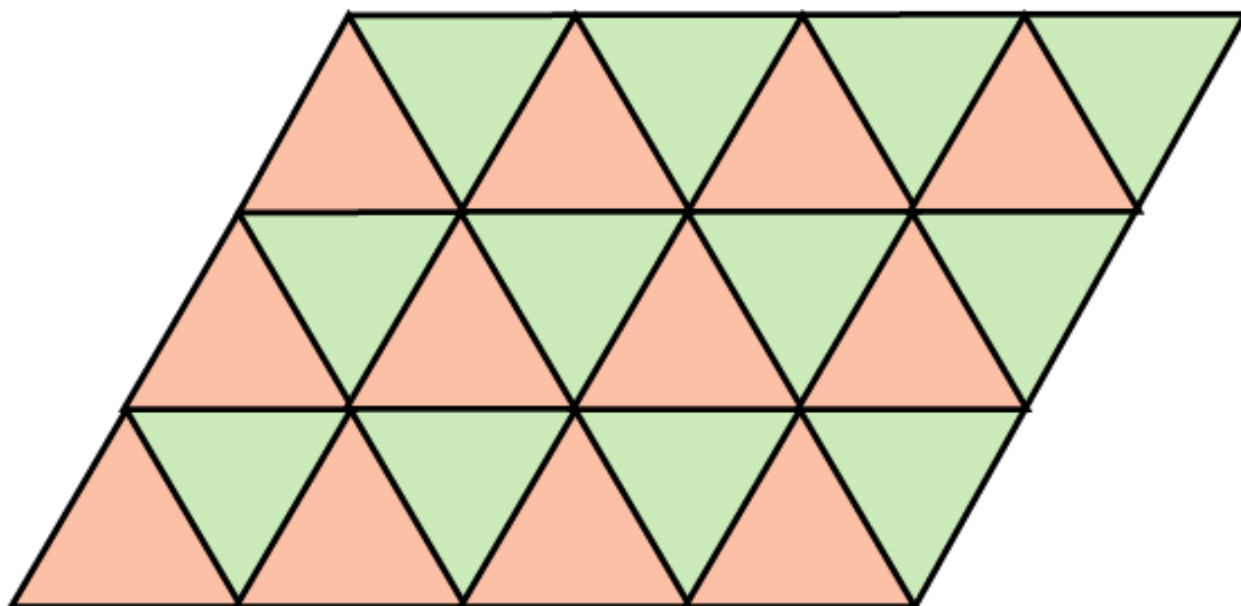
Паркетты

Паркетом называется такое заполнение плоскости многоугольниками, при котором любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек.

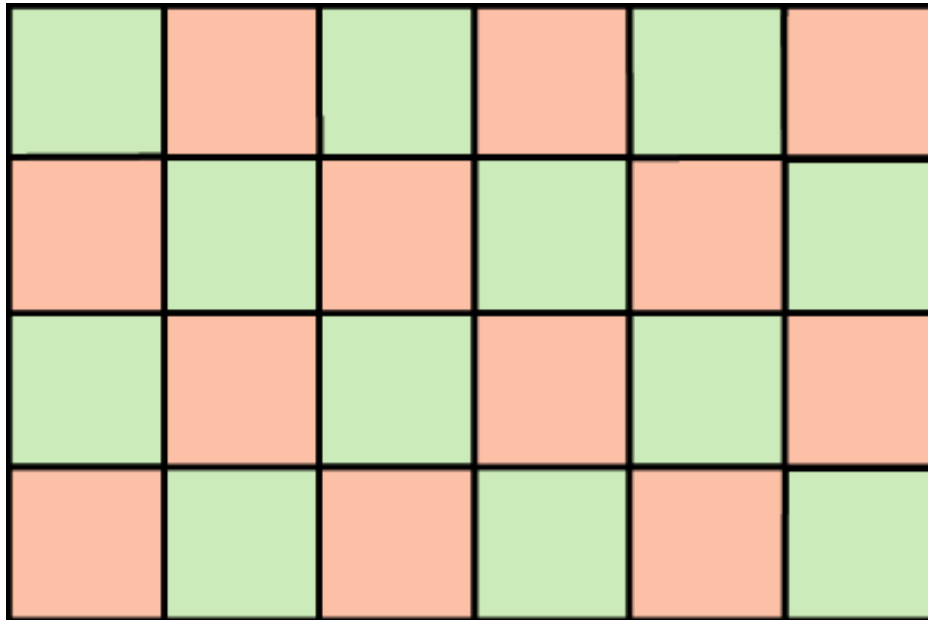
Паркет называется **правильным**, если он состоит из правильных многоугольников, и вокруг каждой вершины правильные многоугольники расположены одним и тем же способом.

Всего имеется 11 правильных паркетов.

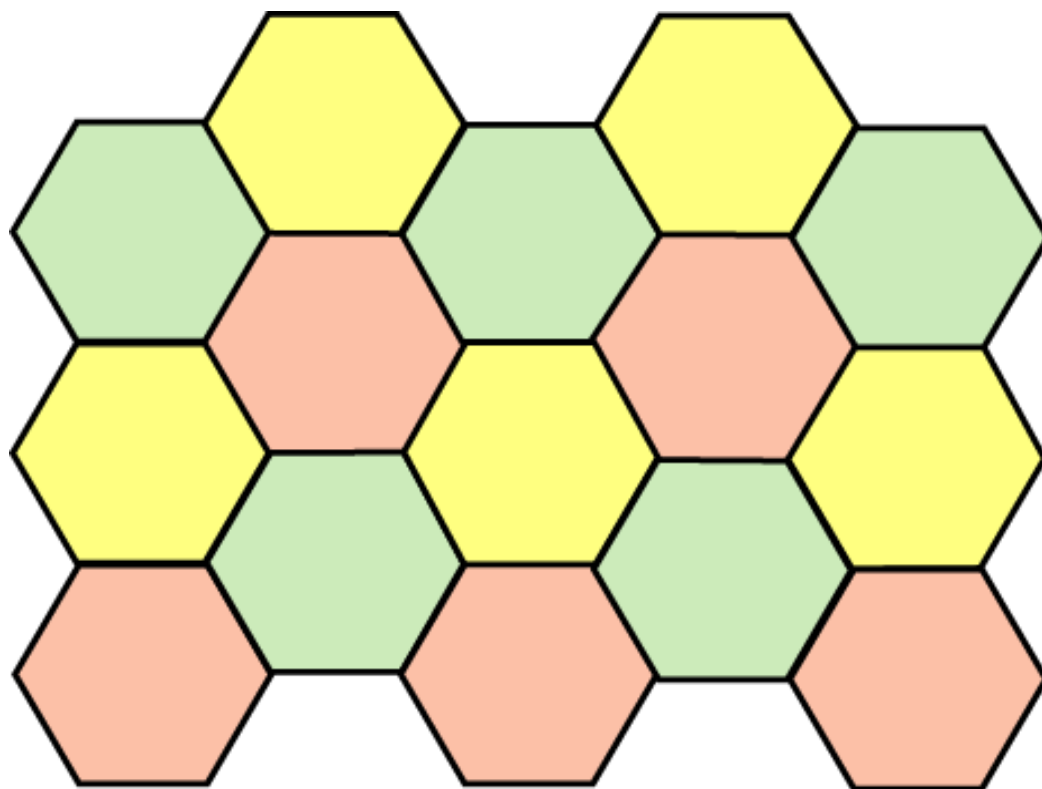
1. На рисунке приведен фрагмент правильного паркета из треугольников.



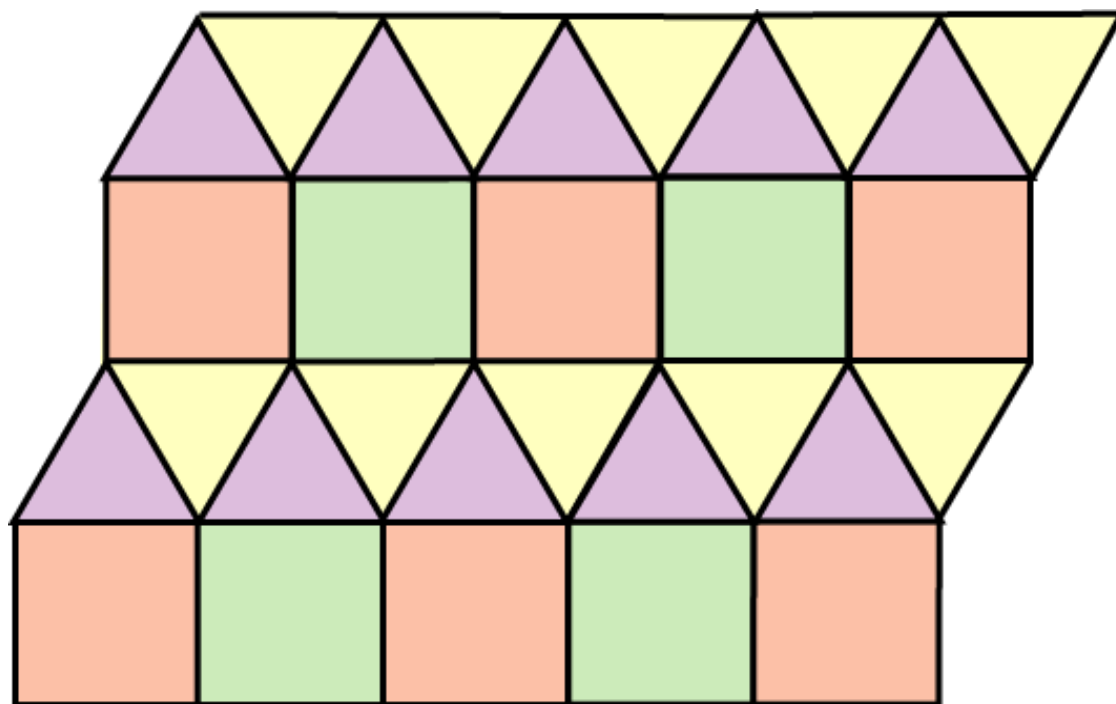
2. На рисунке приведен фрагмент правильного паркета из квадратов.



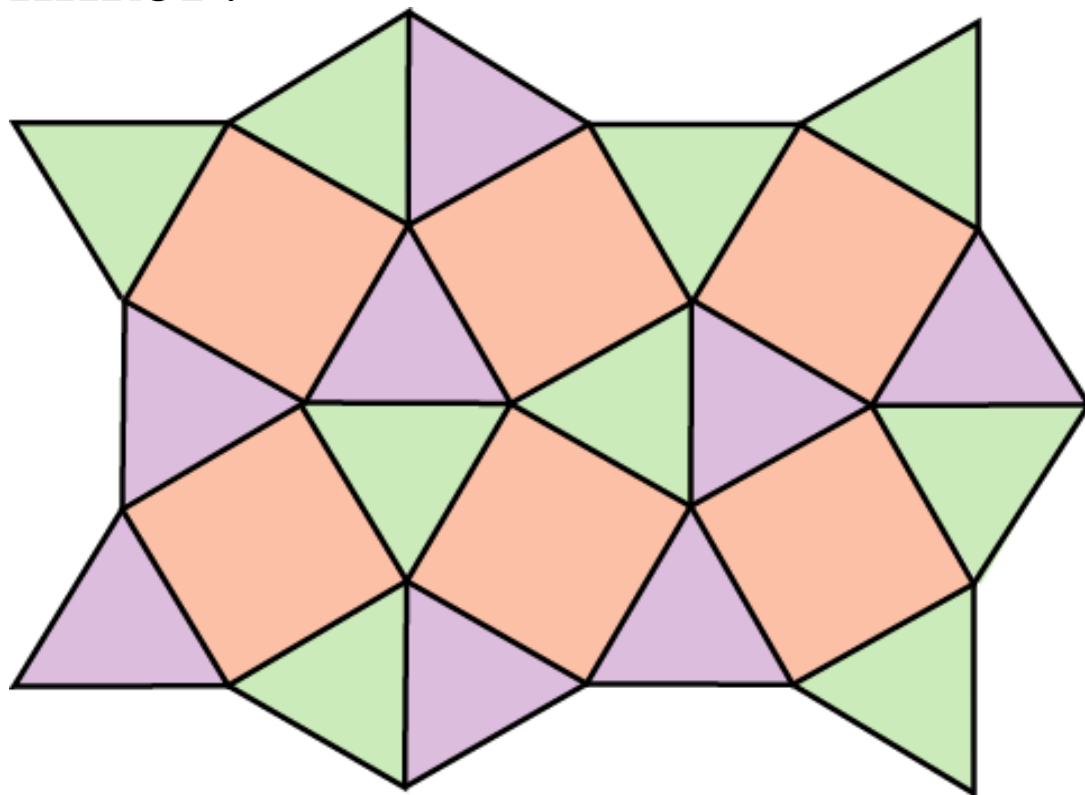
3. На рисунке приведен фрагмент правильного паркета из шестиугольников.



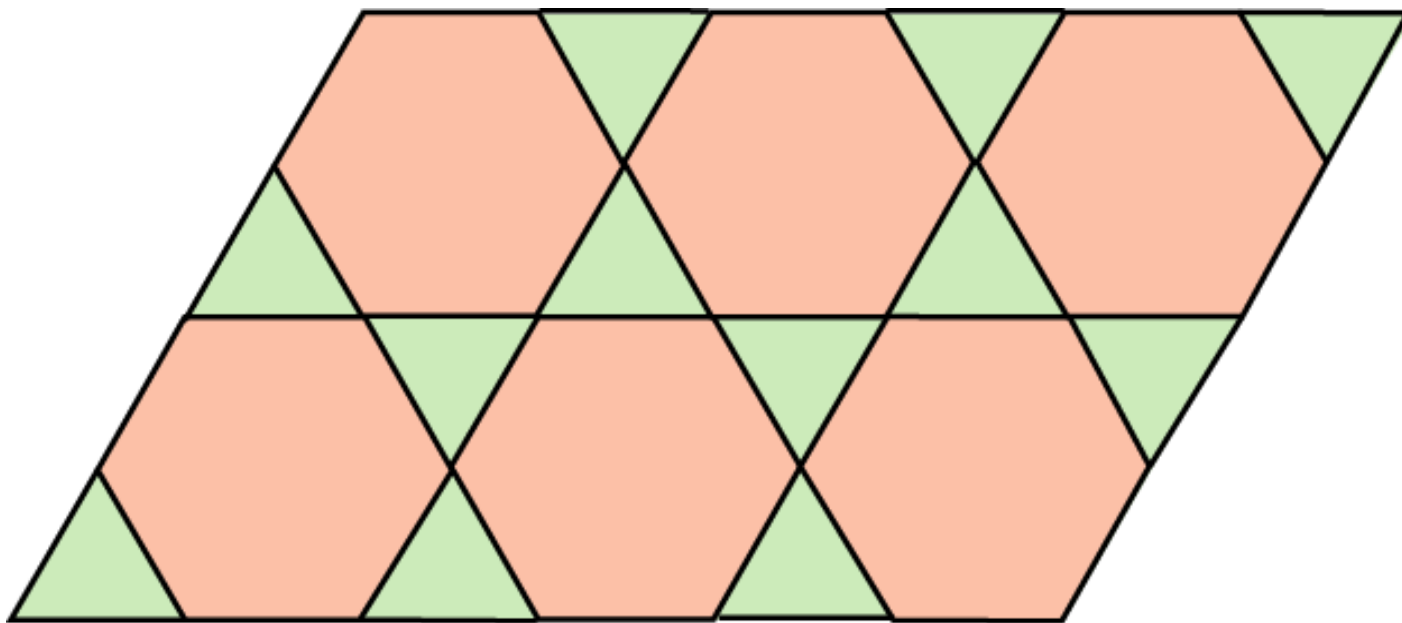
4. На рисунке приведен фрагмент правильного паркета из квадратов и треугольников.



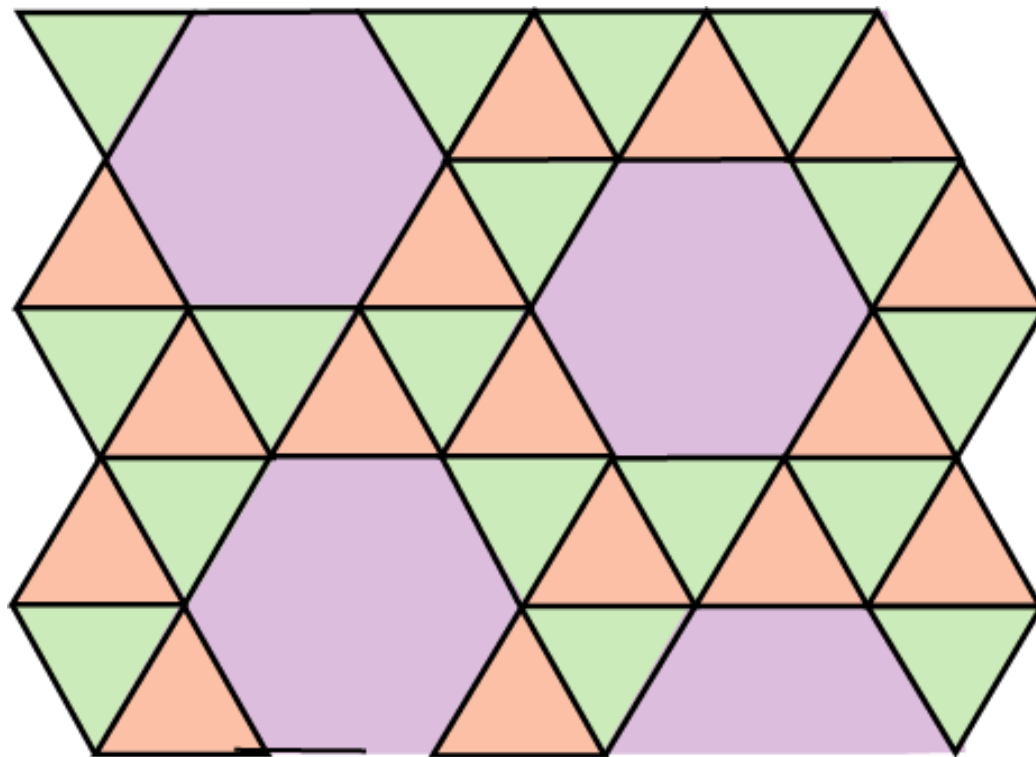
5. На рисунке приведен фрагмент правильного паркета из квадратов и треугольников.



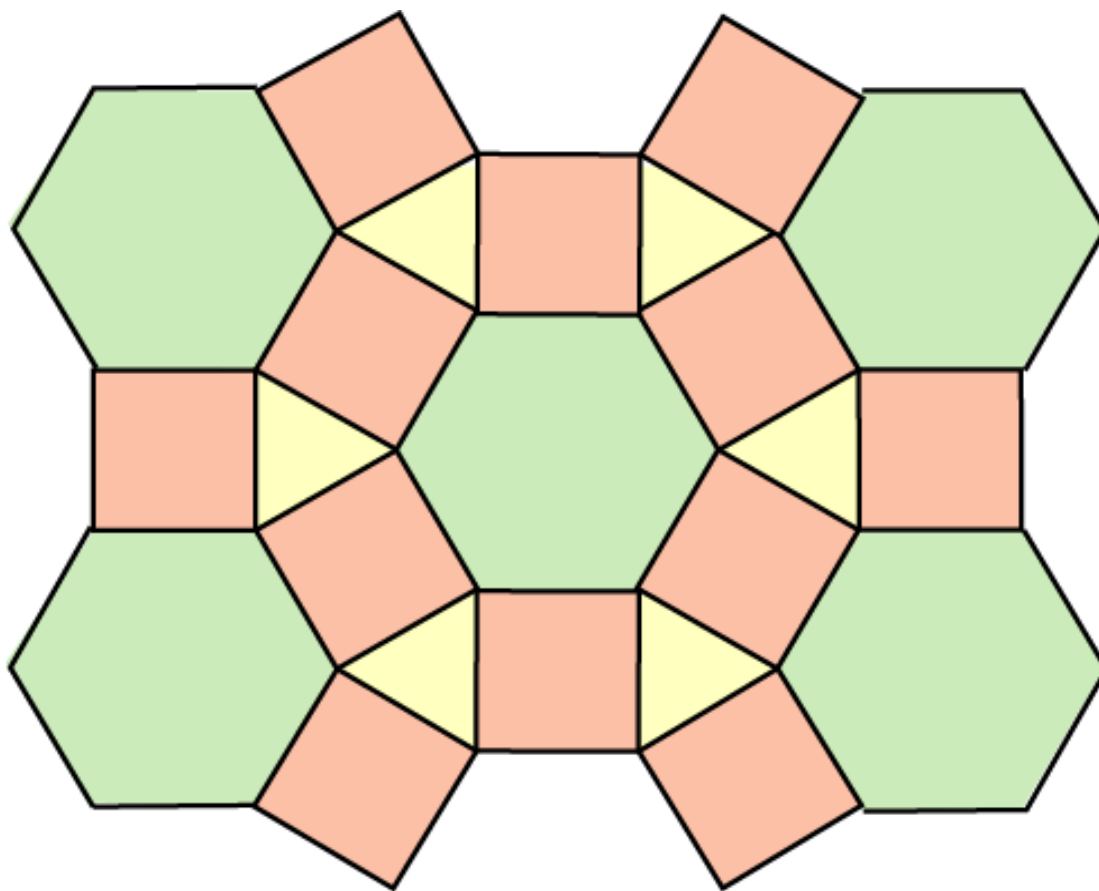
6. На рисунке приведен фрагмент правильного паркета из шестиугольников и треугольников.



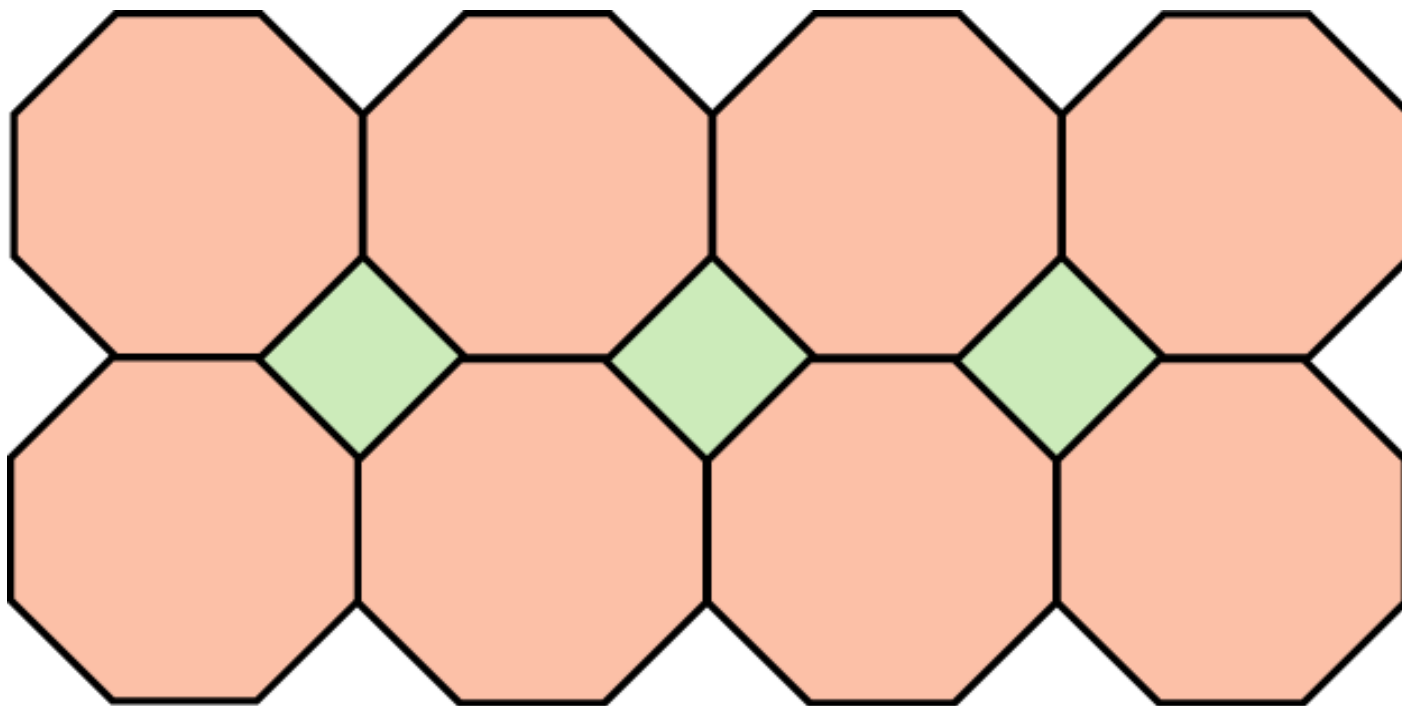
7. На рисунке приведен фрагмент правильного паркета из шестиугольников и треугольников.



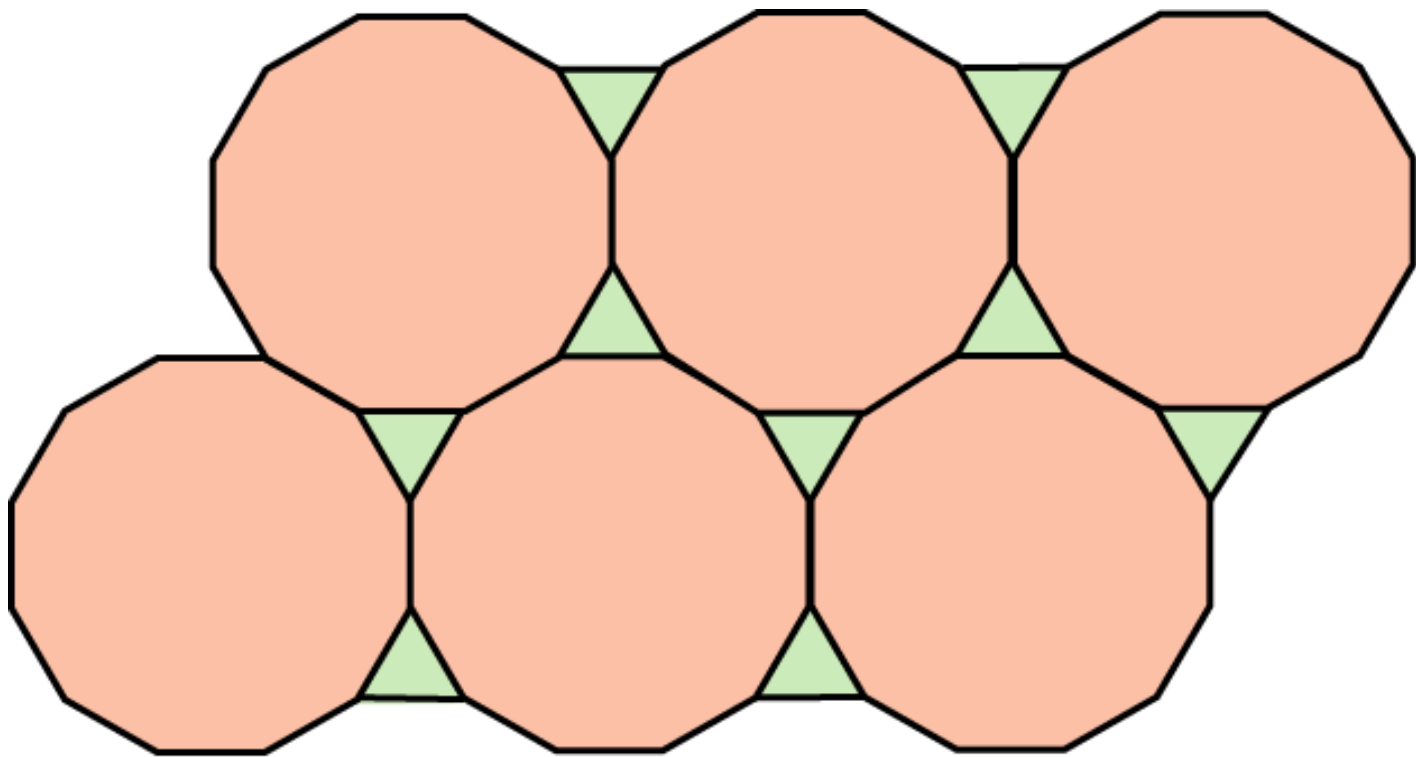
8. На рисунке приведен фрагмент правильного паркета из шестиугольников, квадратов и треугольников.



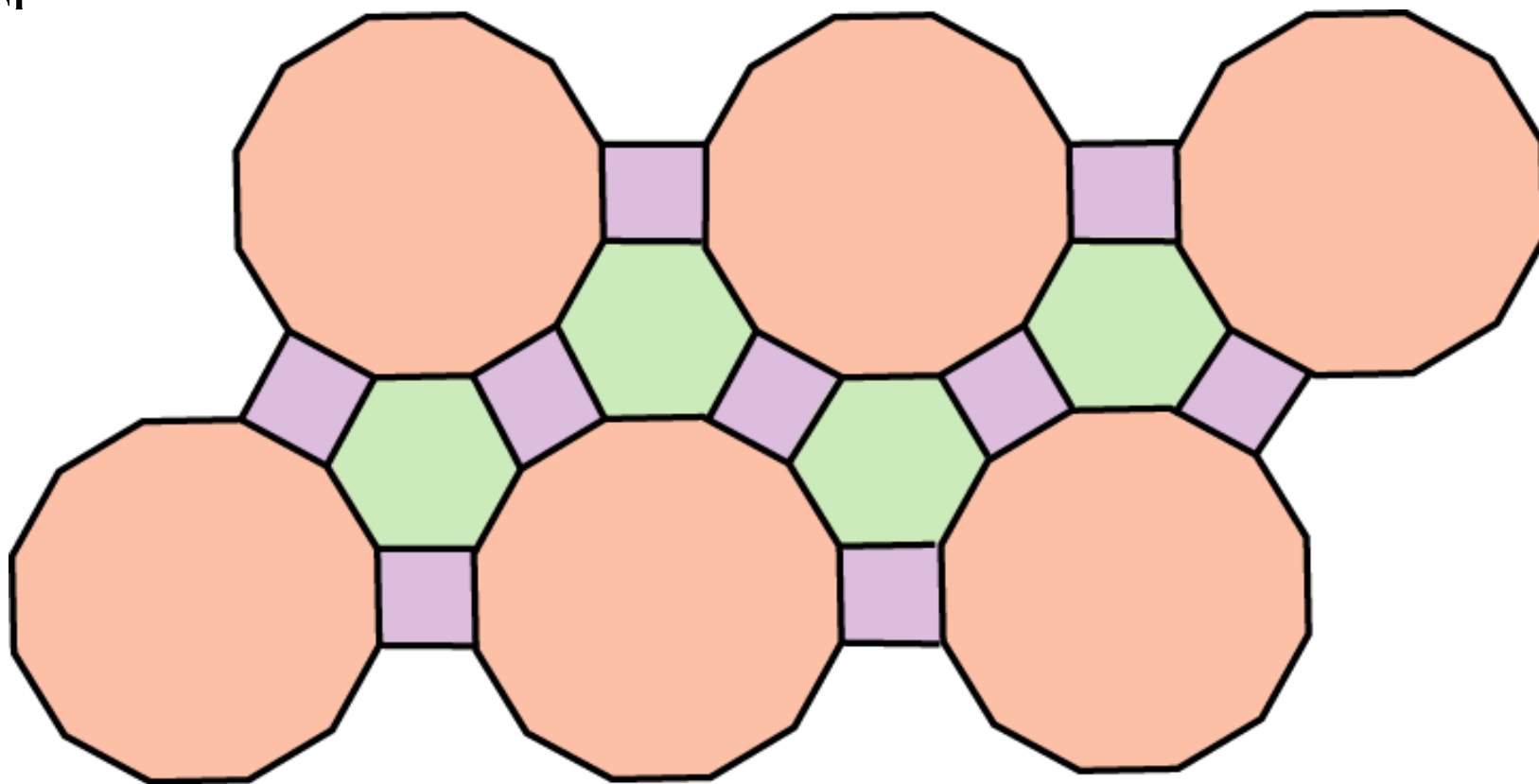
9. На рисунке приведен фрагмент правильного паркета из восьмиугольников и квадратов.



10. На рисунке приведен фрагмент правильного паркета из двенадцатиугольников, и треугольников.

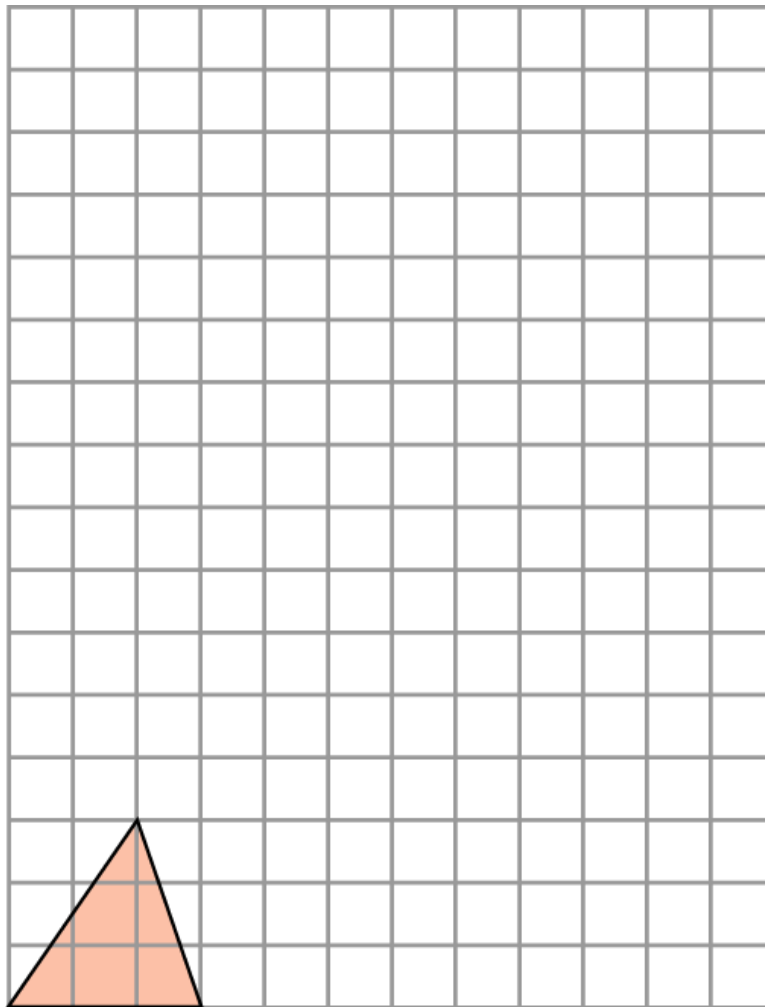


11. На рисунке приведен фрагмент правильного паркета из двенадцатиугольников, шестиугольников и квадратов.

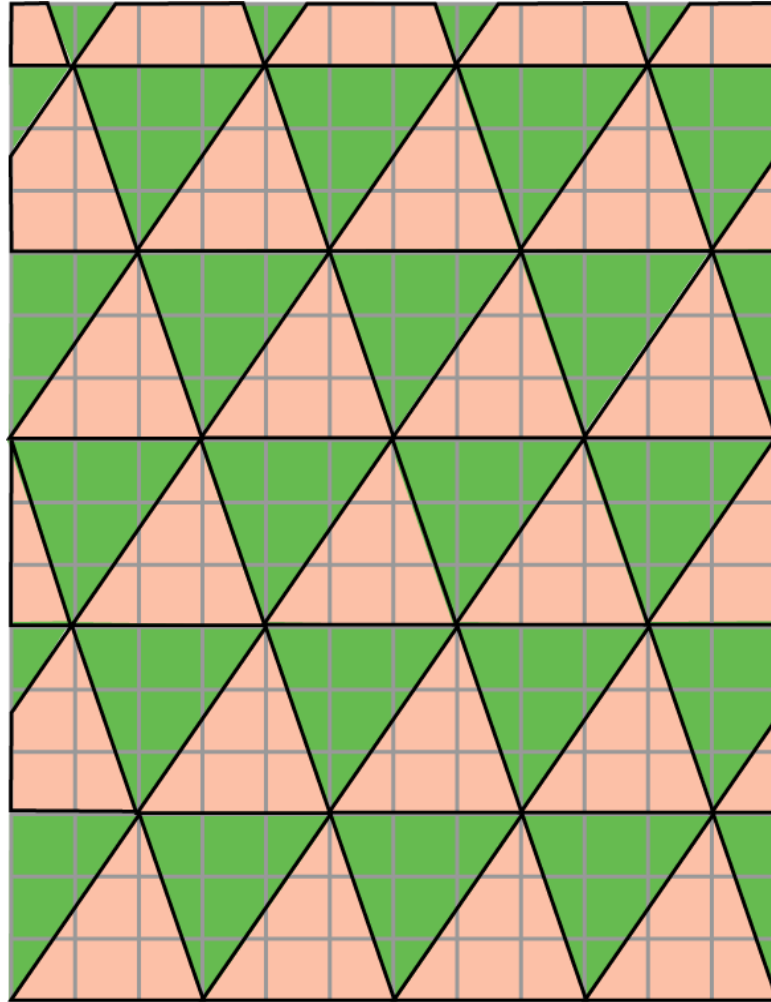


Упражнения

1. Изобразите паркет, составленный из треугольников, равных данному. Раскрасьте треугольники в два цвета так, чтобы соседние треугольники были окрашены разными цветами.



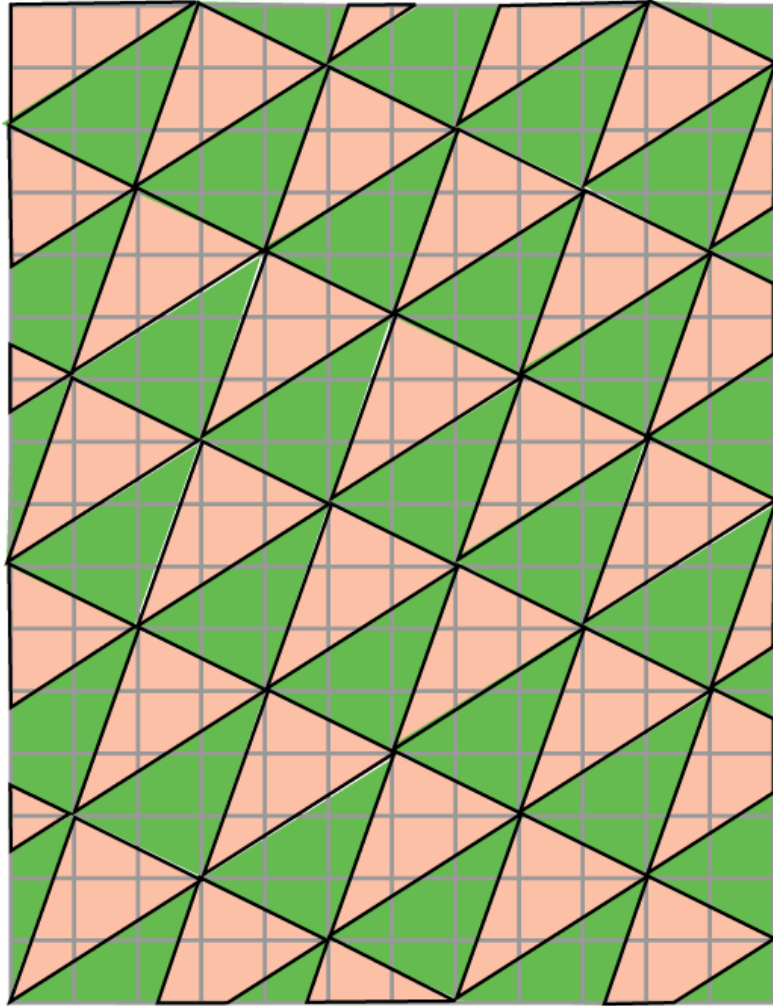
Ответ:



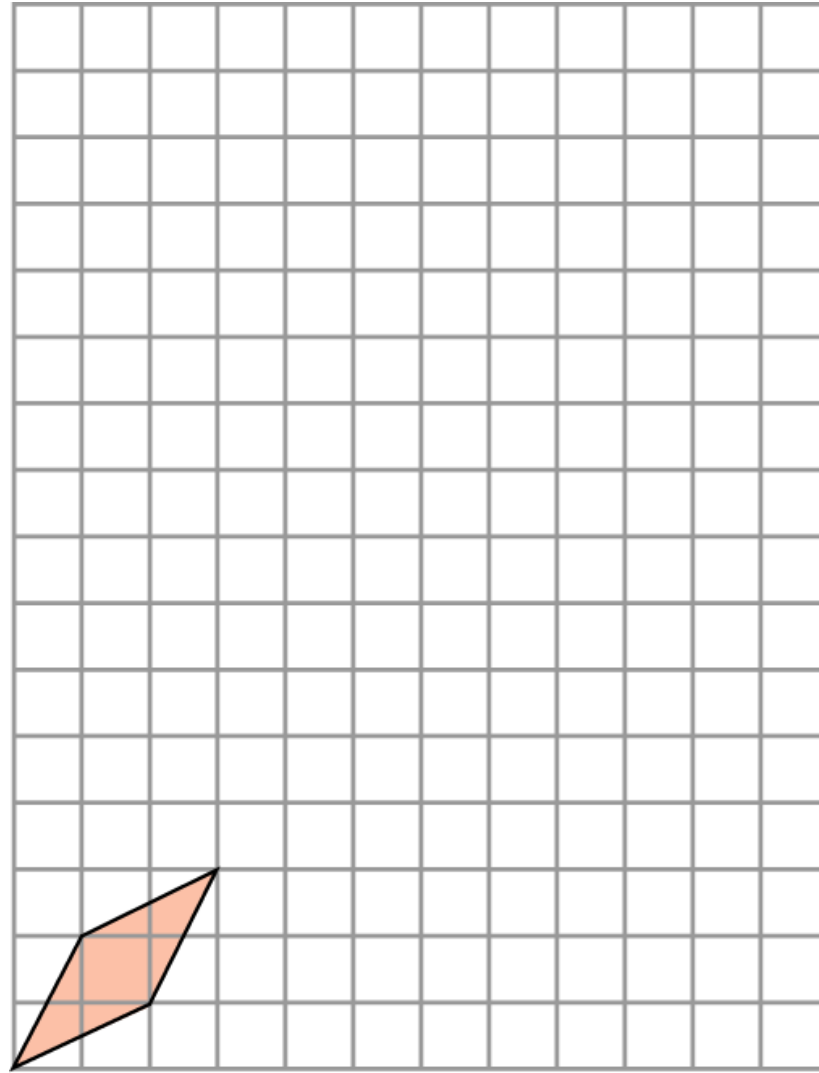
2. Изобразите паркет, составленный из треугольников, равных данному. Раскрасьте треугольники в два цвета так, чтобы соседние треугольники были окрашены разными цветами.



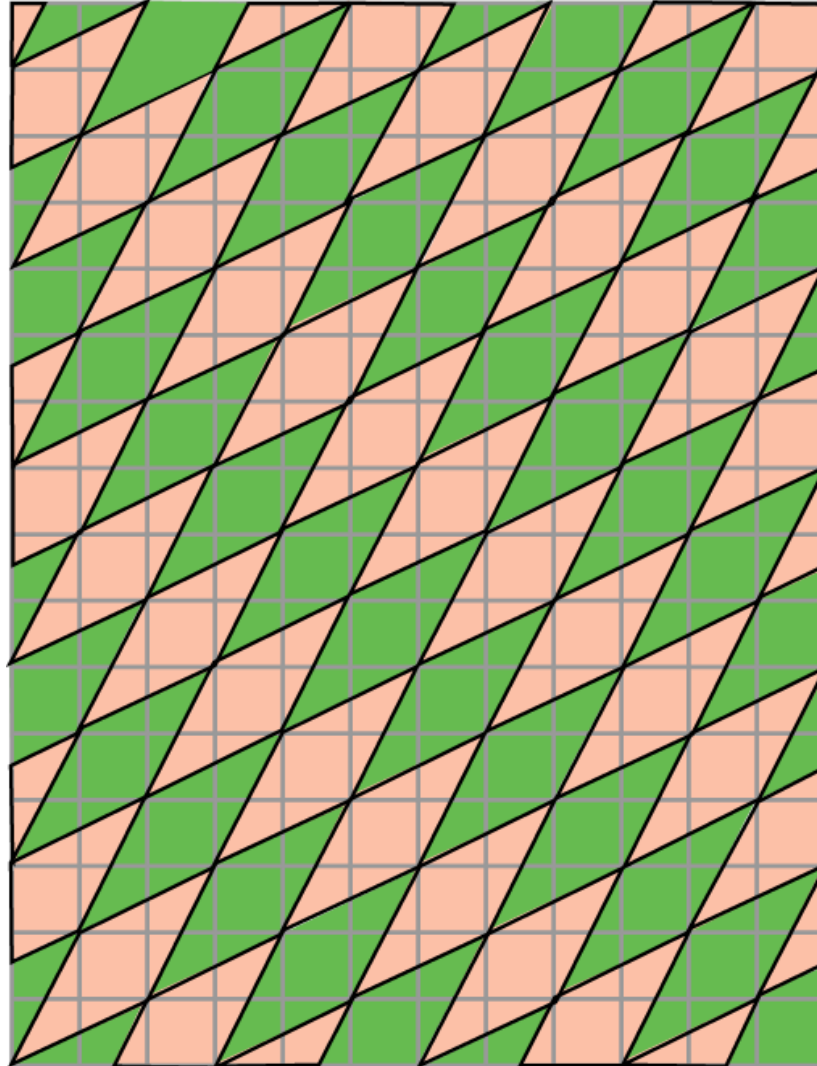
Ответ:



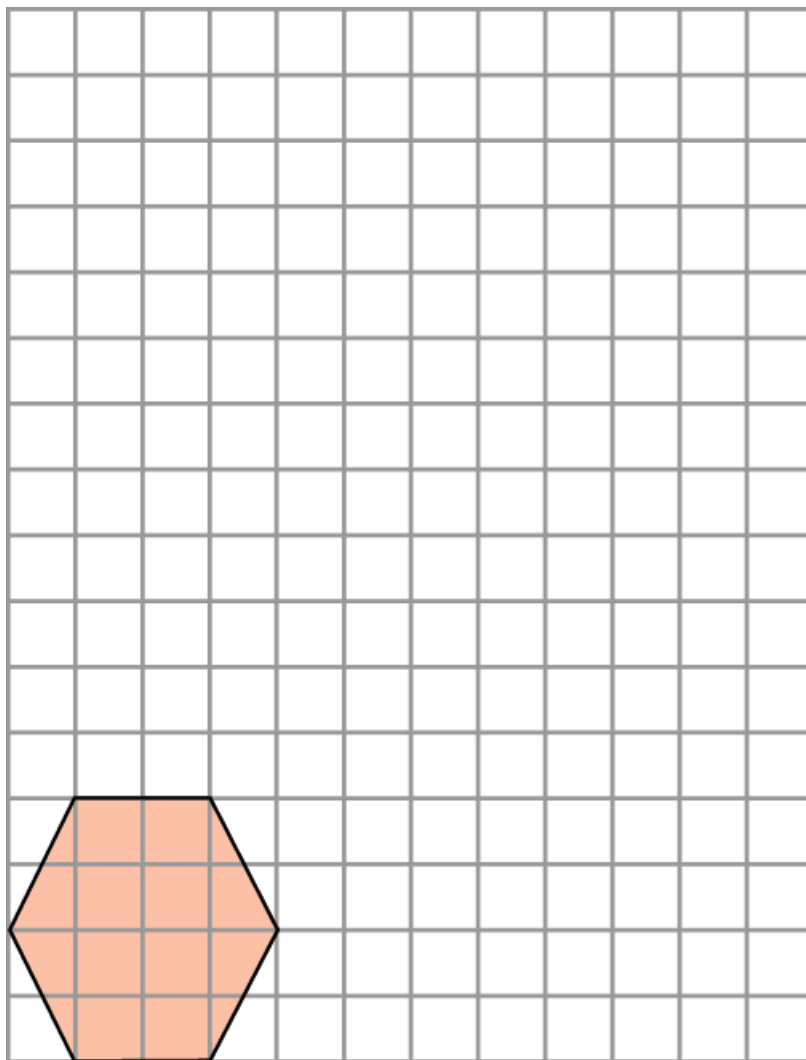
3. Изобразите паркет, составленный из ромбов, равных данному. Раскрасьте ромбы в два цвета так, чтобы соседние четырехугольники были окрашены разными цветами.



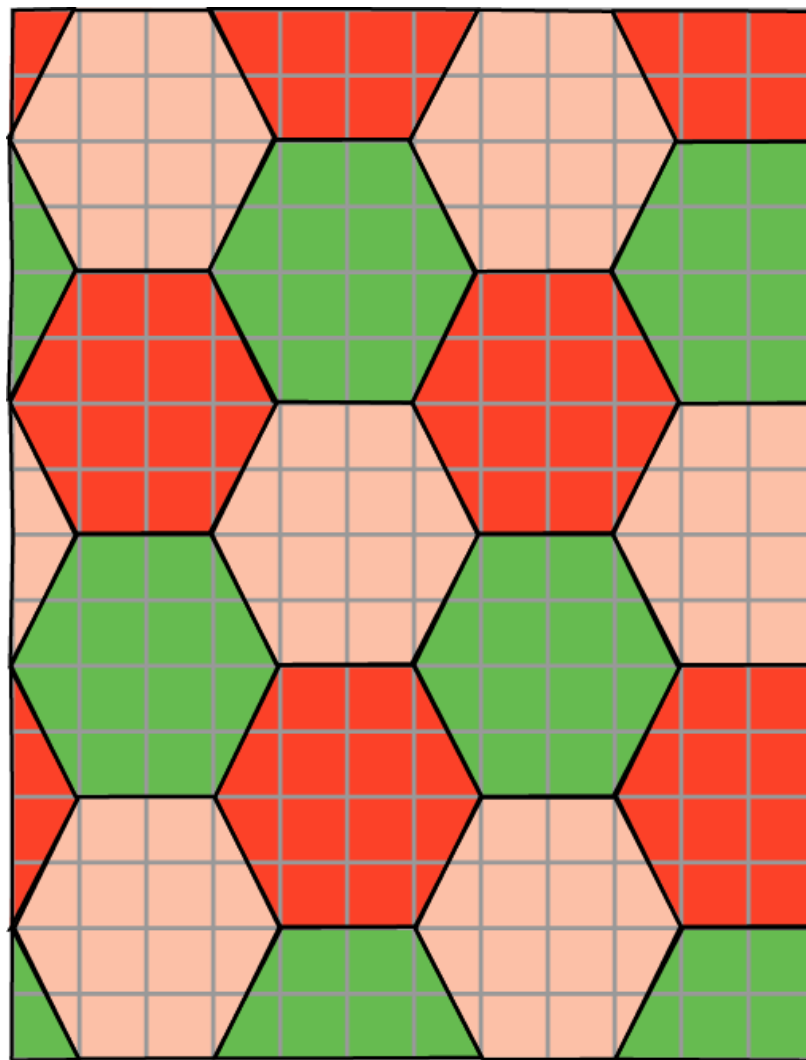
Ответ:



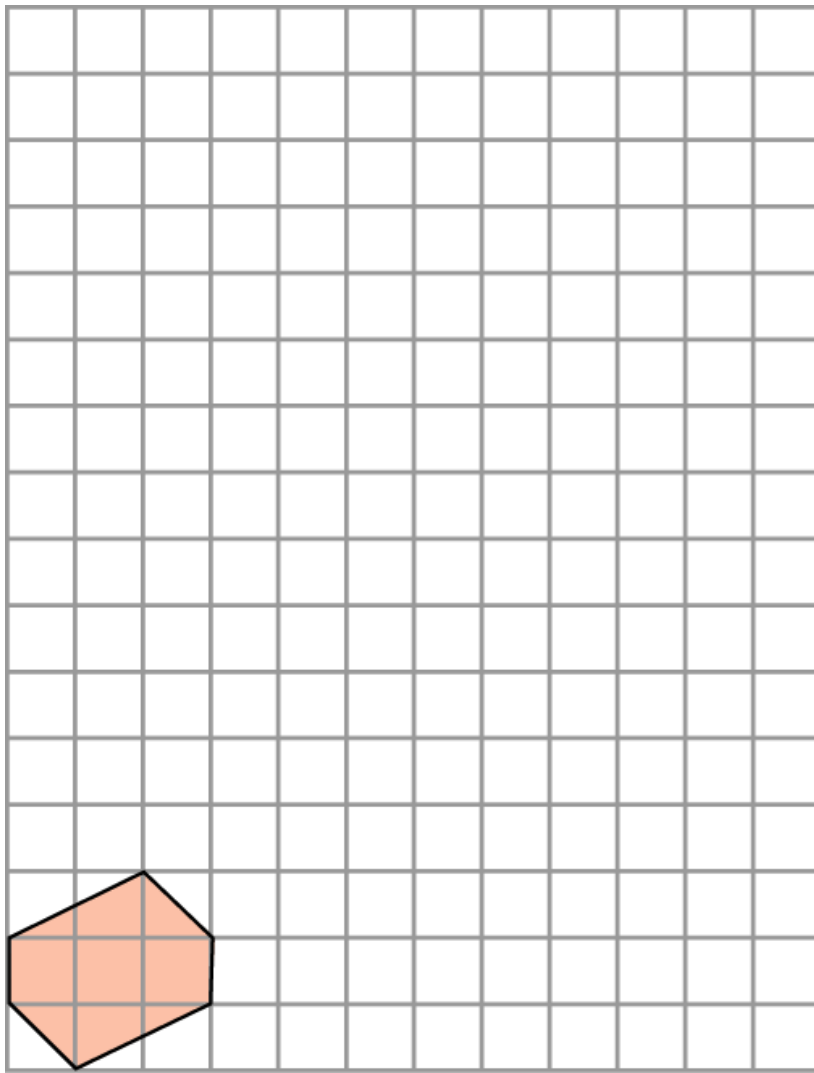
4. Изобразите паркет, составленный из шестиугольников, равных данному. Раскрасьте шестиугольники в три цвета так, чтобы соседние шестиугольники были окрашены разными цветами.



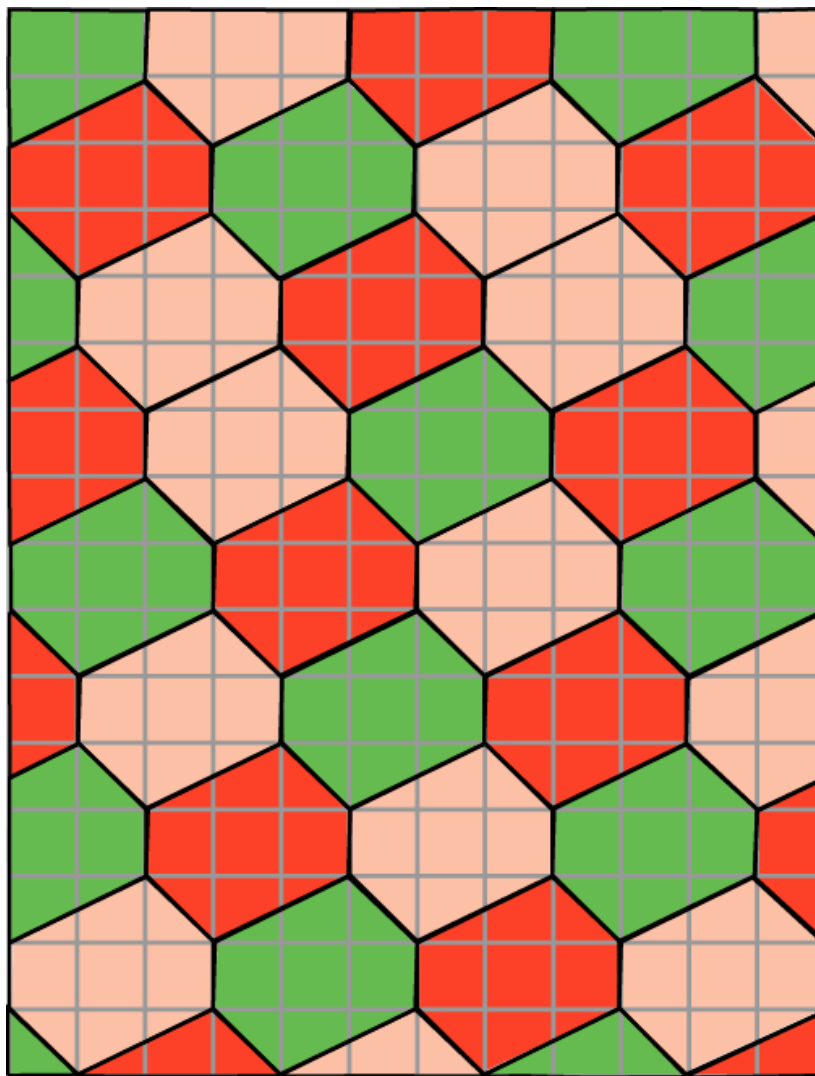
Ответ:



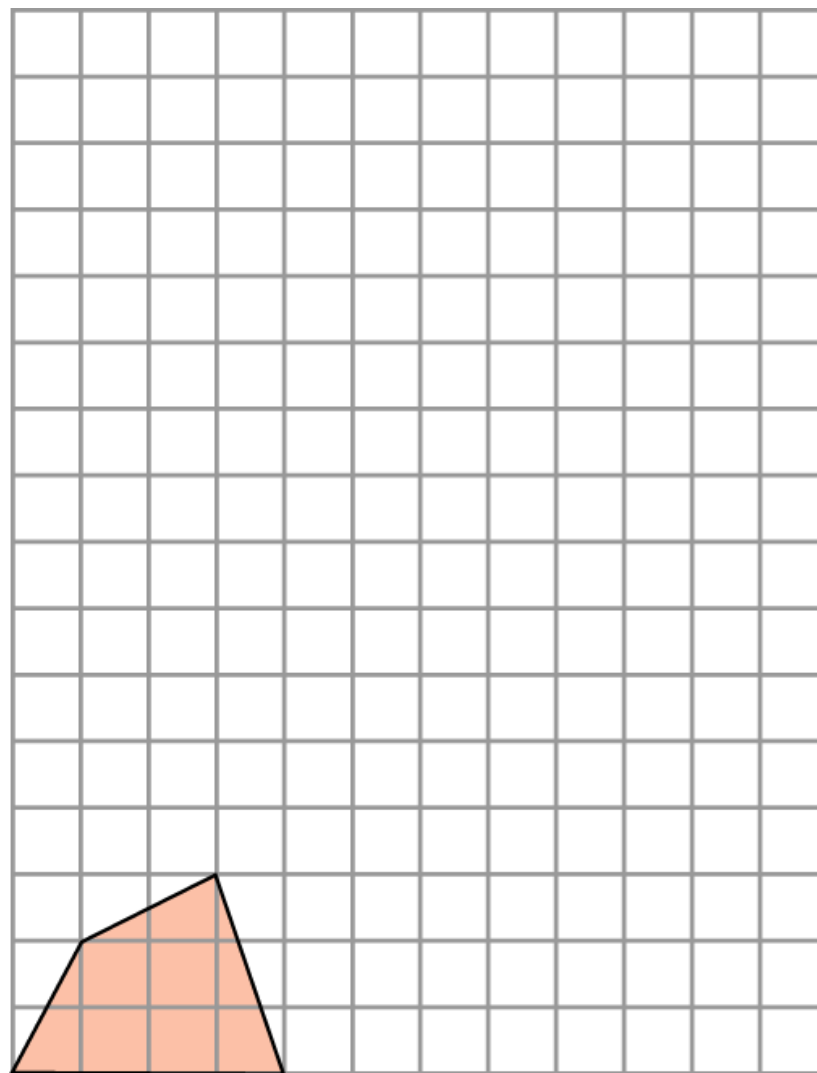
5. Изобразите паркет, составленный из шестиугольников, равных данному. Раскрасьте шестиугольники в три цвета так, чтобы соседние шестиугольники были окрашены разными цветами.



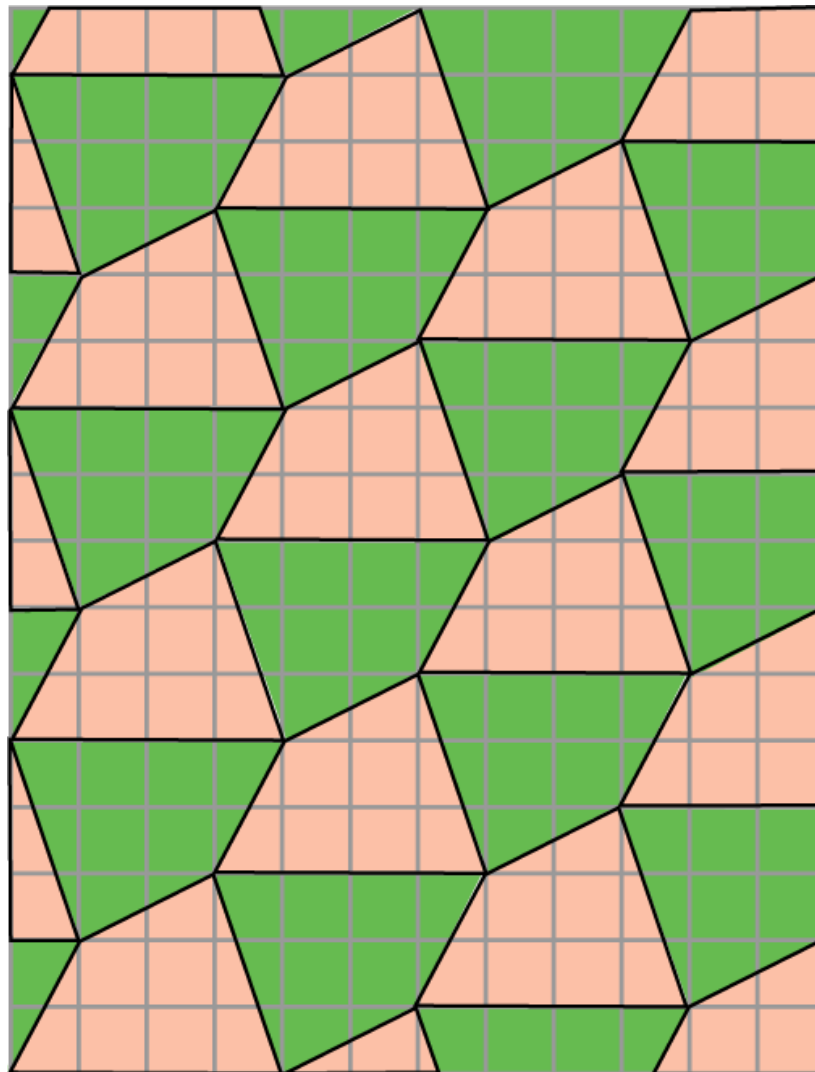
Ответ:



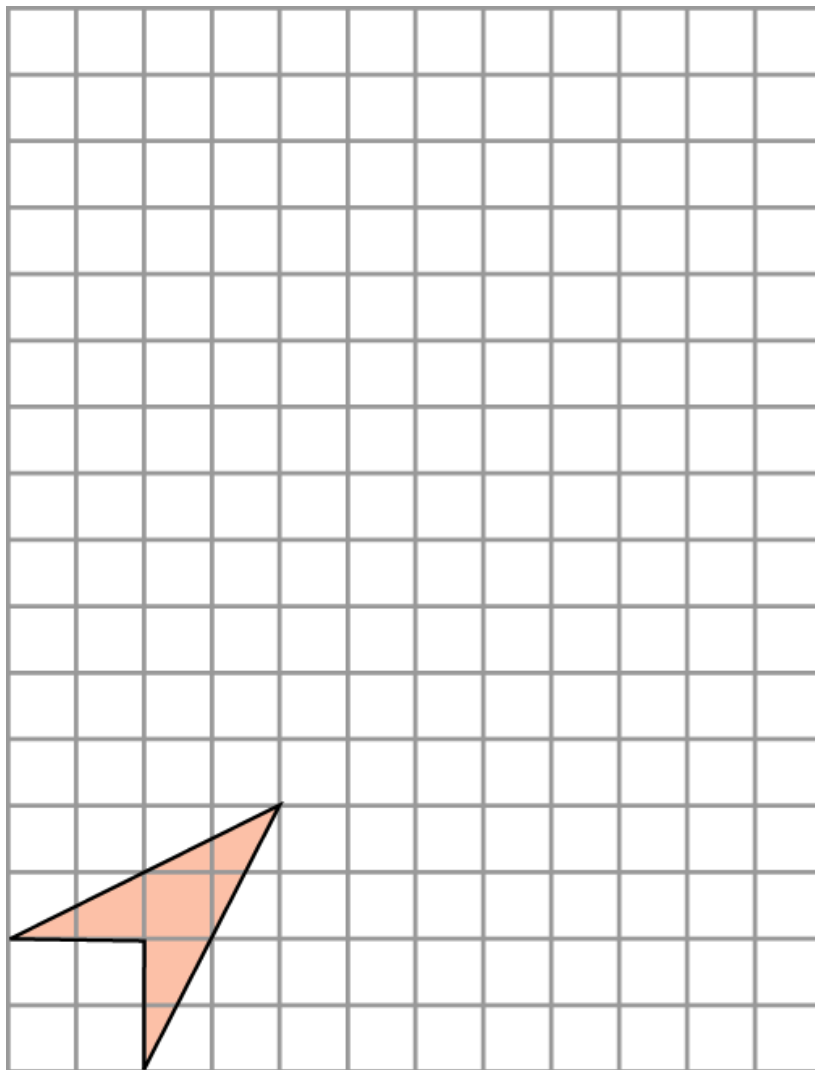
6*. Изобразите паркет, составленный из четырехугольников, равных данному. Раскрасьте четырехугольники в два цвета так, чтобы соседние четырехугольники были окрашены разными цветами.



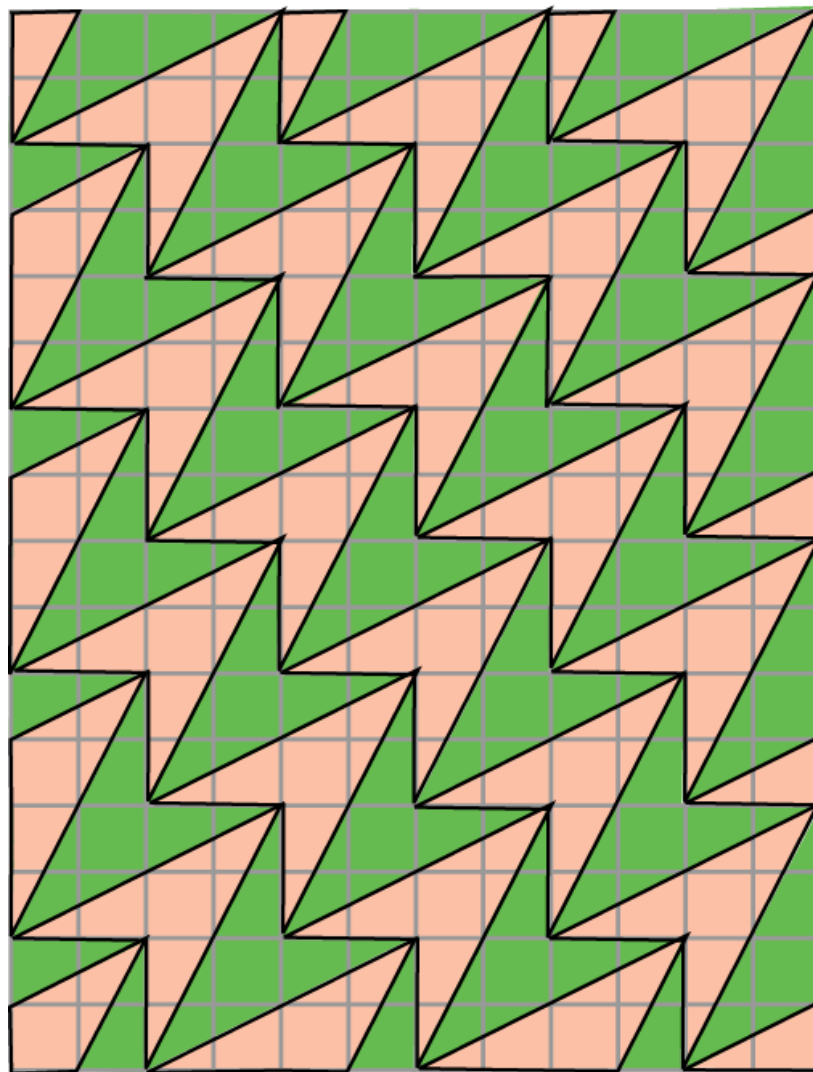
Ответ:



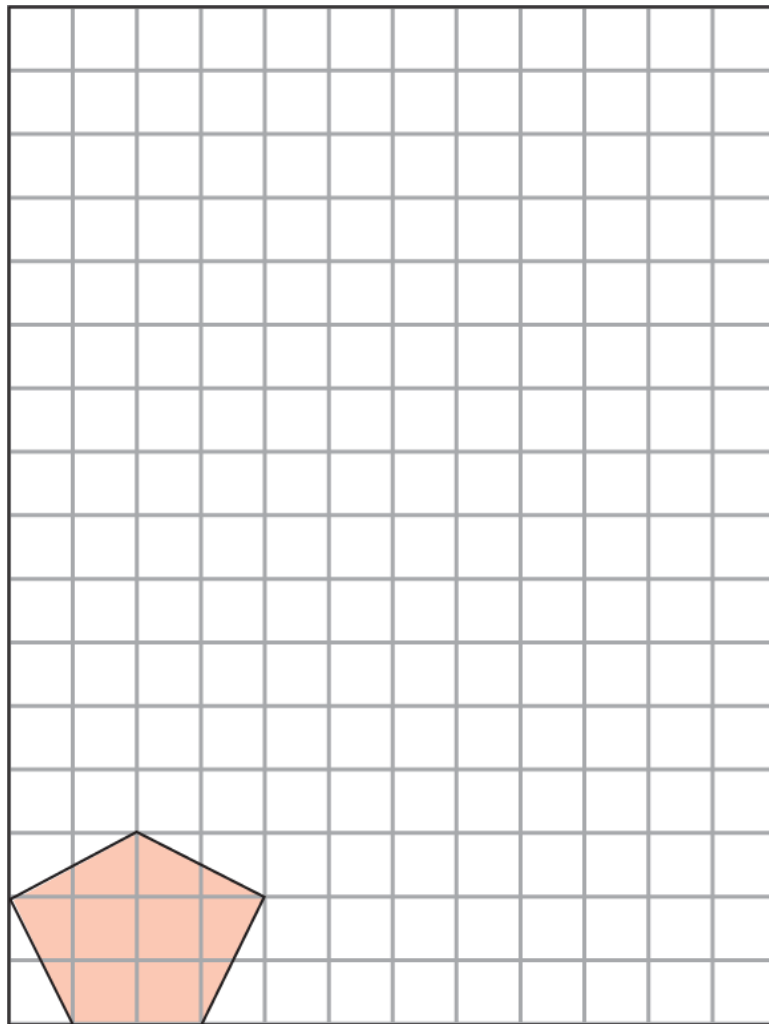
7*. Изобразите паркет, составленный из четырехугольников, равных данному. Раскрасьте четырехугольники в два цвета так, чтобы соседние четырехугольники были окрашены разными цветами.



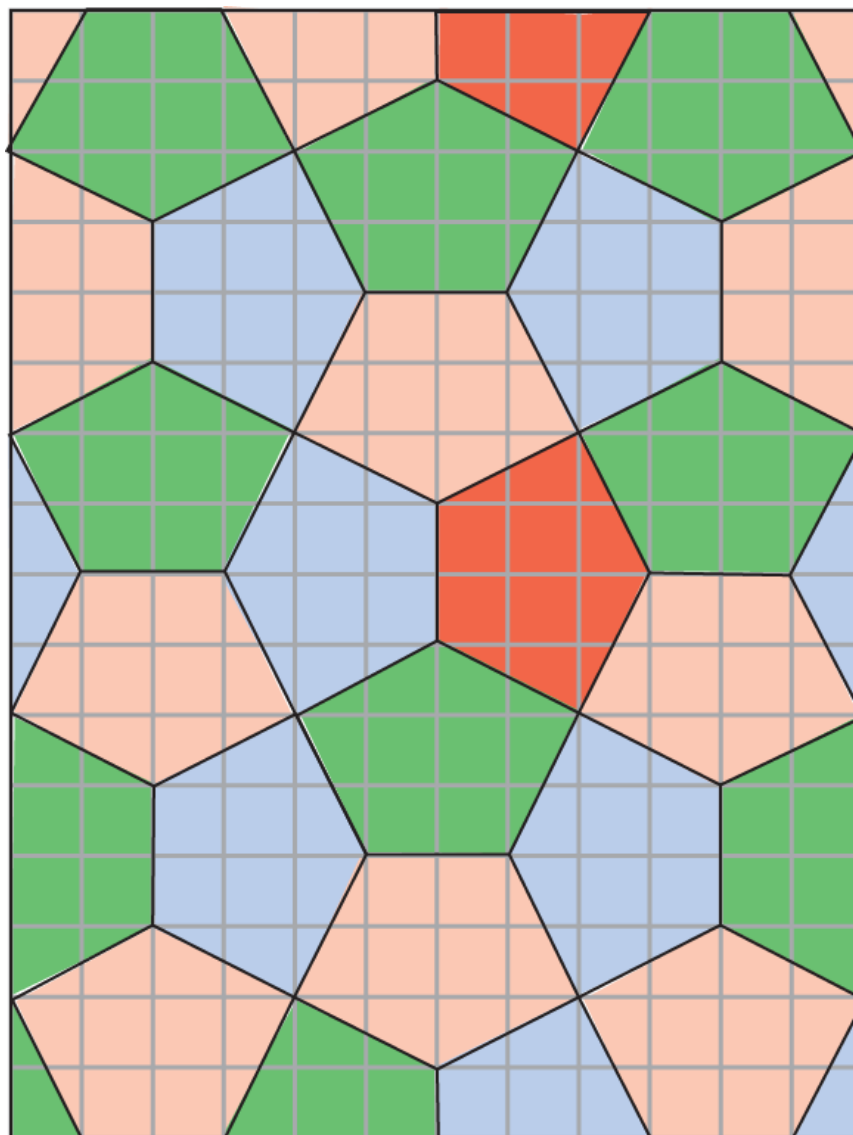
Ответ:



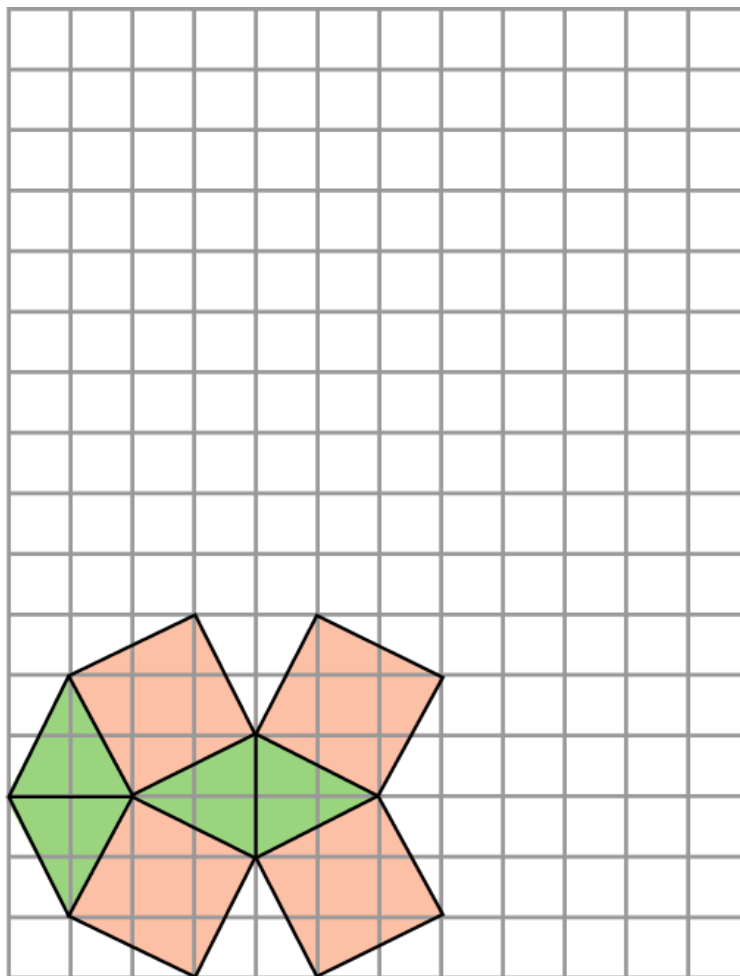
8*. Составьте паркет из пятиугольника, изображённого на рисунке.

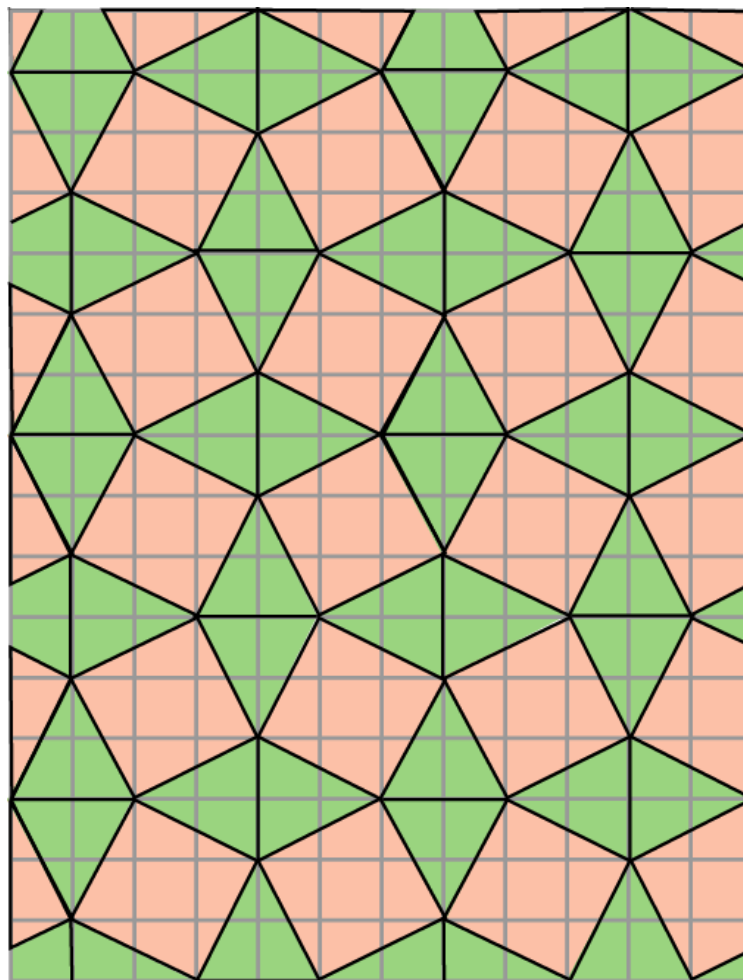


Ответ:



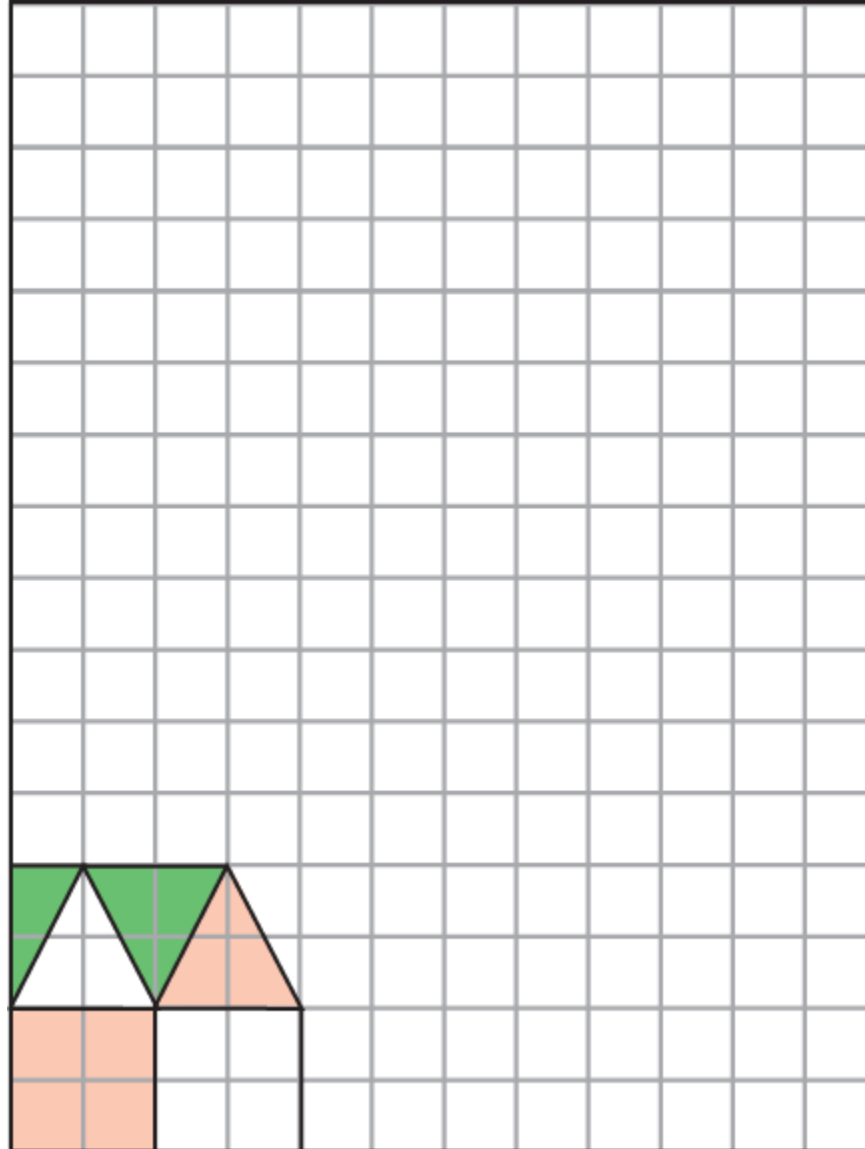
9*. Продолжите составление паркета из квадратов и треугольников, равных данным, так, чтобы в каждой вершине сходилось два квадрата и три треугольника. Раскрасьте квадраты одним цветом, а треугольники – другим.



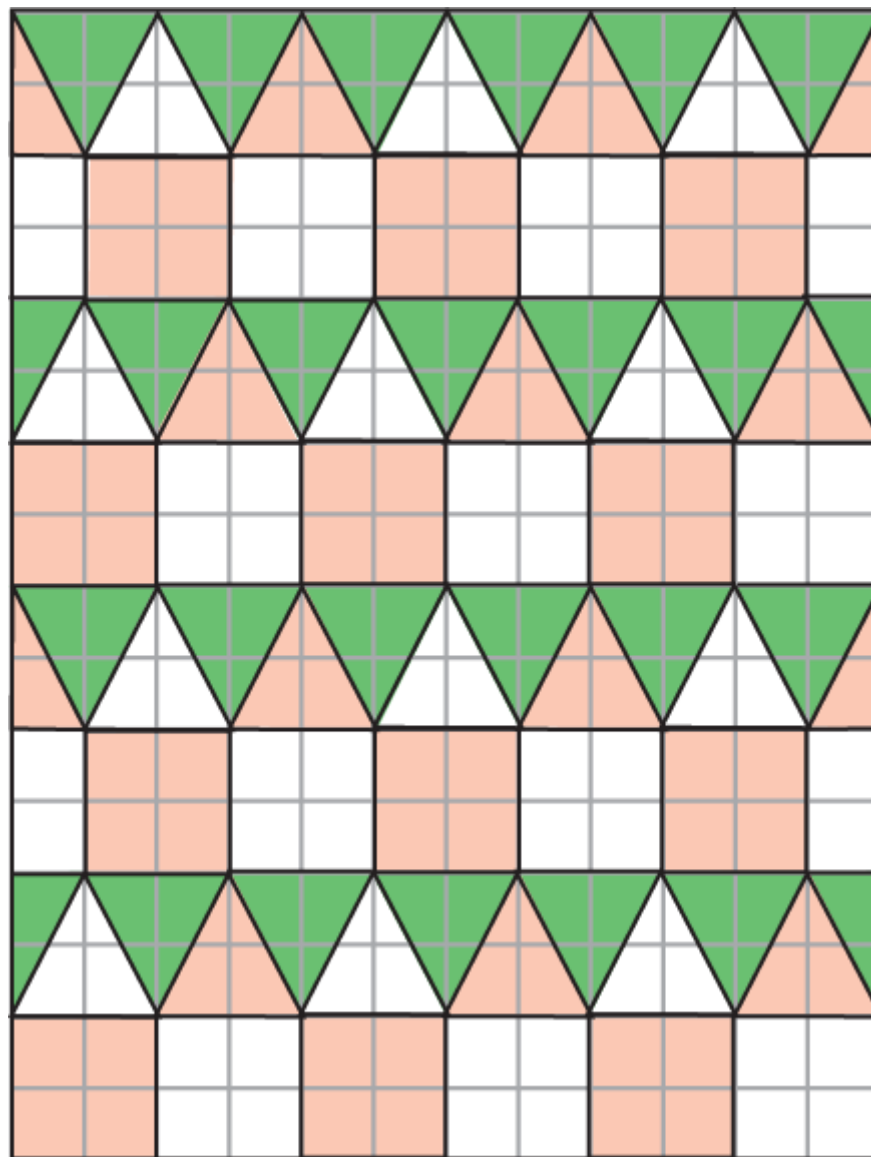


Ответ:

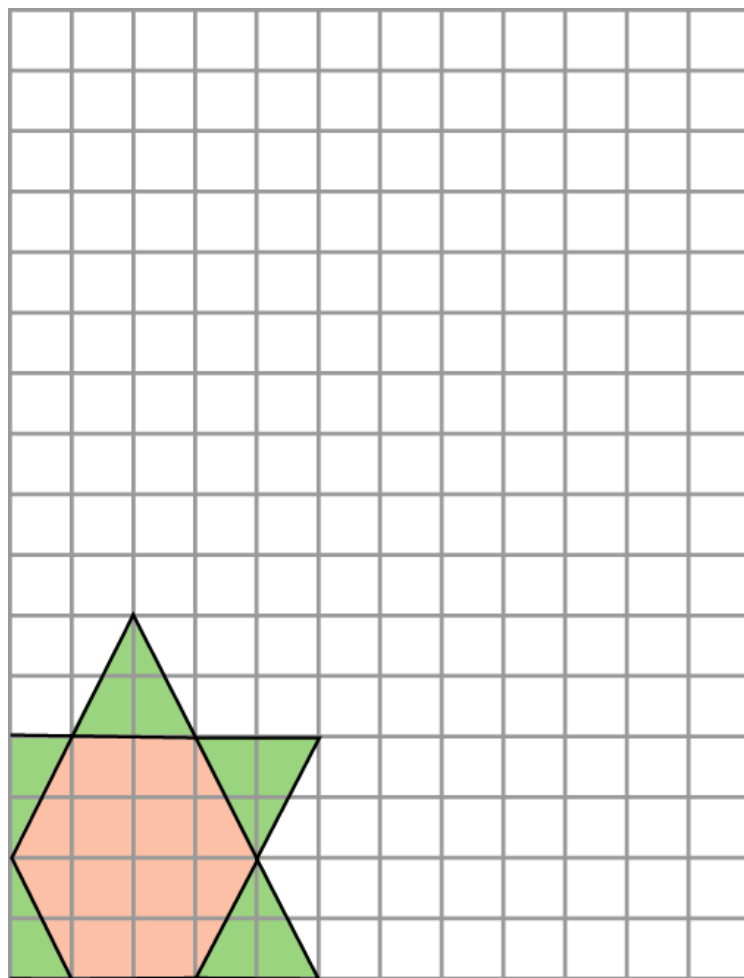
10. Изобразите паркет из квадратов и треугольников так, чтобы в каждой вершине сходилось два квадрата и три треугольника.



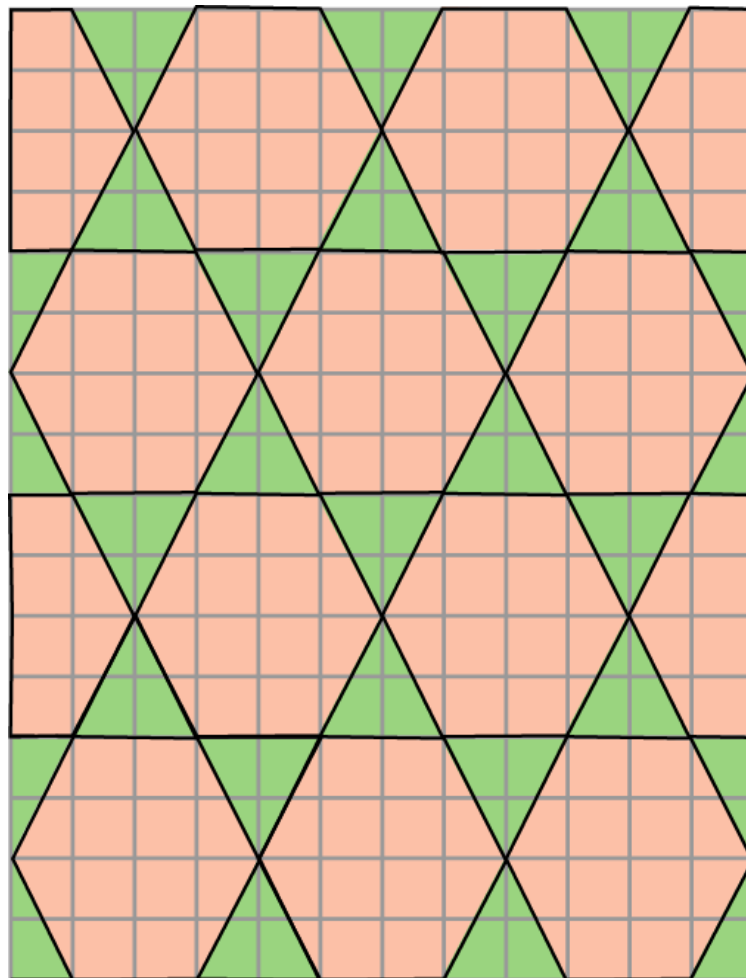
Ответ:



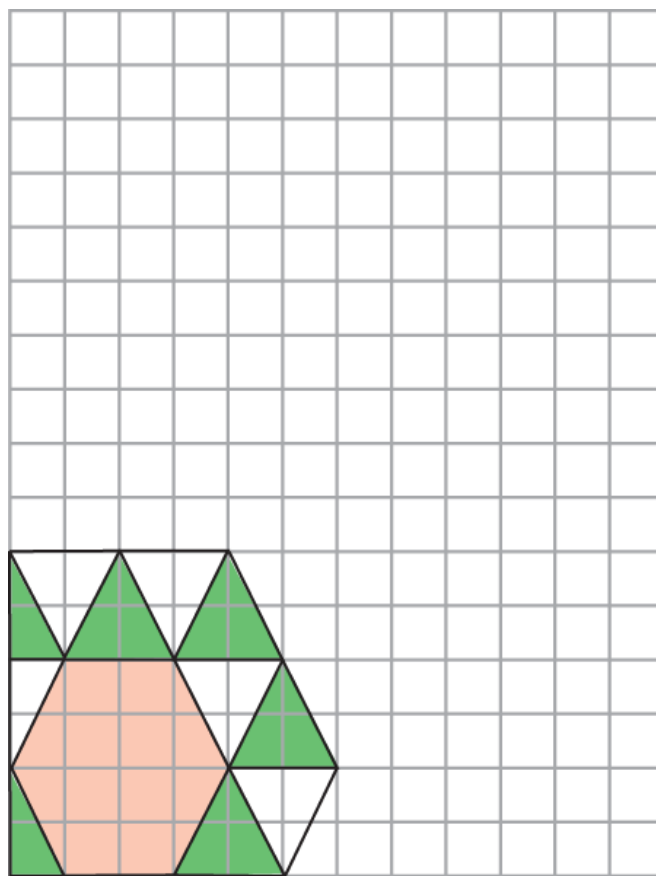
11. Продолжите составление паркета из шестиугольников и треугольников, равных данным, так, чтобы в каждой вершине сходилось два шестиугольника и два треугольника. Раскрасьте шестиугольники одним цветом, а треугольники – другим.



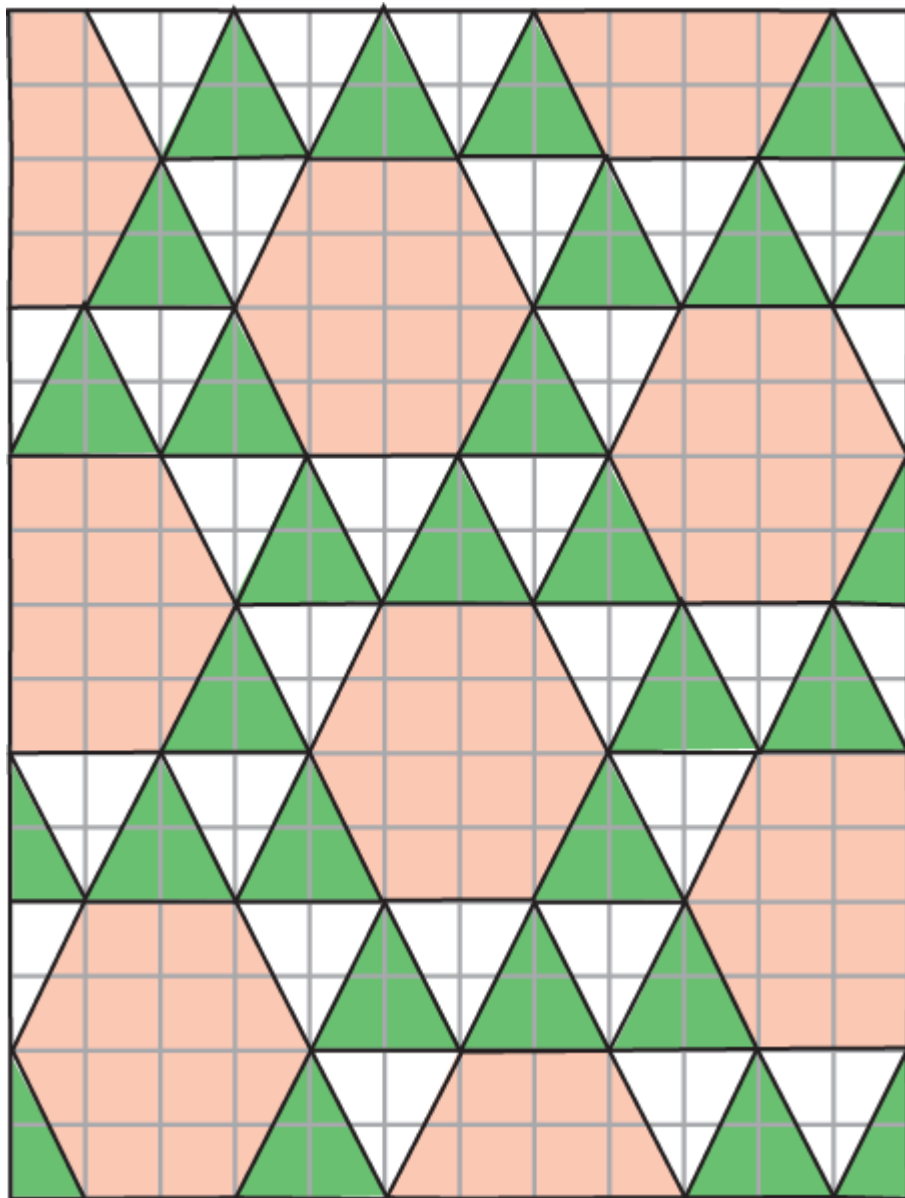
Ответ:



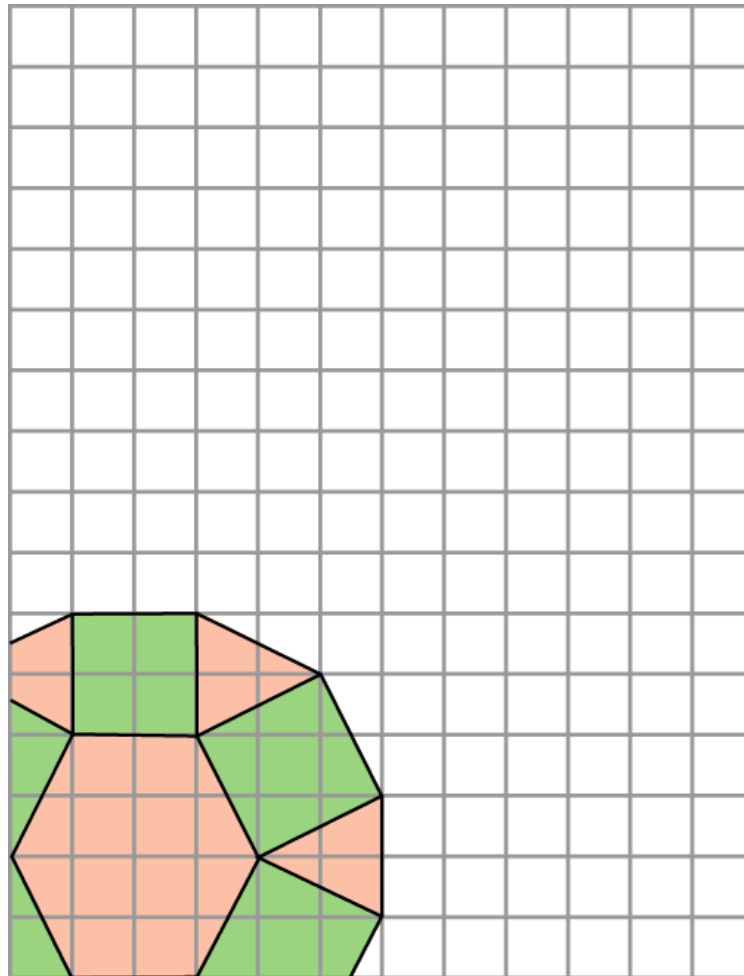
12. Продолжите составление паркета из шестиугольников и треугольников, равных данным, так, чтобы в каждой вершине сходилось два шестиугольника и два треугольника. Раскрасьте шестиугольники одним цветом, а треугольники – другим.



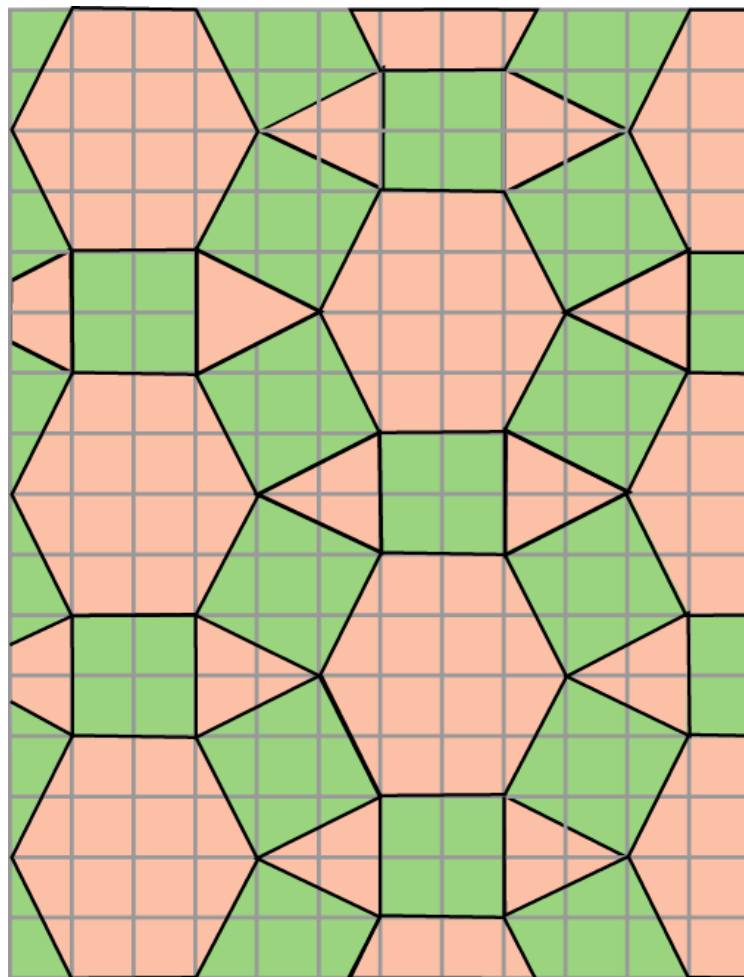
Ответ:



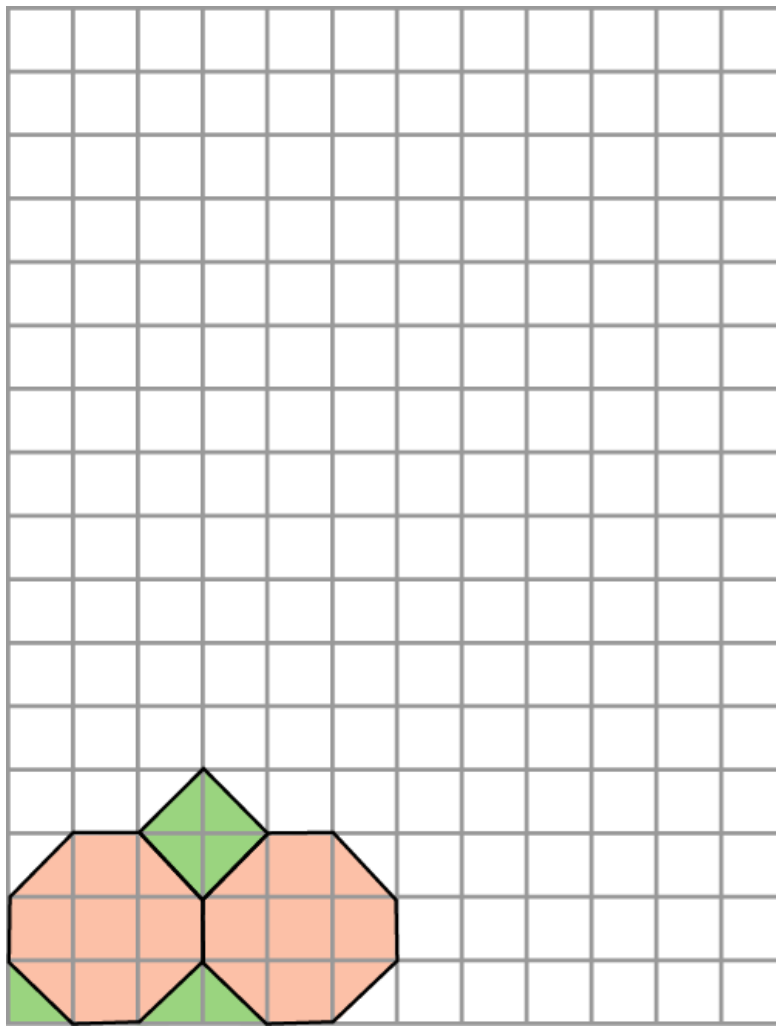
13*. Продолжите составление паркета из шестиугольников, квадратов и треугольников, равных данным, так, чтобы в каждой вершине сходились шестиугольник, два квадрата и треугольник. Раскрасьте шестиугольники и треугольники одним цветом, а квадраты – другим.



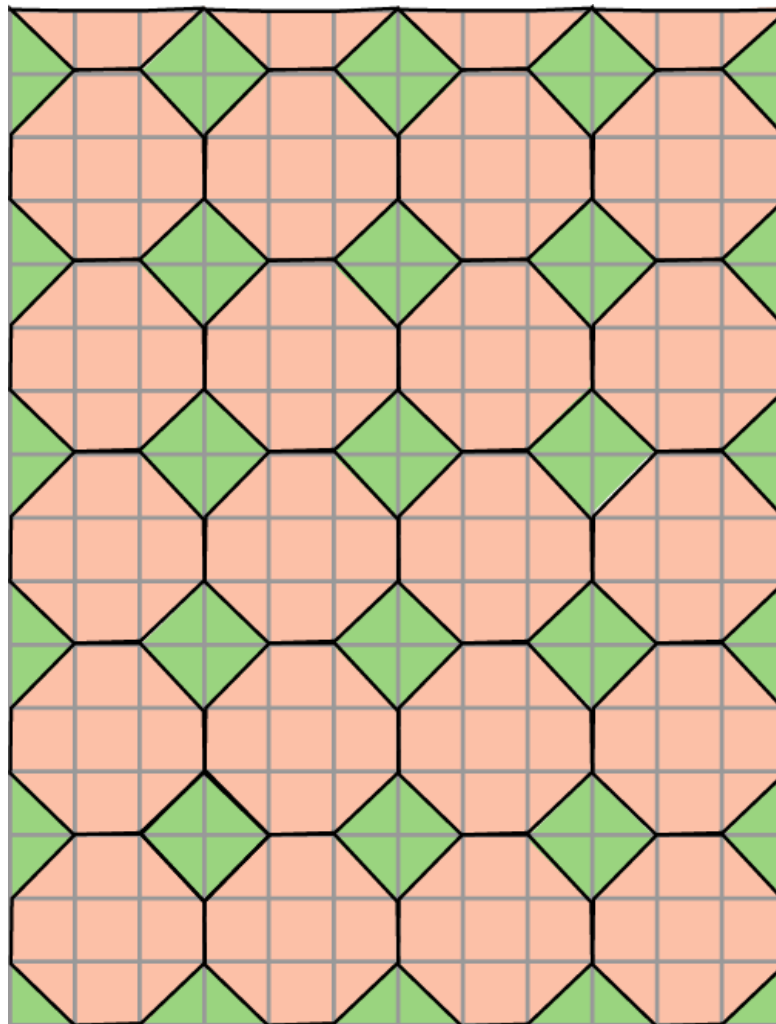
Ответ:



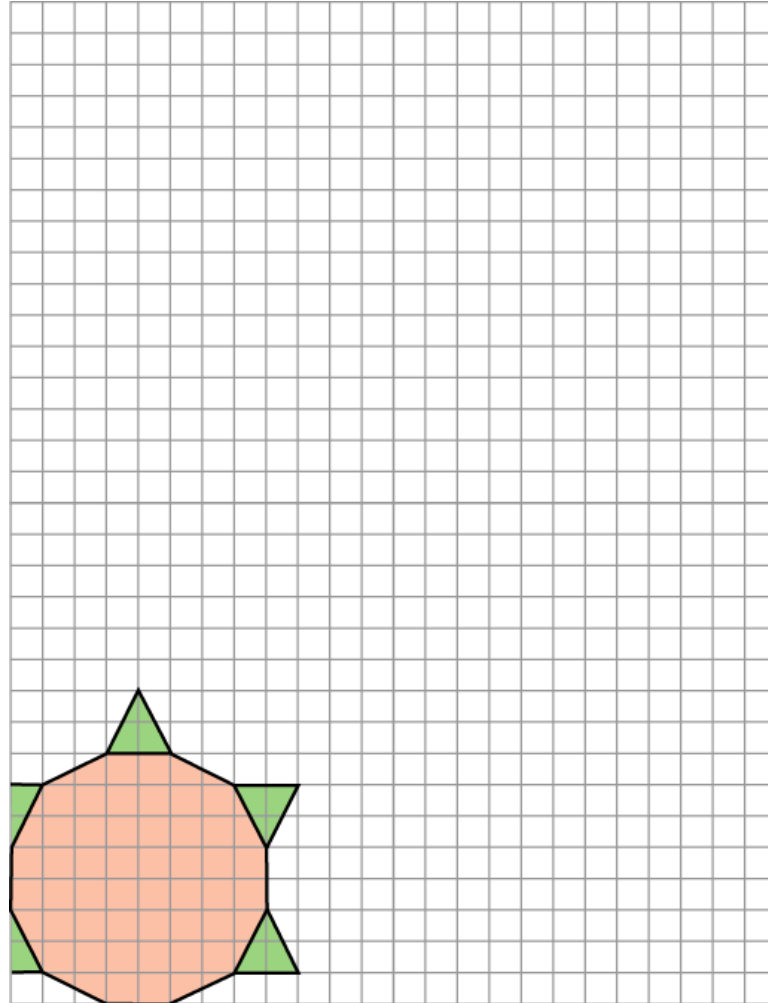
14. Продолжите составление паркета из восьмиугольников и квадратов, равных данным, так, чтобы в каждой вершине сходилось два восьмиугольника и один квадрат. Раскрасьте восьмиугольники одним цветом, а квадраты – другим.



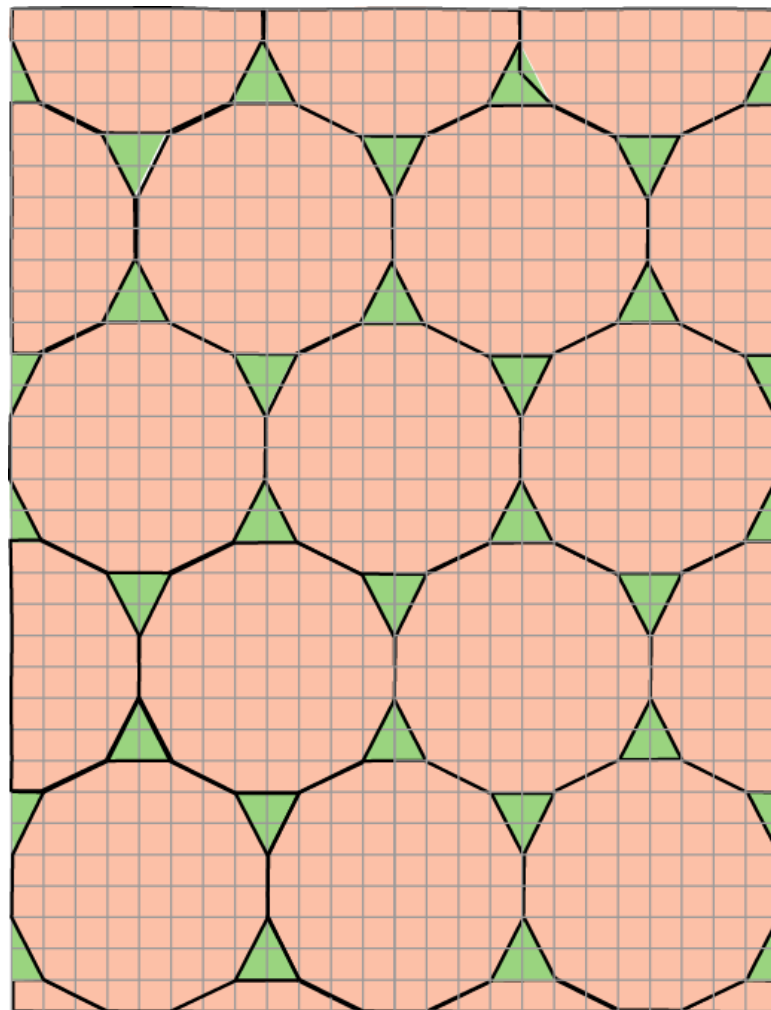
Ответ:



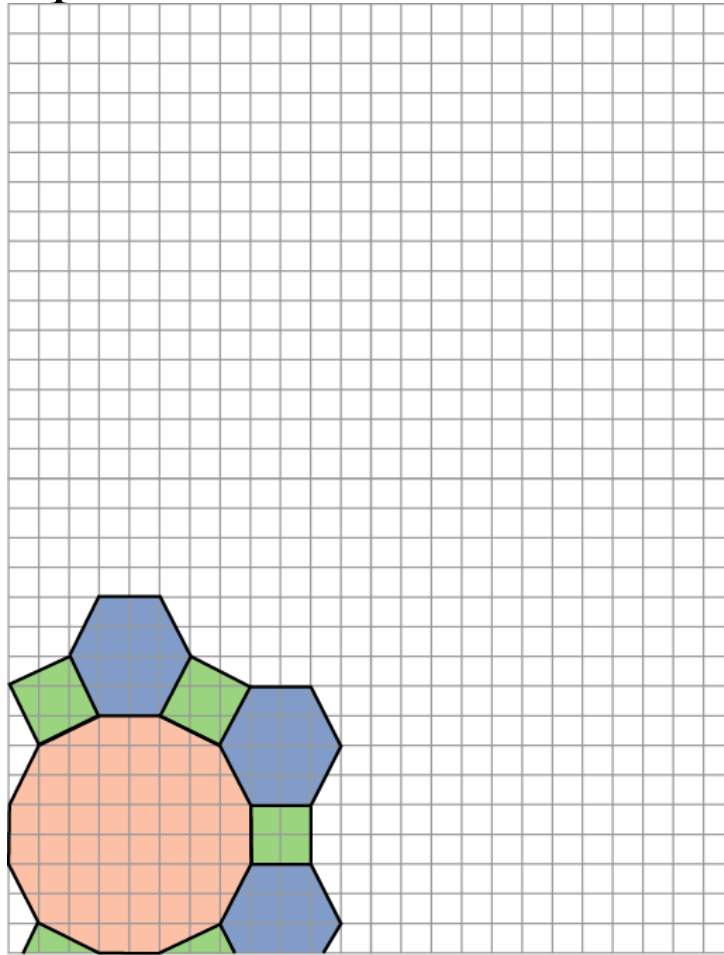
15*. Продолжите составление паркета из двенадцатиугольников и треугольников, равных данным, так, чтобы в каждой вершине сходилось два двенадцатиугольника и один треугольник. Раскрасьте двенадцатиугольники одним цветом, а треугольники – другим.

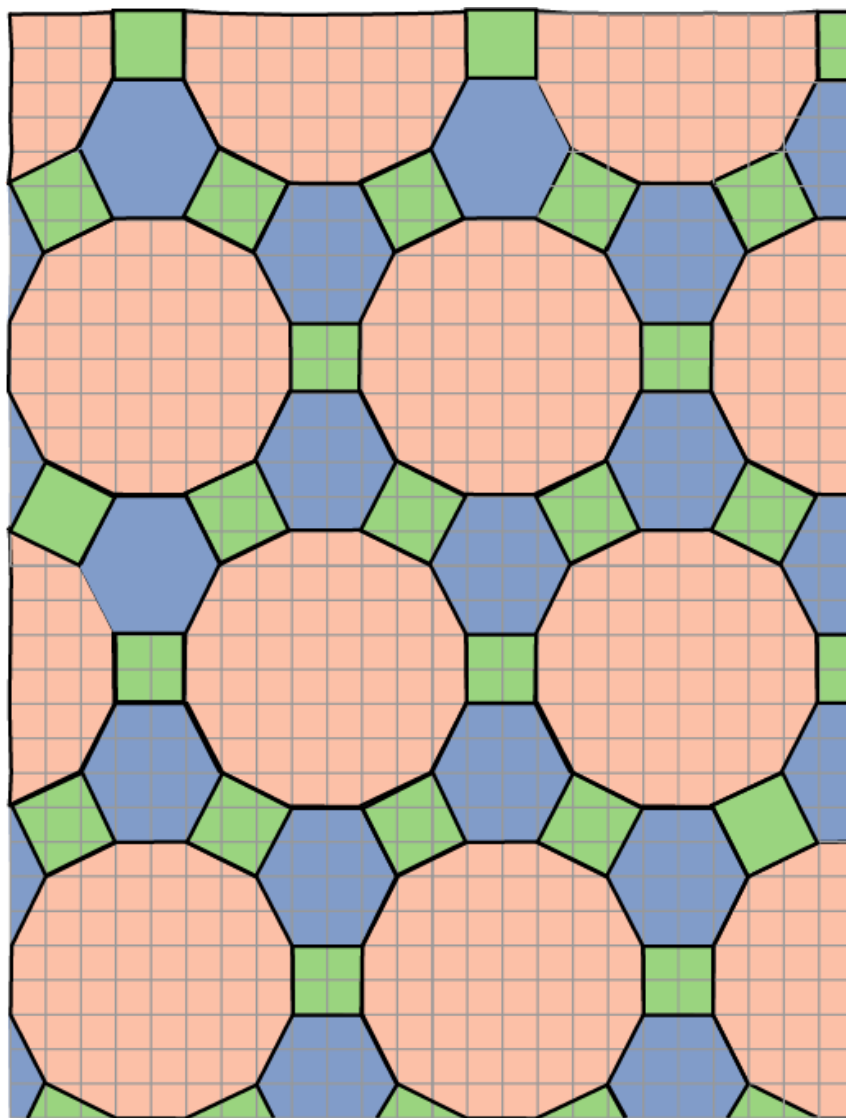


Ответ:



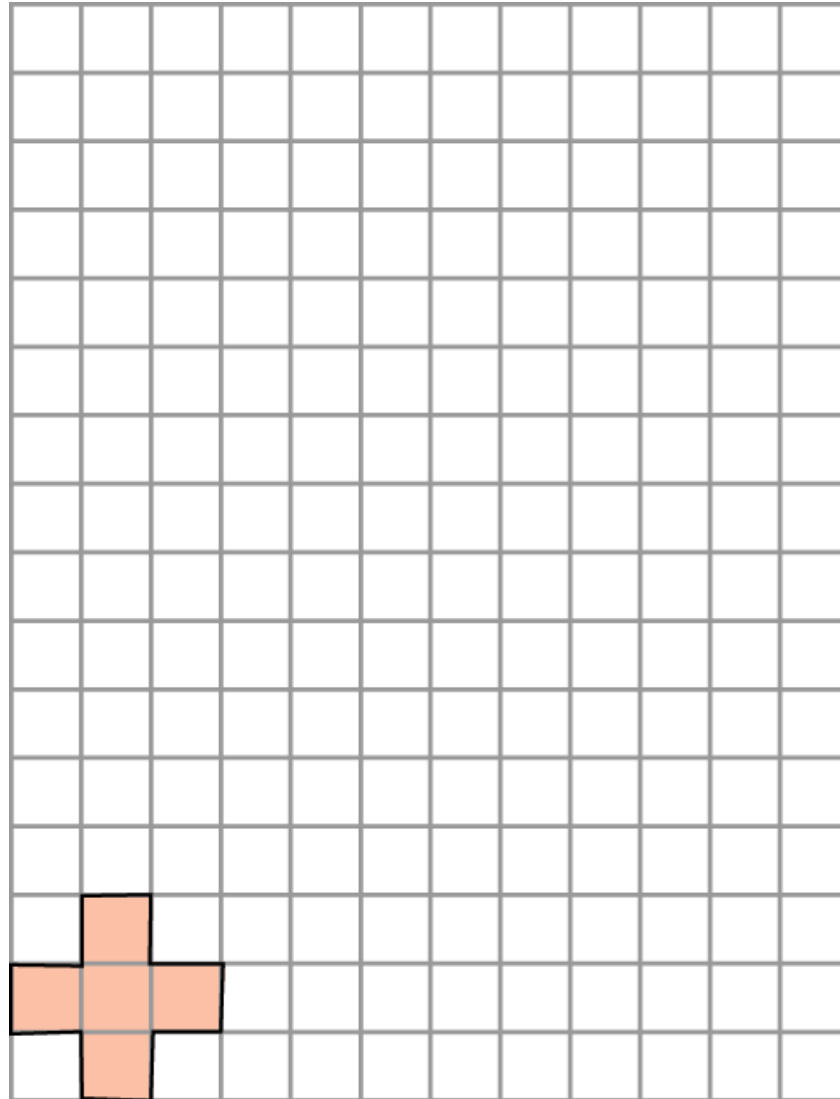
16*. Продолжите составление паркета из двенадцатиугольников, шестиугольников и квадратов, равных данным, так, чтобы в каждой вершине сходилось двенадцатиугольник, шестиугольник и квадрат. Раскрасьте двенадцатиугольники одним цветом, шестиугольники – другим, а квадраты – третьим.



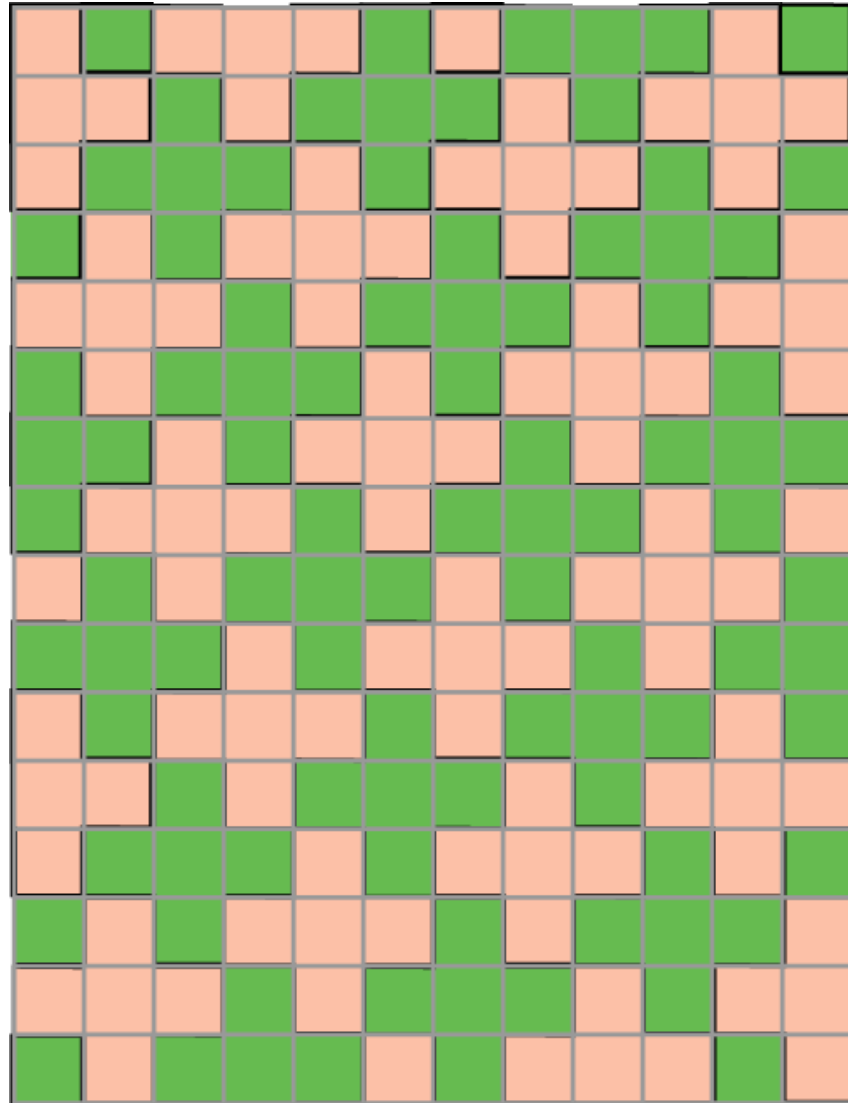


Ответ:

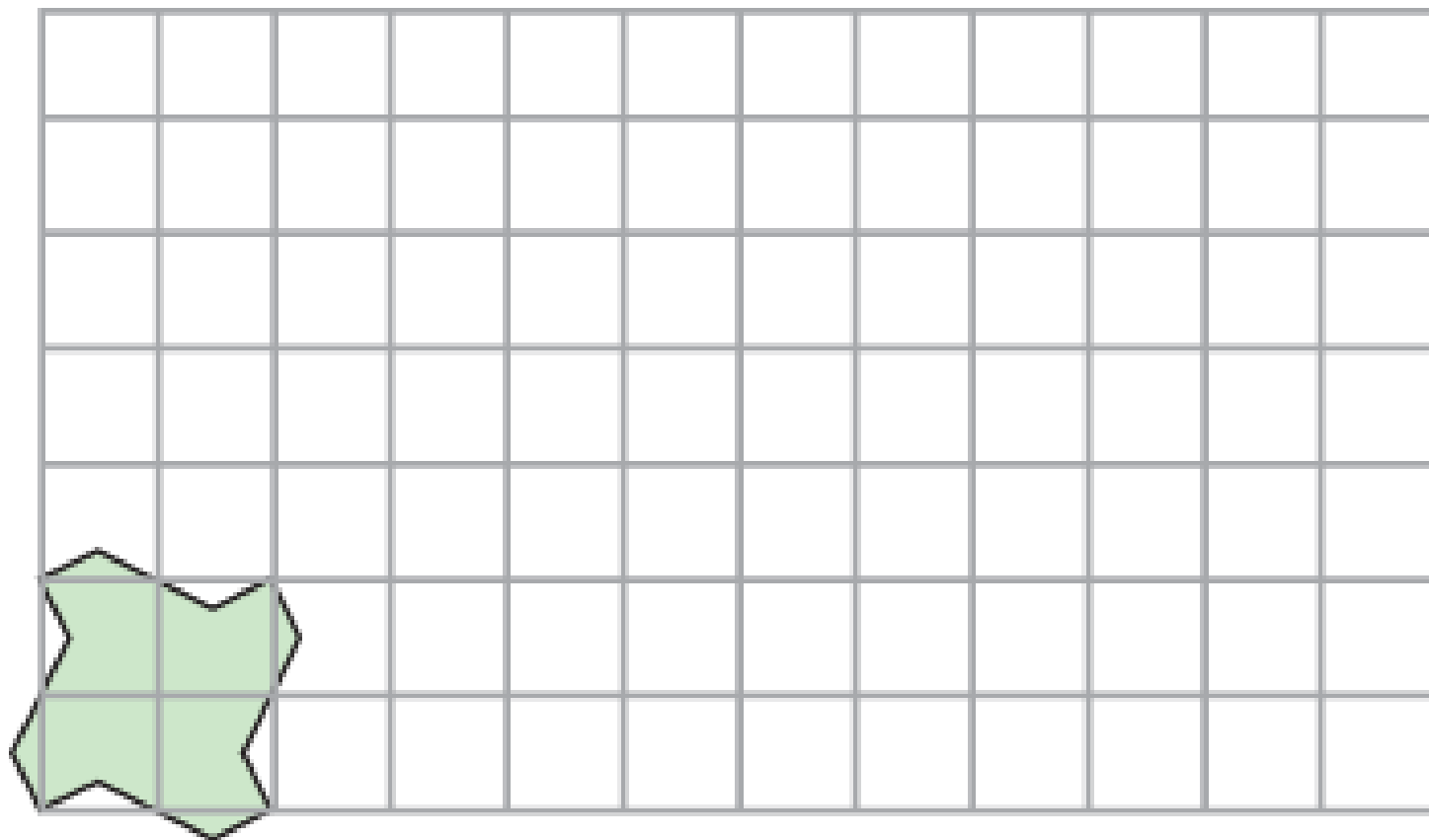
17. Заполните плоскость многоугольниками, равными данному. Раскрасьте многоугольники в два цвета так, чтобы соседние многоугольники были окрашены в разные цвета.



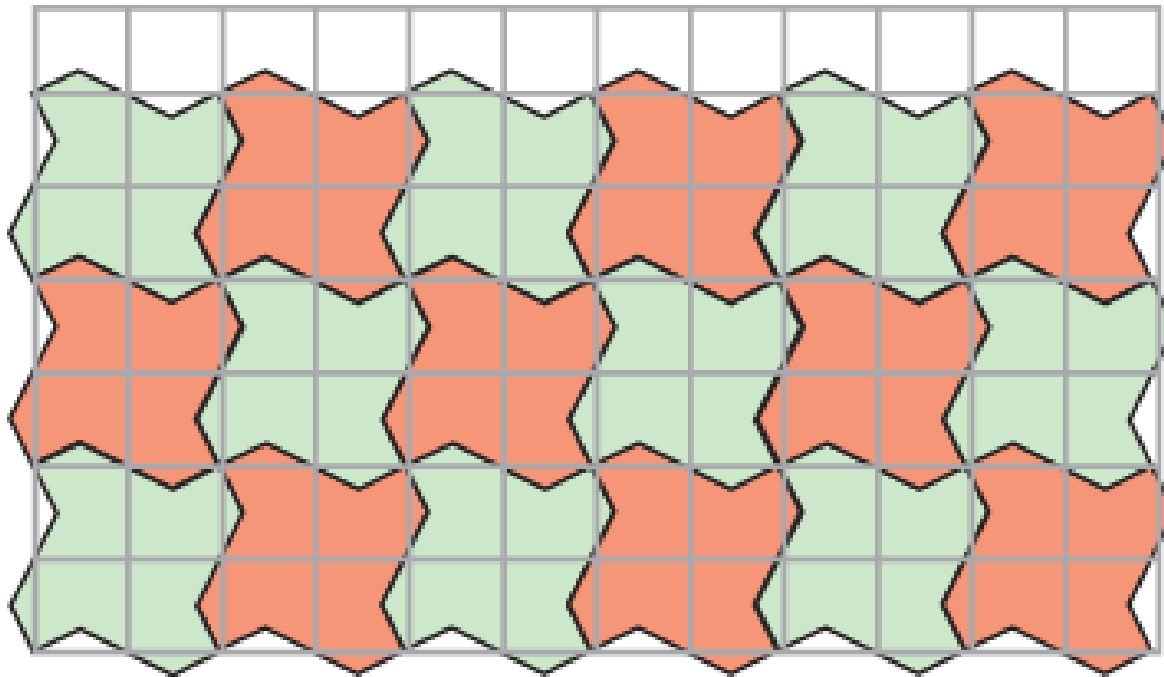
Ответ:



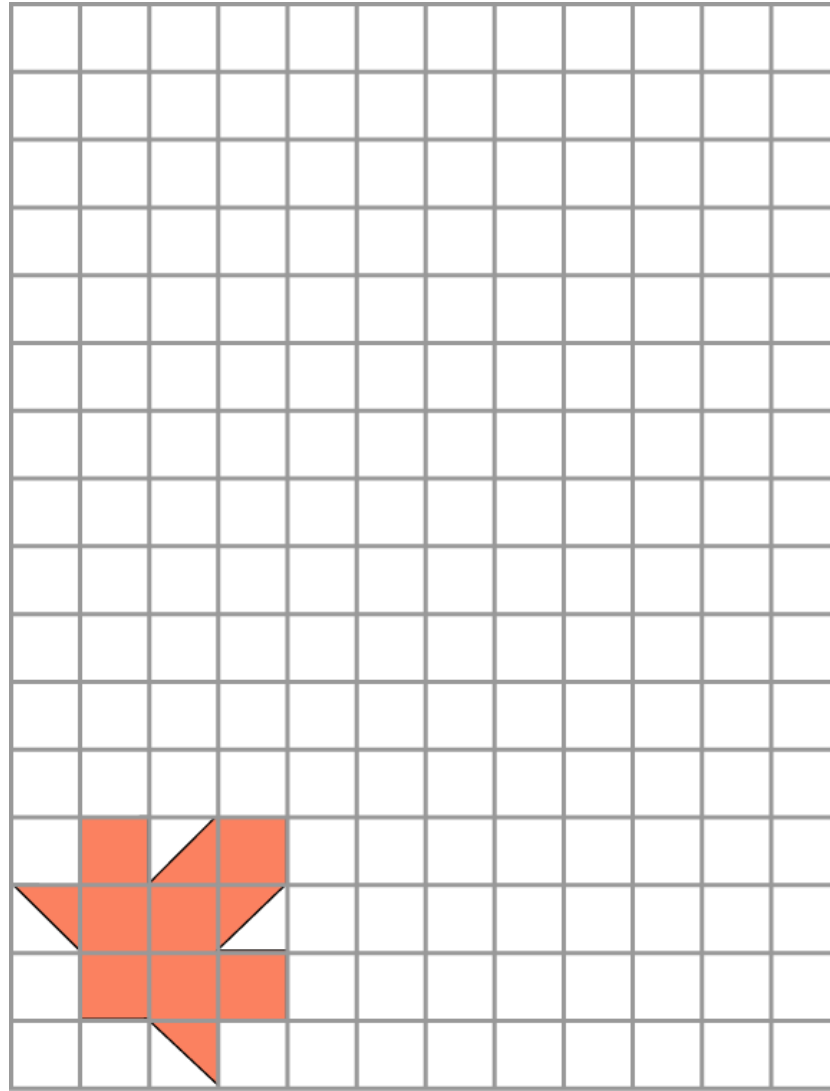
18*. Заполните плоскость многоугольниками, равными данному.
Раскрасьте многоугольники в два цвета так, чтобы соседние
многоугольники были окрашены в разные цвета.



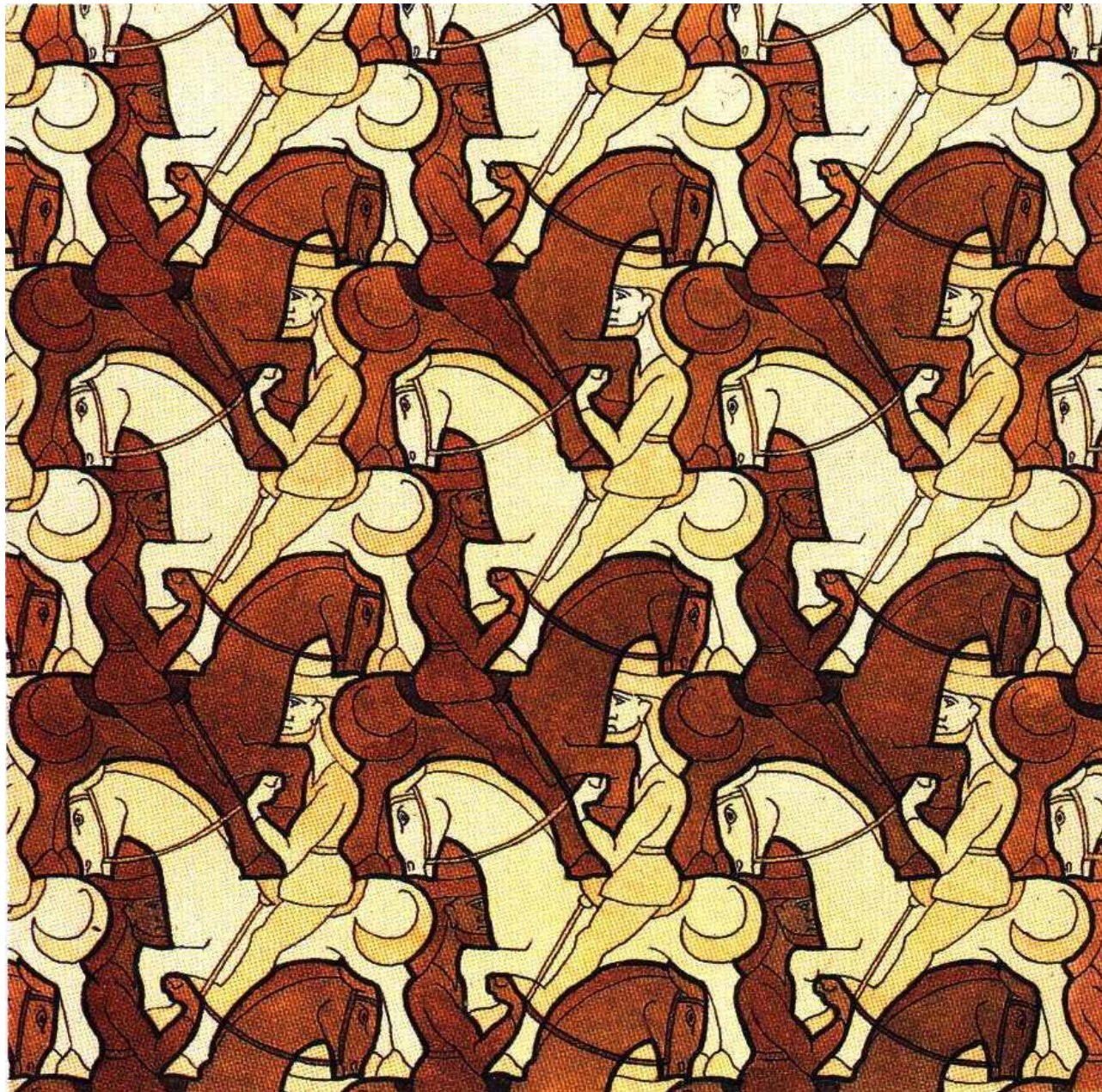
Ответ:



19*. Заполните плоскость многоугольниками, равными данному. Раскрасьте многоугольники в два цвета так, чтобы соседние многоугольники были окрашены в разные цвета.



Картины М. Эшера (Всадники)



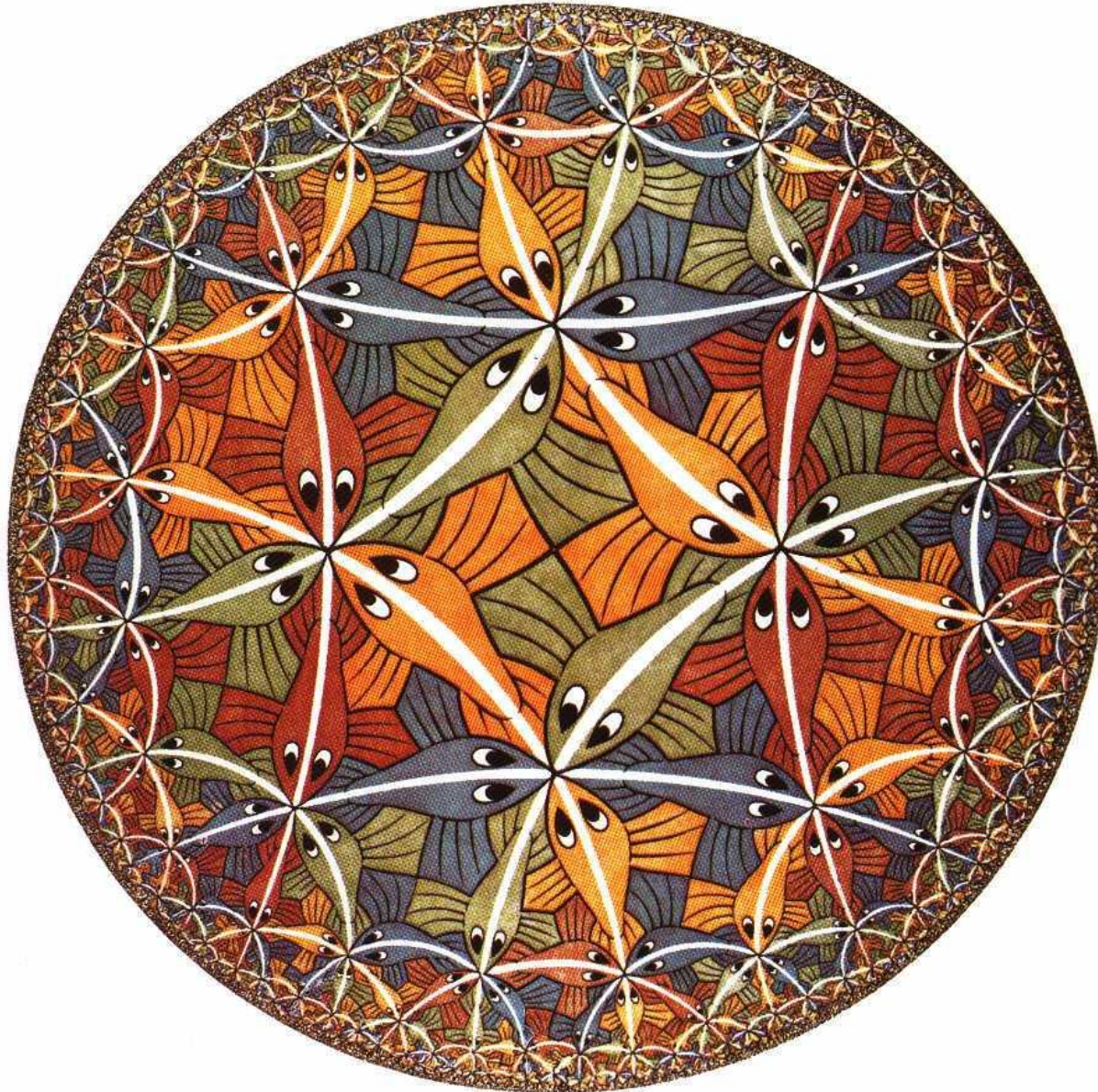
Картины М. Эшера (Птицы)



Картины М. Эшера (Ящерицы)



Картины М. Эшера (Круг)



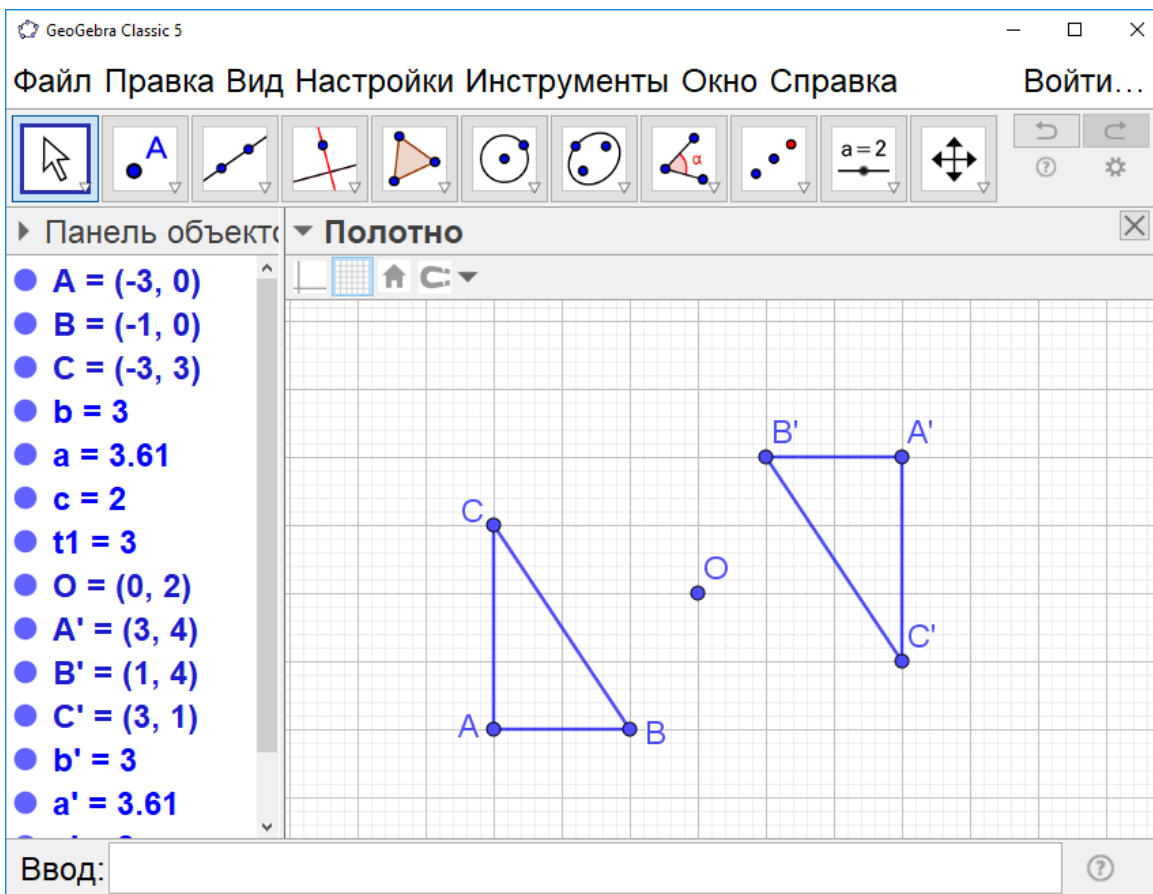
Программа GeoGebra это свободно распространяемая программа, которую можно скачать с официального сайта <http://geogebra.org>.

Она позволяет моделировать и решать различные алгебраические и геометрические задачи, строить графики функций, находить наибольшие и наименьшие значения, пределы, производные интегралы, получать изображения плоских и пространственных фигур, проводить дополнительные построения, создавать анимацию рисунков.

Кроме того, эта программа позволяет ставить геометрические опыты, проводить эксперименты, иллюстрировать формулы и теоремы, устанавливать зависимости между геометрическими величинами и мн. др.

Здесь мы рассмотрим возможности GeoGebra для использования её в обучении наглядной

Инструмент «Отражение относительно точки» позволяет получать изображения фигур, центрально-симметричных данным. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно указать фигуру и центр симметрии. На рисунке показан треугольник, полученный таким образом. Цвет, размеры вершин и сторон, а также их обозначения, можно изменять.



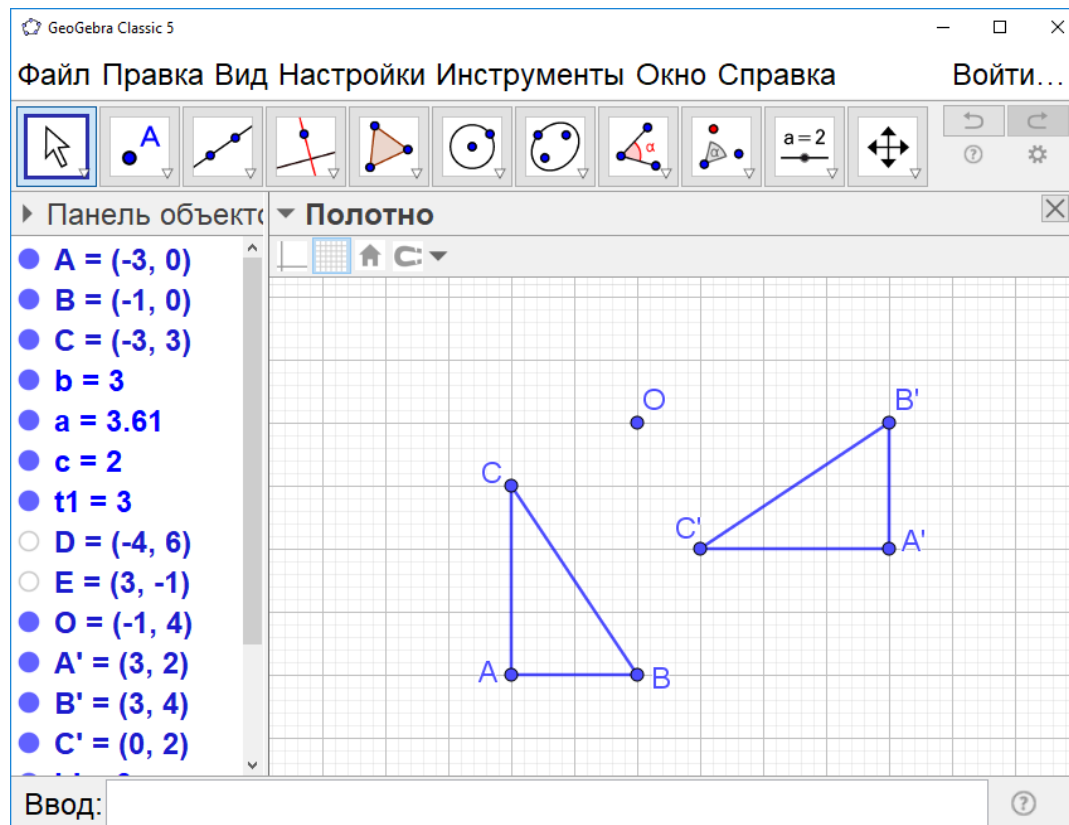
Инструмент «Отражение относительно прямой» позволяет получать изображения фигур, симметричных данным относительно данной прямой. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно указать фигуру и ось симметрии. На рисунке показан треугольник, полученный таким образом. Цвет, размеры вершин и сторон, а также их обозначения, можно изменять.

The screenshot shows the GeoGebra Classic 5 interface. The menu bar includes: Файл, Правка, Вид, Настройки, Инструменты, Окно, Справка, Войти... The toolbar contains various geometric tools, with the reflection tool (a square with a diagonal line) highlighted. The object panel on the left lists the following objects:

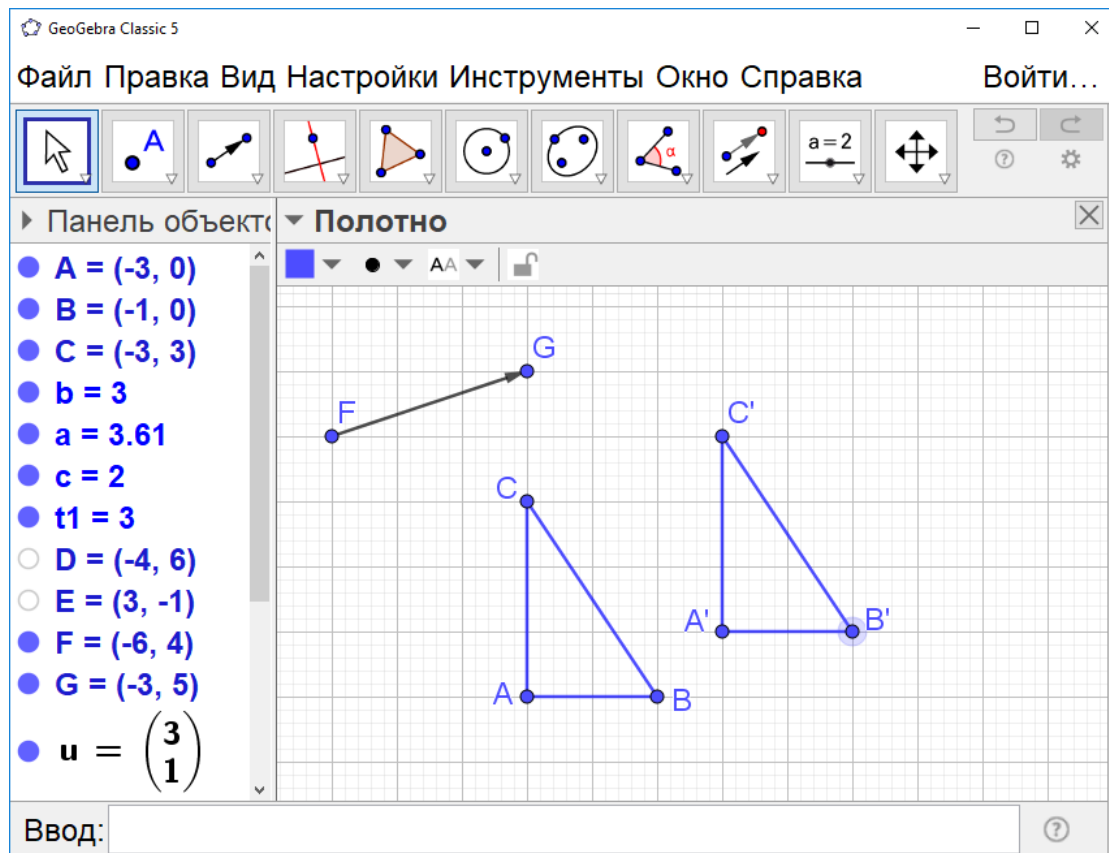
- A = (-3, 0)
- B = (-1, 0)
- C = (-3, 3)
- b = 3
- a = 3.61
- c = 2
- t1 = 3
- D = (-4, 6)
- E = (3, -1)
- f: $x + y = 2$
- A' = (2, 5)
- B' = (2, 3)
- C' = (-1, 5)

The main workspace shows a coordinate grid with a black line of reflection $f: x + y = 2$. A blue triangle with vertices A, B, and C is shown in the lower-left quadrant. Its reflection, a blue triangle with vertices A', B', and C', is shown in the upper-right quadrant. The vertices are labeled with blue dots and text. The reflection tool icon in the toolbar has a small 'a=2' label next to it.

Инструмент «Поворот вокруг точки» позволяет строить фигуру, полученную поворотом данной фигуры на данный угол. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно указать фигуру и центр поворота. В открывшемся окне указать величину угла и нажать “Enter”. На рисунке показан треугольник, полученный таким образом. Цвет, размеры вершин и сторон, а также их обозначения, можно изменять.



Инструмент «Параллельный перенос по вектору» позволяет строить фигуру, полученную параллельным переносом данной фигуры на данный вектор. Для этого нужно левой кнопкой мыши поочерёдно указать фигуру и вектор. На рисунке показан треугольник, полученный таким образом. Цвет, размеры вершин и сторон, а также их обозначения, можно изменять.



Используя центральную симметрию и параллельный перенос, можно строить различные паркетты. На рисунке показан паркет из четырёхугольников, полученный таким образом. Цвет, размеры вершин и сторон, а также их обозначения, можно изменять.

