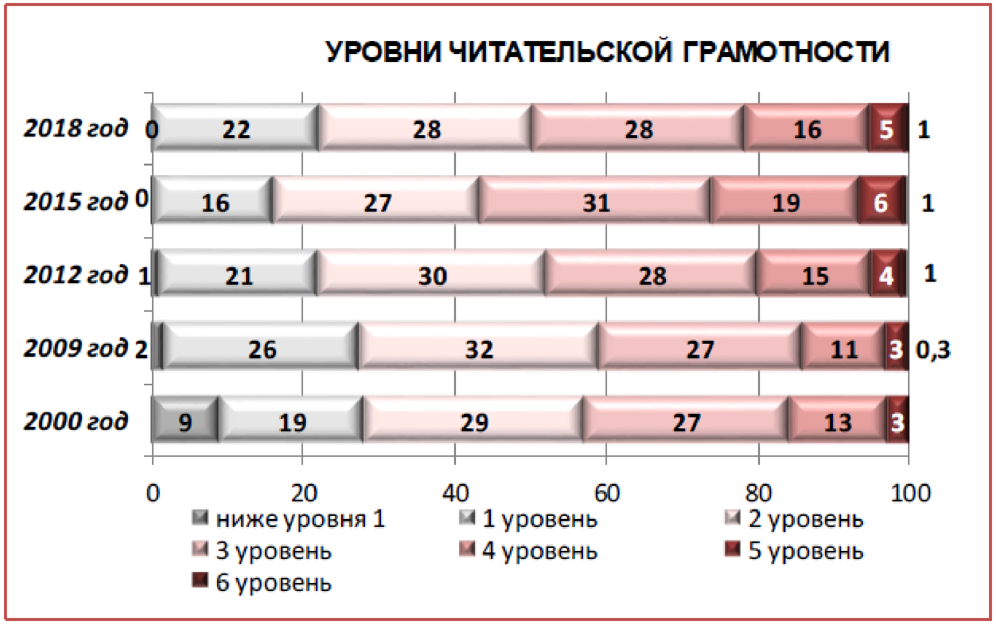
Геометрия.
Решение задач по теме "Треугольники"

Сафонова Наталья Васильевна

автор УМК «Геометрия 7-9»,
ведущий методист
ГК «Просвещение»

2020



PISA - 2018

Самые высокие уровни читательской грамотности (5 и 6 уровни по шкале PISA) показали 6% российских учащихся

8,1% российских учащихся обладают высоким уровнем математической грамотности (5-6-й уровень). Они могут осмыслить, обобщить и использовать информацию, полученную ими на основе исследования и моделирования сложных проблемных ситуаций. Они могут использовать информацию из разных источников, представленную в различной форме

PISA - 2018

Читательская грамотность –

31.	Российская Федерация	479	▼
32.	Италия	476	▼

Математическая грамотность –

28.	Португалия	492	23-31
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
30.	**Российская Федерация**	**488**	**27-35**
31.	Италия	487	28-35

Без читательской грамотности невозможно формировать математическую грамотность

Новая завершённая линия учебников Геометрия 7 – 9

Авторы: **Берсенев А.А., Сафонова Н.В.**

Номер в ФПУ:

7 кл – 1.1.2.4.3.2.1

8 кл. – 1-1.2.4.3.2.2

8 кл. – 1-1.2.4.3.2.3

Шлейф УМК «Геометрия 7-9»

Тетрадь-тренажёр

Тетрадь-экзаменатор

Поурочные методические рекомендации

Задачник

Геометрия в компьютерной среде

Система заданий тетради-тренажёра способствует эффективному формированию функциональной грамотности

Каждая глава содержит рубрики

Работаем с текстом

Работаем с моделями

Анализируем и рассуждаем

Применяем геометрию

Выполняем тест

В каждой главе есть серия заданий, *специально* предназначенная для работы с текстом, которая включает разнообразные задания и предусматривает различные виды деятельности

Упражнения на освоение терминологии

1. Освоение терминологии.

2. Формирование умения читать чертеж.

12 Изобразите треугольник MOP.

1. Укажите:

угол, противолежащий стороне MO: ____________

угол, противолежащий стороне MP: ____________

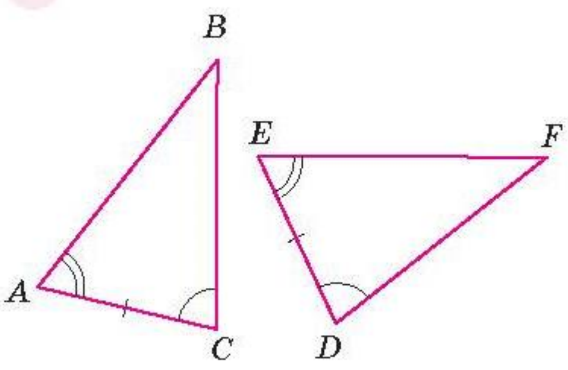
углы, прилежащие к стороне OP: ____________

углы, прилежащие к стороне OM: ____________

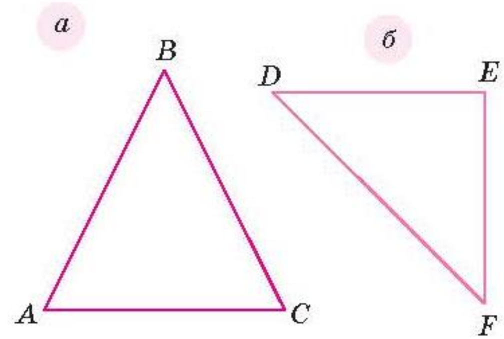
углы, прилежащие к стороне PM: ____________

Известно, что треугольники равны. Запишите равенство соответствующих элементов этих треугольников.

а



17 1. На рисунках изображены равнобедренные треугольники. В каждом случае запишите:



а) основание треугольника: ___________

боковые стороны: ___________

угол, противоположный основанию: ___________

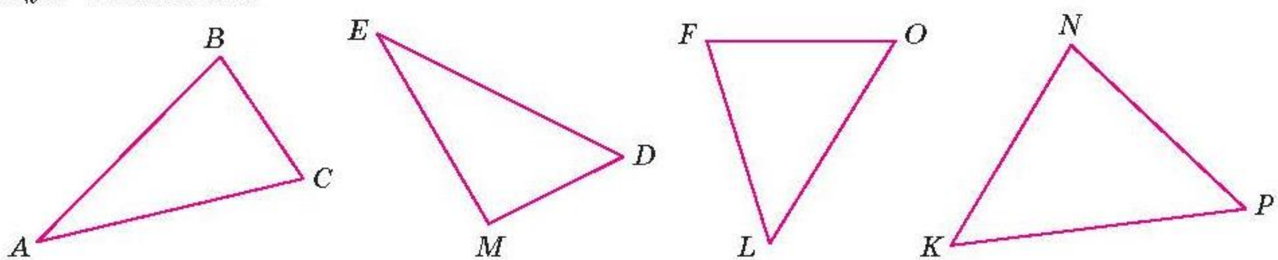
б) основание треугольника: ___________

боковые стороны: ___________

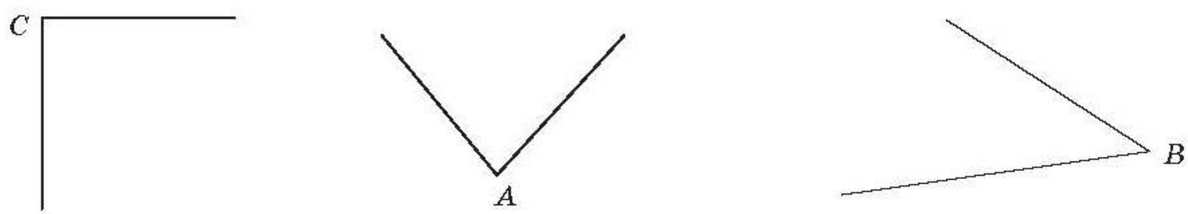
углы при основании: ___________

угол, противоположный основанию: ___________

2. Среди представленных на рисунке треугольников выберите равнобедренные. Выделите цветом основание равнобедренного треугольника и вершину, противолежащую основанию.



18 Постройте какой-нибудь равнобедренный треугольник, для которого данный угол является углом, противолежащим основанию треугольника.



РАБОТАЕМ С ТЕКСТОМ

п. 2.1

1 1. Прочитайте текст учебника на с. 55 и ответьте на вопросы.

Какую геометрическую фигуру представляет собой:

а) биссектриса треугольника: ______________________________,

её особенности: ______________________________.

отличие от биссектрисы угла: ______________________________

б) медиана треугольника: ______________________________,

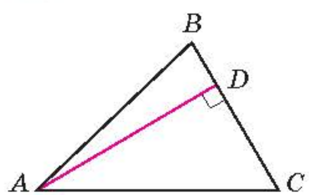
её особенности: ______________________________.

в) высота треугольника: ______________________________,

её особенности: ______________________________.

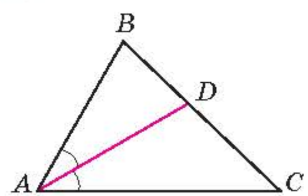
2. Под каждым рисунком подпишите, чем является отрезок AD в треугольнике.

а



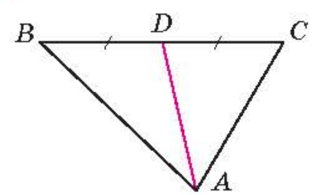
____

б



____

в



____

2 Составьте верное утверждение.

а) Можно утверждать, что AD — биссектриса треугольника ABC, если:

1. $BD = DC$ 2. $\angle BAD = \angle CAD$ 3. $\angle BDA = \angle CDA$

б) Можно утверждать, что AM — медиана треугольника ABC, если:

1. $AB = AC$ 2. $AM = MC$ 3. $BM = MC$

в) Можно утверждать, что AH — высота треугольника, если:

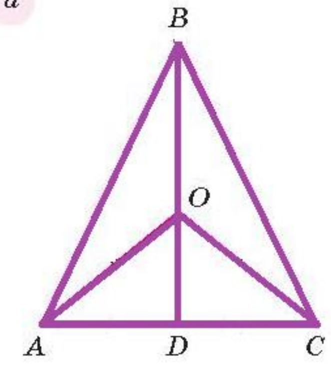
1. $\angle BAC = 90^\circ$ 2. $\angle AHB = \angle AHC$ 3. $\angle ABC = 90^\circ$

Читаем чертёж. Это важно!

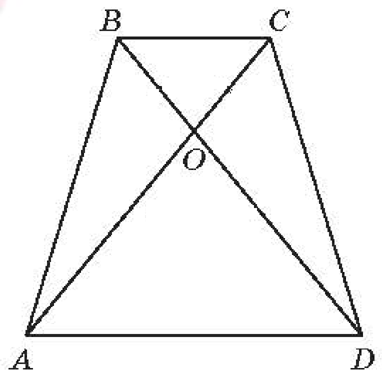
7 класс

Сколько треугольников изображено на рисунке?

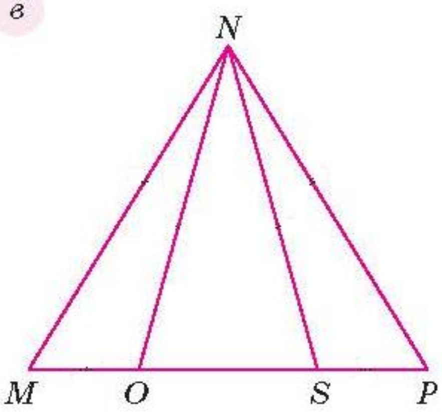
а



б

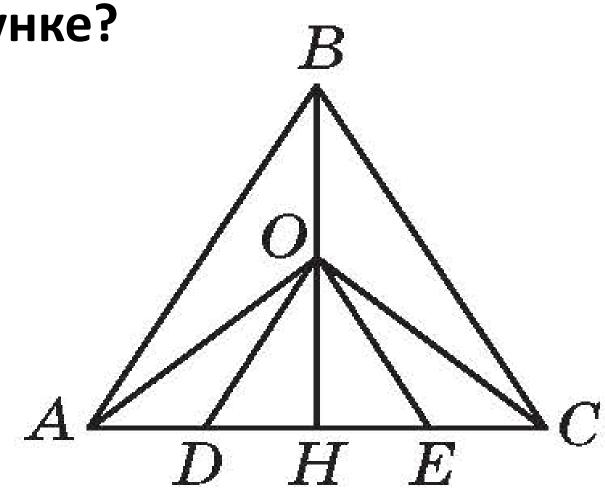


в



«Геометрия. 7 класс» - А.А. Берсенев, Сафонова Н.В., «Геометрия 7 класс» - Л.С. Атанасян и др. Глава II. Треугольники

Сколько треугольников изображено на рисунке?



Сколько треугольников изображено на рисунке?

***Ответ*: 15 треугольников.**

5 треугольников с вершиной *B*:

Δ *ABH*, Δ *ABC*, Δ *ABO*, Δ *BCH*, Δ *BCO.*

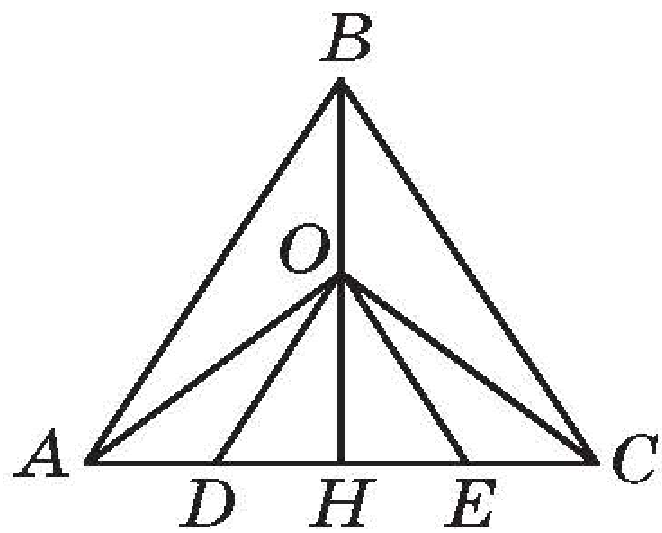
10 треугольников с вершиной *O:*

Δ *AOD*, Δ *AOH*, Δ *AOE*, Δ *AOC*,

Δ *DOH*, Δ *DOE*, Δ *DOC*,

Δ *HOE*, Δ *HOC*,

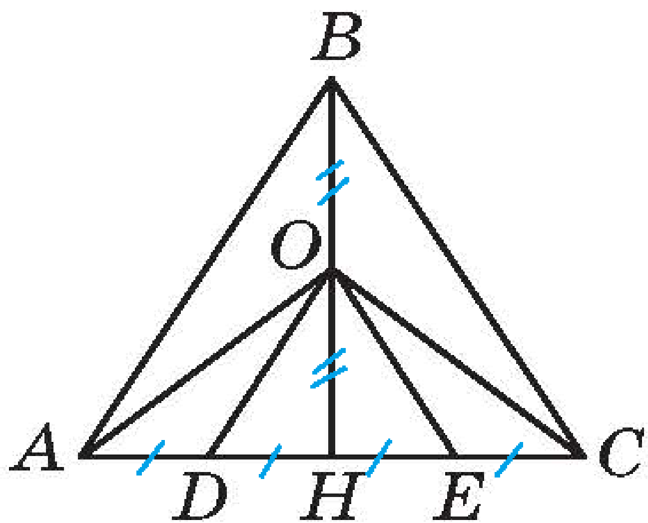
Δ *EOC.*



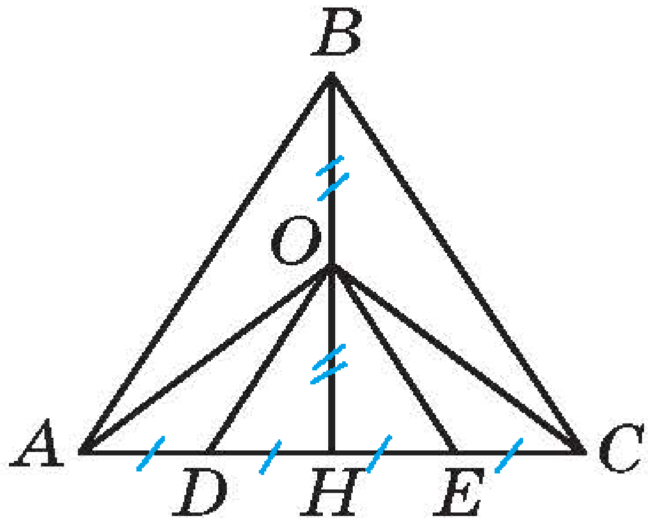
Читаем чертёж. Это важно!

7 класс

Известно, что $AD = DH = HE = EC$, $BO = OH$. Укажите как можно больше пар - треугольник и его медиана.



Известно, что *AD = DH = HE = EC, BO = OH.* Укажите как можно больше пар – треугольник и его медиана.



Ответ:

1. Δ *ABC* – медиана *BH (AH = HC).*
2. Δ *AOC* – медиана *OH (AH = HC).*
3. Δ *DOE* – медиана *OH (DH = HE).*
4. Δ *AOH* – медиана *OD (AD = DH).*
5. Δ *HOC* – медиана *OE (HE = EC).*
6. Δ *ABH* – медиана *AO (BO = OH).*
7. Δ *HBC* – медиана *CO (BO = OH).*

Система заданий и приёмы работы с текстом задачи

На рисунке отрезок AB — диаметр окружности с центром O. Используя данные рисунка, докажите, что $CD = \frac{1}{2}AB$, и найдите периметр треугольника AOC, если радиус окружности равен 4,5 см.

Дано: ______________________________

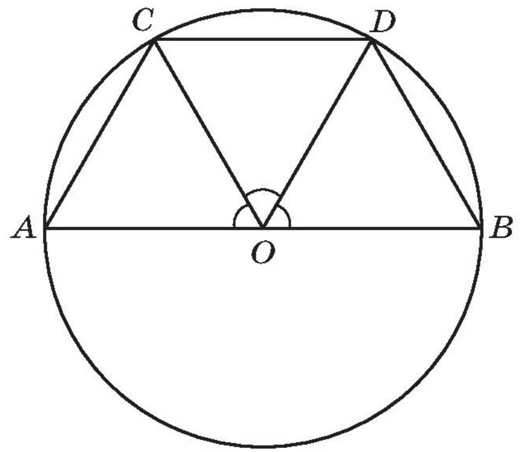
____

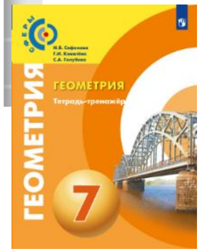
Найти: ______________________________

Решение. ______________________________

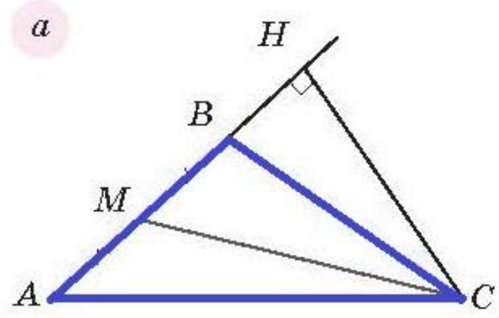
____

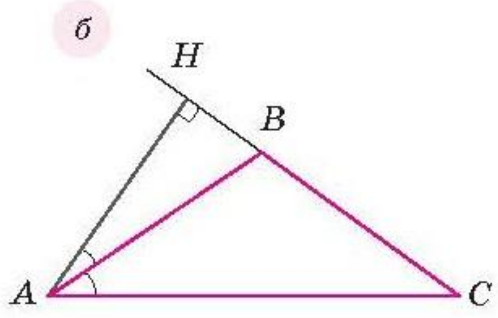
______________________________ Ответ: ______________

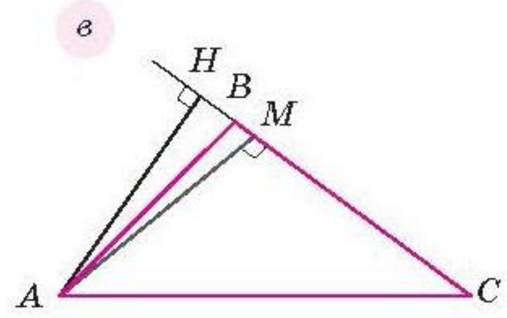




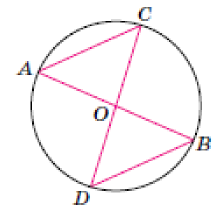
Рассмотрите рисунки и укажите, какая конструкция невозможна.



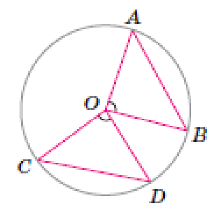




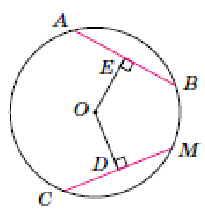
16 AB и CD диаметры окружности с центром O.
Какие геометрические фигуры равны?



17 Углы AOB и COD равны.
Сравните хорды AB и CD.



18 1. *Дано*: $AB = CM$, $OE \perp AB$, $OD \perp CM$.



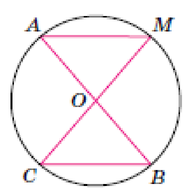
Докажите: $OE = OD$.

Доказательство.

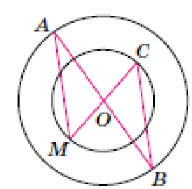
2. Сформулируйте текст задачи.

19 AB и CM — диаметры окружности. Докажите, что $AM \parallel BC$.

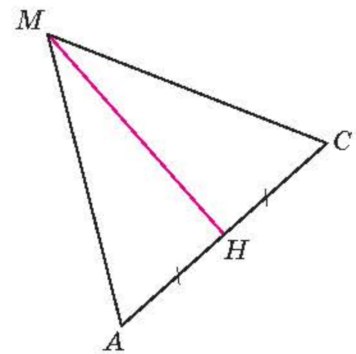
а



б



Треугольник AMC — равнобедренный с основанием AC и биссектрисой MH.
Запишите свойства этого треугольника.



____

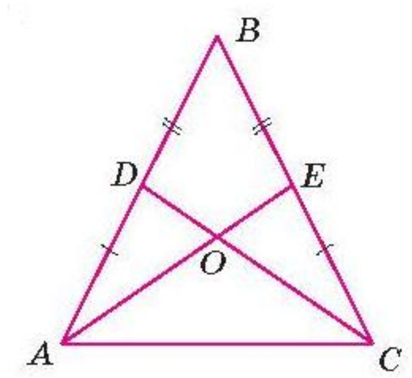
____

____

____

Сколько свойств вы отметили? ______________

Используя данные рисунка, докажите, что треугольник *AOC* – равнобедренный.



Дано:
AD = CE, BD = BE.
Доказать:
ΔAOC – равнобедренный.

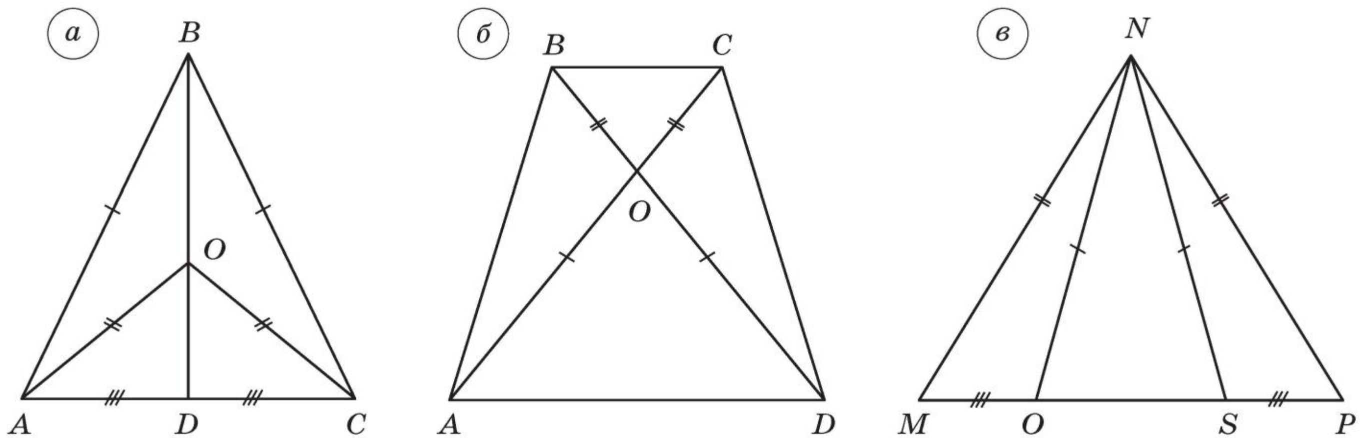
Доказательство.

1. Рассмотрим треугольники *ABE* и *CBD*.

Имеем: AB = AD + DB = CE + BE = DC (так как *AD = CE, BD = BE* по условию),
BD = BE по условию, $\angle B$ – общий. Значит $\Delta ABE = \Delta BCD$ по двум сторонам и углу между ними.
Отсюда *AE = DC* как соответствующие элементы в равных треугольниках.

2. Рассмотрим треугольники *ACE* и *CAD*.
Имеем: *AD = CE* по условию, *AE = DC* по доказанному в п.1, *AC* – общая. Значит
$\Delta ACE = \Delta CAD$ по трём сторонам. Отсюда $\angle ACD = \angle CAE$. А тогда ΔAOC – равнобедренный по признаку.

55 По данным чертежа в каждом случае укажите как можно больше равных треугольников и докажите их равенство.

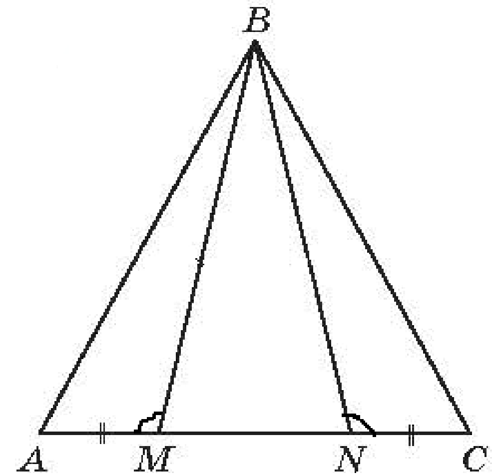


а) ____

____

Используя данные чертежа, докажите, что:

а) $\Delta ABN = \Delta MBC$; б) ΔABC – равнобедренный.



Дано:
ΔABC, $AM = CN$, $\angle AMB = \angle CNB$.
Доказать:
а) $\Delta ABN = \Delta MBC$;
б) ΔABC – равнобедренный.

Решение: а).

1. $\angle AMB = \angle CNB$, значит и $\angle BMN = \angle BNM$ как смежные с равными. Тогда ΔMBN – равнобедренный с основанием MN по признаку. Отсюда $BM = BN$ как боковые стороны равнобедренного треугольника.
2. Рассмотрим ΔABN и ΔMBC: $AN = AM + MN = MN + NC = MC$; $BM = BN$ по доказанному; $\angle CMB = \angle ANB$ - значит $\Delta ABN = \Delta MBC$ по первому признаку равенства треугольников.

Решение: б).

1. $\Delta ABN = \Delta MBC$, отсюда $AB = BC$, тогда ΔABC – равнобедренный с основанием AC по определению.

ПРОСВЕЩЕНИЕ

а) На биссектрисе BD треугольника ABC отметили точку M. Известно, что отрезок MD — высота треугольника AMC.

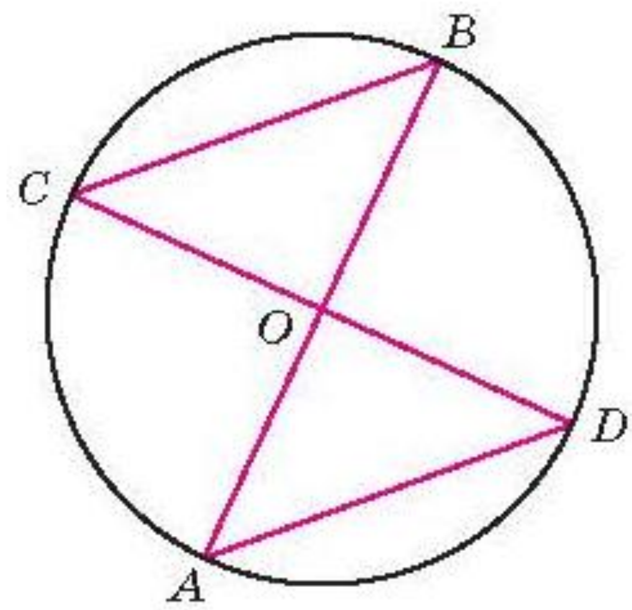
1) Докажите, что треугольник AMC — равнобедренный.

2) Найдите AC, если $DC = 3{,}8$ см.

б) На медиане BM треугольника ABC отметили точку O. Известно, что $OA = OC$, $AB = 7$ см. Найдите BC.

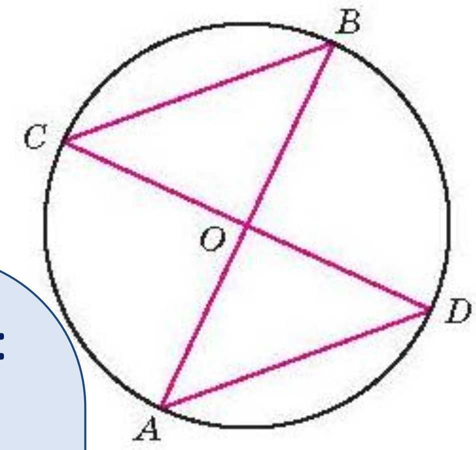
Система заданий и приёмы работы

Известно, что точка *О* – центр окружности.
Укажите как можно больше фактов, исходя из данных чертежа.



«Геометрия. 7 класс» - А.А. Берсенев и др., «Геометрия 7-9» - Л.С. Атанасян и др. Глава II. Треугольники

Известно, что точка *O* – центр окружности. Укажите как можно больше фактов, исходя из данных чертежа.



Из того, что точка *O* – центр окружности следует, что:

1. *OB, OC, OA,* и *OD* – радиусы окружности, значит

2. *OB = OC = OA = OD;*

2. *AB* и *CD* – диаметры окружности, *значит AB = CD.*

3. Из п. 1 следует, что ΔAOD *и* ΔBOC – равнобедренные с основаниями *BC* и *AD.*

4. Из п. 3 следует, что $\angle A = \angle D$, а $\angle C = \angle B$.

5. $\angle COB$ и $\angle DOA$ – вертикальные, значит $\angle COB = \angle DOA$.

6. Из п. 3 и 5 следует, что $\Delta AOD = \Delta BOC$ по 1 признаку.

7. Из п. 6 следует, что *BC = AD.*

8. Из п. 6 и 4 следует, что $\angle A = \angle D = \angle C = \angle B$.

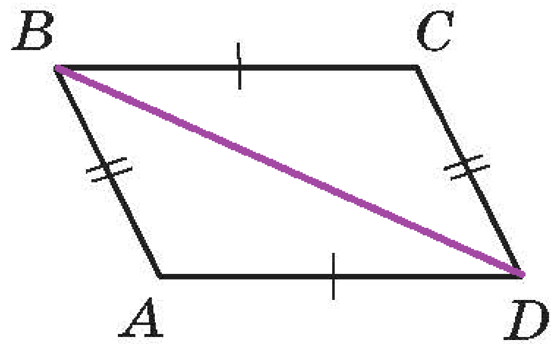
7 класс. Треугольники

ПРОСВЕЩЕНИЕ

Разбираем вместе

7 класс

В четырёхугольнике *ABCD* противоположные стороны попарно равны. Найдите величину угла *BAD*, если $\angle BCD = 102^{\circ}$.



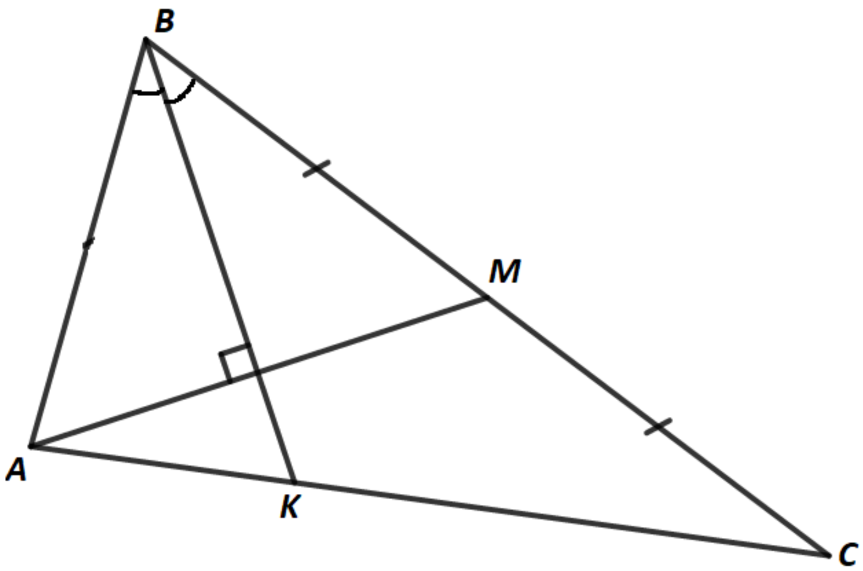
Дано:
$AB = CD$, $BC = AD$, $\angle BCD = 102^{\circ}$.
Найти:
$\angle BAD$.

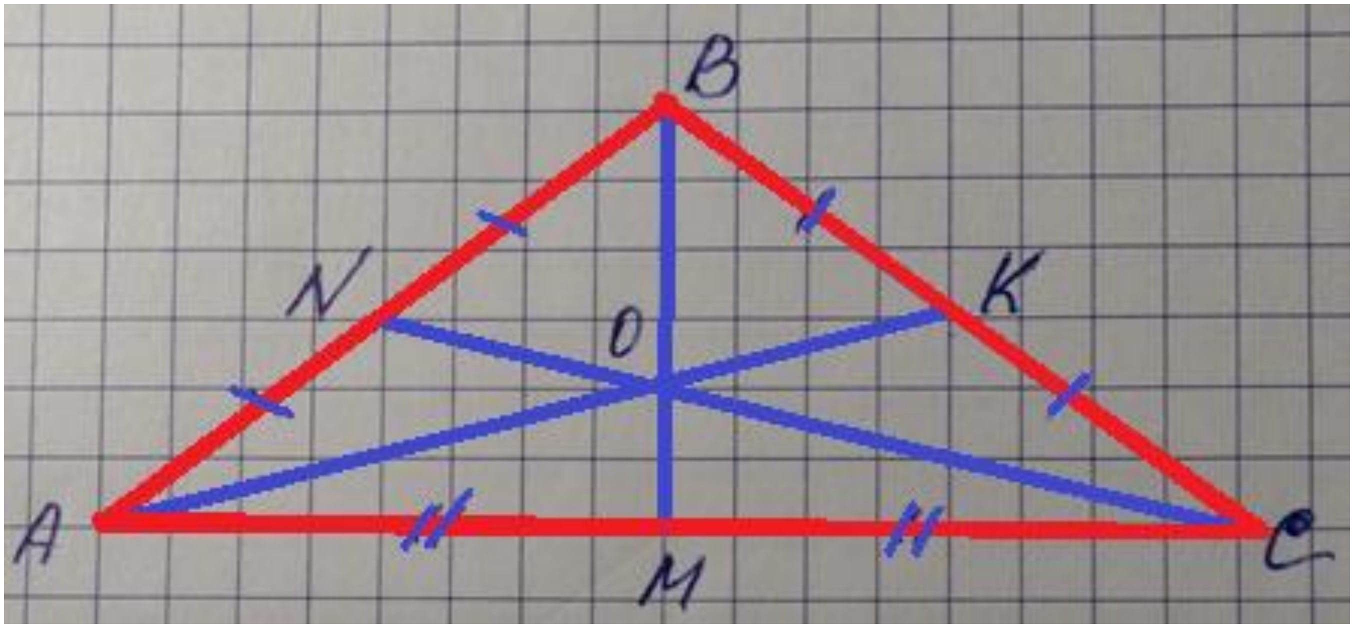
Решение.

1. Доп. построение: *BD*.
2. Рассмотрим ΔABD и ΔBCD. Имеем: $AB = CD$, $BC = AD$ по условию, *BD* – общая, значит $\Delta ABD = \Delta BCD$ по 3 признаку. Отсюда $\angle BAD = \angle BCD = 102^{\circ}$ как соответственные элементы в равных треугольниках.

Ответ: 102°.

В треугольнике *ABC* медиана *AM* перпендикулярна биссектрисе *BK*. Найдите *BC*, если *AB* = 7 см.




B
N
K
O
A
M
C

Особое внимание формированию умения читать чертёж

39 Основание равнобедренного треугольника равно 16, боковая сторона — 10. Чему равны медианы этого треугольника?

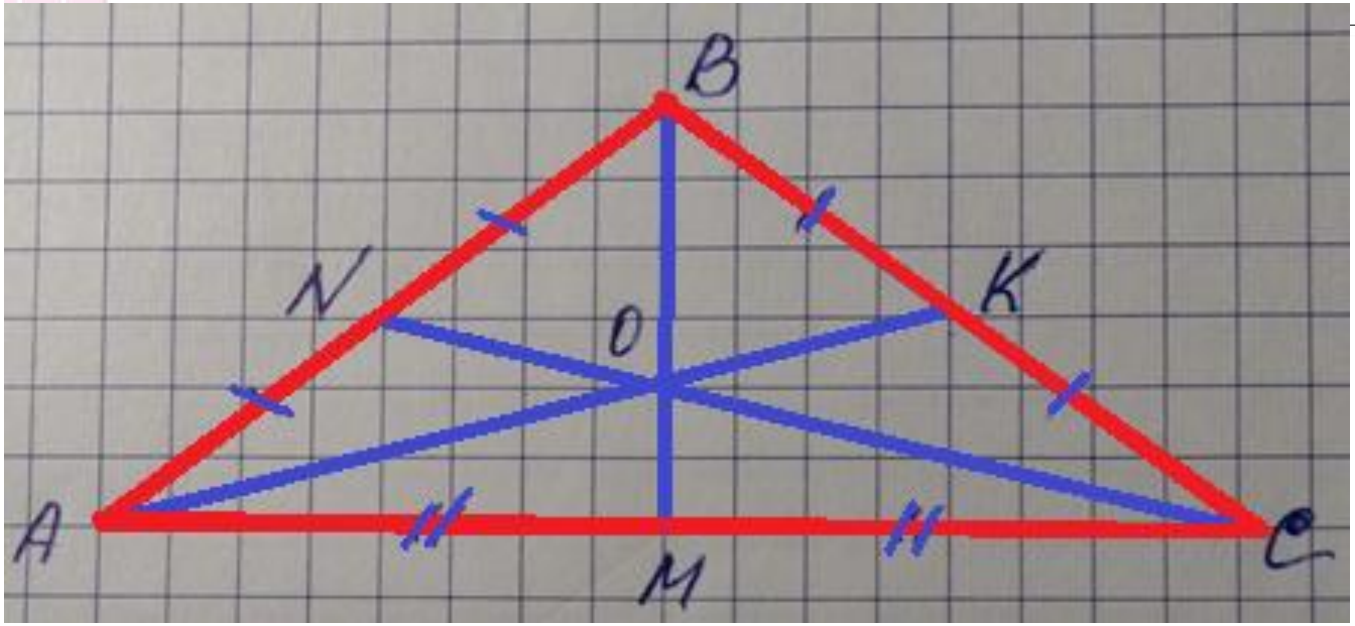
Дано: ______________________

____

Найти: ______________________

Решение. ______________________

____



33 На рисунке *17*: $\triangle ABC = \triangle PKM$.
а) Какому из углов — M, P или K — обязательно равен угол A?
б) Может ли угол M быть равным углу A?
в) Может ли угол K быть равным углу A, если $MP < MK$?

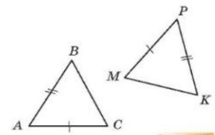


Рис. 17

34 Равны ли треугольники ABC и MNP, если:
а) $AB = MN$, $AC = MP$, $\angle A = \angle M$;
б) $AB = MP$, $BC = PN$, $\angle C = \angle P$?

К Т 35 Изобразите два равных угла A и B. На разных сторонах угла A отложите отрезки AM и AN. Отложите на разных сторонах угла B отрезки BD и BE, такие, что $BD = AM$, $BE = AN$. Соедините точки M и N, также E и D. Перечислите равные элементы треугольников AMN и BDE.

К Т 36 а) Используя данные рисунка *18*, докажите в каждом случае равенство треугольников, изображённых на рисунках.

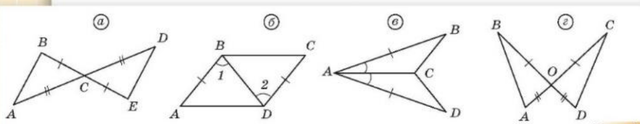


Рис. 18

б) По данным рисунка *18, в* найдите $\angle B$ и CD, если известно, что $\angle D = 38°$, $BC = 4{,}5$ см.
в) По данным рисунка *18, г* найдите BD, если известно, что $OC = 8$, $OD = 3{,}7$.

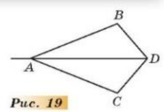


Рис. 19

37 На рисунке *19*: $\angle BAD = \angle CAD$, $AB = AC$. Докажите, что луч DA является биссектрисой угла BDC.

Т 38 На рисунке *20* отмечены равные элементы треугольника ABC.
а) Докажите, что треугольники ABD и CBE равны.
б) Докажите, что треугольник DBE равнобедренный.

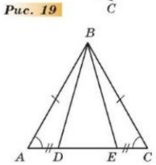


Рис. 20

Т 39 Используя данные рисунка *21*, докажите в каждом случае, что треугольник ABC равнобедренный.

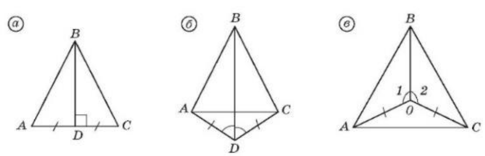
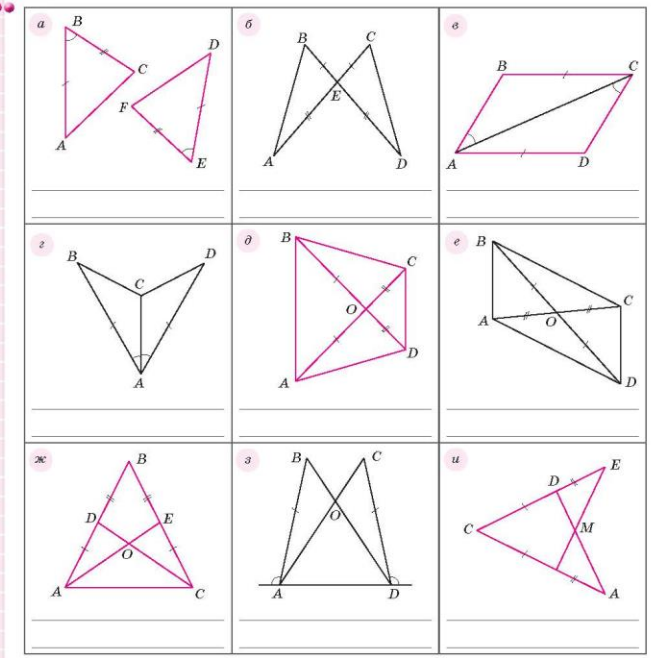


Рис. 21

27 1. Начертите неразвёрнутый угол A и проведите его биссектрису.
2. На сторонах угла отложите равные отрезки AB и AC.
3. Отметьте на биссектрисе точку E и соедините её с точками B и C.
4. Докажите, что треугольники ABE и ACE равны.

28 Равенство каких треугольников можно установить? Докажите своё утверждение.



Система заданий и приёмы работы с текстом теоремы

47 В треугольниках ABC и DEF: $\angle C = \angle F$, $AB = DE$, $AC = DF$. Выполните рисунок. Можно ли установить равенство треугольников?

Если да, то докажите это равенство, если нет, то объясните, почему.

ЗАДАЧИ

1 Равенство каких элементов нужно добавить на рисунке *2.12*, чтобы можно было убедиться в равенстве треугольников DEF и ABC?

2 На рисунке *2.13, а, б* обозначены равные элементы двух треугольников. Можно ли утверждать, что данные треугольники равны? В равных треугольниках запишите равные элементы.

3 На рисунке *2.13, в*: $AC = CE$, $BC = CD$. Докажите, что $AB = DE$.

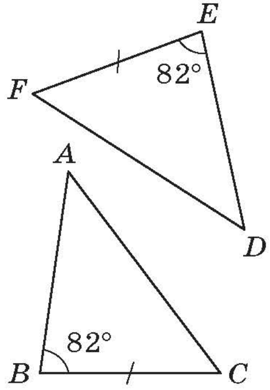


Рис. 2.12

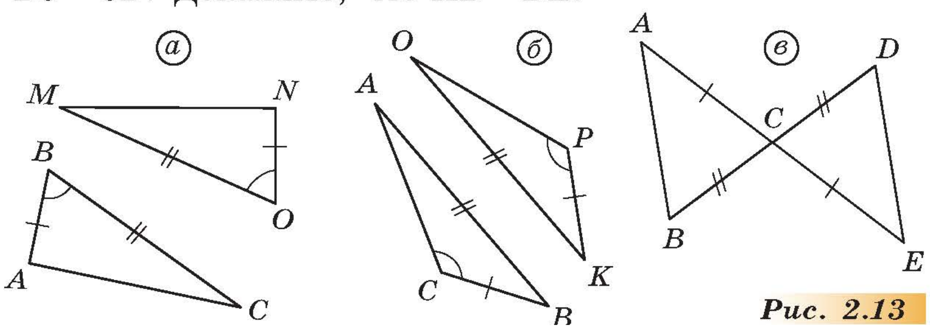


Рис. 2.13

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

п. 2.1

Т 1 а) 1) Назовите стороны, углы и вершины треугольника DEO (рис. 1).
2) Запишите все возможные обозначения данного треугольника.
Укажите:
1) сторону, противолежащую углу O;
2) угол, противолежащий стороне EO;
3) углы, прилежащие к стороне DE.
б) В треугольнике MNO (рис. 2) укажите:
1) угол, противолежащий стороне MN;
2) углы, прилежащие к стороне NO;
3) сторону, противолежащую углу N.

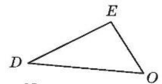


Рис. 1

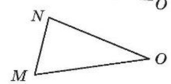


Рис. 2

2 Найдите на рисунке 3 отрезки, которые являются: 1) высотой треугольника; 2) биссектрисой треугольника; 3) медианой треугольника.

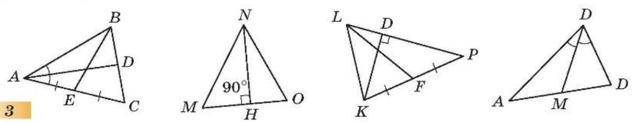


Рис. 3

Т 3 Перерисуйте в тетрадь рисунок 4.
Проведите в каждом случае из вершины B высоту треугольника. Сделайте вывод о том, как может располагаться высота треугольника.

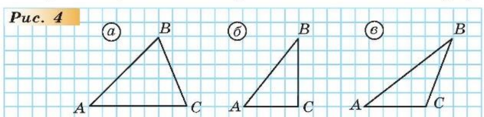
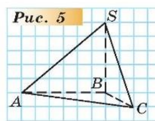
Рис. 4


Рис. 5


К Т 4 а) Начертите произвольный треугольник и проведите с помощью линейки одну из его медиан. Как вы думаете, может ли медиана располагаться вне треугольника?
б) Начертите произвольный треугольник и проведите одну из его биссектрис. Как вы думаете, может ли биссектриса треугольника располагаться вне треугольника?

К Т 5 Перенесите изображение пирамиды $SABC$ (рис. 5) в тетрадь и с помощью линейки проведите из точки S медианы её боковых граней.

6 На стороне AC треугольника ABC отмечена точка M так, что $\angle AMB = \angle BMC$. Сделайте чертёж. Докажите, что отрезок BM — высота треугольника ABC.

7 а) В треугольнике ABC: $AB = 12{,}7$ см, $BC = 7{,}3$ см, $AC = 6{,}5$ см. Чему равен периметр треугольника ABC?
б) Периметр треугольника ABC равен 30 см, причём $BC = 12$ см, а сторона AB в 2 раза больше AC. Найдите сторону AB.
в) Периметр треугольника DEN равен 54 см, причём $EN = 18$ см, а сторона DE на 6,4 см меньше стороны DN. Найдите сторону DN.

17 а) Основание равнобедренного треугольника на 2,5 см больше боковой стороны. Длины основания и боковой стороны относятся как 2 : 3. Чему равен периметр треугольника?
б) Длины боковой стороны и основания равнобедренного треугольника пропорциональны числам 3 и 2. Вычислите длины сторон этого треугольника, если его периметр равен 4,8 см.

18 Найдите периметр равнобедренного треугольника, две стороны которого равны: а) 5,7 см и 11,5 см; б) 4,5 см и 5,4 см.

19 Треугольник ABC равнобедренный с основанием AC (рис. 9).
а) Если $\angle 1 = 47°$, то чему равен угол ACB?
б) Если $\angle 2 = 119°$, то чему равен угол BAC?

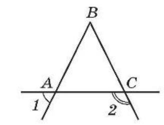


Рис. 9

20 На рисунке 10: $AB = BC$. Сравните: а) $\angle 1$ и $\angle 2$; б) $\angle 3$ и $\angle 4$.

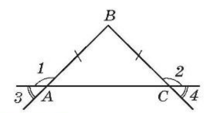


Рис. 10

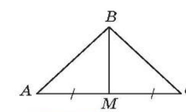


Рис. 11

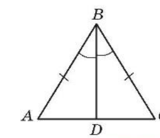


Рис. 12

Неверно! Прочитайте высказывание:
«Медиана равнобедренного треугольника является его высотой и биссектрисой».
Как нужно изменить высказывание, чтобы оно стало верным?

21 Докажите, что у равностороннего треугольника все углы равны.

22 а) На рисунке 11: BM — медиана равнобедренного треугольника ABC. $\angle ABC = 108°$. Чему равен угол MBC?
б) По данным рисунка 12 определите, чему равна сторона AC, если $AD = 7$ см.

23 а) Точки M и N — середины боковых сторон равнобедренного треугольника ABC с основанием AC. Докажите, что треугольник MBN равнобедренный.
б) Точки D и E — середины сторон AB и BC треугольника ABC. Оказалось, что треугольник DBE равнобедренный с основанием DE. Докажите, что $\triangle ABC$ — равнобедренный и укажите его основание.

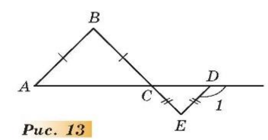


Рис. 13

24 На рисунке 13: $AB = BC$, $CE = DE$.
а) Докажите, что $\angle BAC = \angle EDC$.
б) Найдите $\angle CAB$, если $\angle 1 = 124°$.

25 а) В треугольнике ABC: $AM = BM = MC$ (рис. 14). $\angle BAC = 62°$, $\angle BCA = 31°$. Найдите $\angle ABC$.
б) На рисунке 14: $AM = BM = MC$, $\angle ABC = 90°$, $\angle MCB = 28°$. Найдите $\angle CAB$.

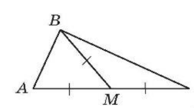


Рис. 14

РАБОТАЕМ С ТЕКСТОМ

п. 2.1

1 1. Прочитайте текст учебника на с. 55 и ответьте на вопросы.
Какую геометрическую фигуру представляет собой:

а) биссектриса треугольника: ______________________,

её особенности: ______________________.

отличие от биссектрисы угла: ______________________

б) медиана треугольника: ______________________,

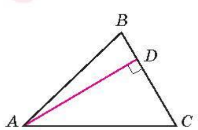
её особенности: ______________________.

в) высота треугольника: ______________________,

её особенности: ______________________.

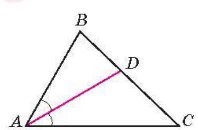
2. Под каждым рисунком подпишите, чем является отрезок AD в треугольнике.

а



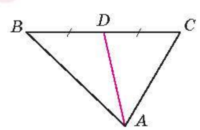
____

б



____

в



____

2 Составьте верное утверждение.

а) Можно утверждать, что AD — биссектриса треугольника ABC, если:
1. $BD = DC$ 2. $\angle BAD = \angle CAD$ 3. $\angle BDA = \angle CDA$

б) Можно утверждать, что AM — медиана треугольника ABC, если:
1. $AB = AC$ 2. $AM = MC$ 3. $BM = MC$

в) Можно утверждать, что AH — высота треугольника, если:
1. $\angle BAC = 90°$ 2. $\angle AHB = \angle AHC$ 3. $\angle ABC = 90°$

п. 2.2

3 Прочитайте на с. 56 учебника определение равнобедренного треугольника. Запишите, какое свойство равнобедренного треугольника содержит определение.

____

4 Прочитайте на с. 56 учебника теорему о свойствах равнобедренного треугольника и запишите:

условие теоремы: ______________________

заключение теоремы: ______________________

____

Сформулируйте текст теоремы на языке «Если… то…»: ______________________

____

5 Заполните классификацию треугольников по соотношению сторон.

Равносторонний	Равнобедренный	Разносторонний
______________	______________	______________

п. 2.3

6 На с. 58 учебника найдите и запишите:

а) как называют равные стороны и другие равные элементы равных треугольников:

____

б) важное свойство равных треугольников: ______________________

____

в) какие элементы равных треугольников, кроме сторон и углов, совмещаются при наложении: ______________________

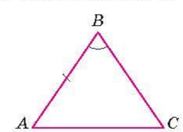
7 1. Прочитайте фрагмент «Первый признак равенства треугольников» п. 2.3 учебника. Запишите:

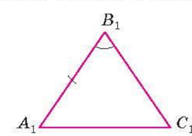
условие теоремы: ______________________

____

заключение: ______________________

2. Докажите равенство равнобедренных треугольников по боковой стороне и углу, противолежащему основанию.





Дано: ______________

____

Доказать: ______________

Доказательство. ______________________

____

4. Из вершины S тетраэдра $SABC$ проведите с помощью линейки медианы боковых граней пирамиды.

5. Укажите: а) видимые грани тетраэдра ________________

б) невидимые грани тетраэдра ____________________

16 Решите задачи по данному краткому условию.

а) Дано: $\triangle ABC$, $AB = 8{,}4$ см, $BC = 6{,}3$ см, $AC = 5{,}5$ см
Найти: P_{ABC}.

Решение. ____________________________

б) Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$, $AB - AC = 3$ см, $P_{ABC} = 18$ см.
Найти: AB.

Решение. ____________________________

п. 2.2

17 1. На рисунках изображены равнобедренные треугольники. В каждом случае запишите:

а) основание треугольника: ___________

боковые стороны: ___________

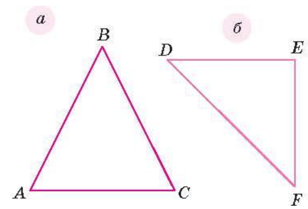
угол, противоположный основанию: ___________

б) основание треугольника: ___________

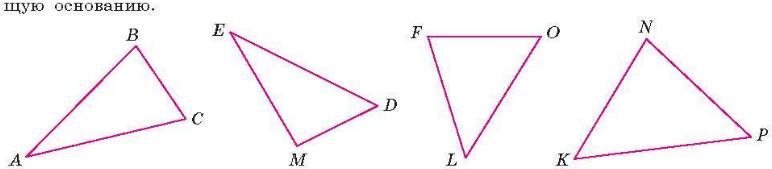
боковые стороны: ___________

углы при основании: ___________

угол, противоположный основанию: ___________



2. Среди представленных на рисунке треугольников выберите равнобедренные. Выделите цветом основание равнобедренного треугольника и вершину, противолежащую основанию.

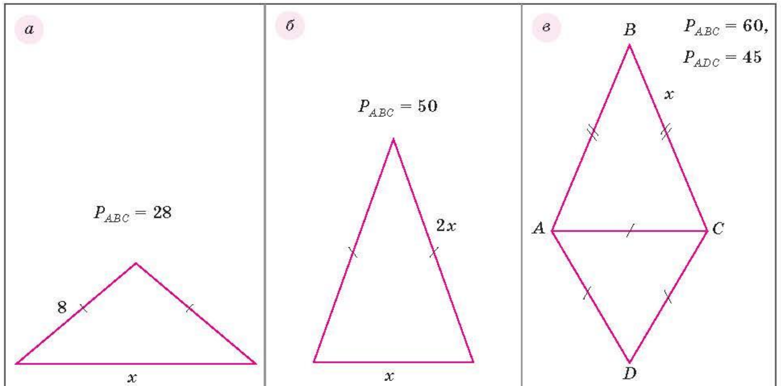


18 Постройте какой-нибудь равнобедренный треугольник, для которого данный угол является углом, противолежащим основанию треугольника.

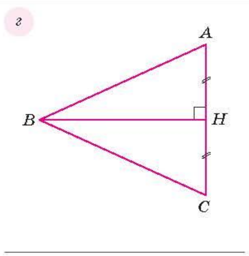
19 Верны ли данные высказывания? Выполните рисунок и объясните, почему вы так утверждаете.

1. Существует треугольник, у которого медиана и биссектриса, проведённые из одной вершины, совпадают.
2. Существует треугольник, биссектриса которого делит его на два равных треугольника.
3. Существует треугольник, медиана которого делит его на два треугольника с равными периметрами.
4. Существует треугольник, медиана которого делит его на два равнобедренных треугольника.

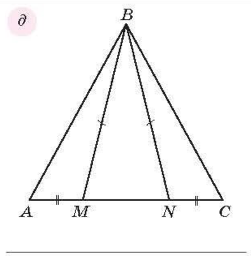
20 По данным, представленным на рисунке, найдите неизвестную величину x.



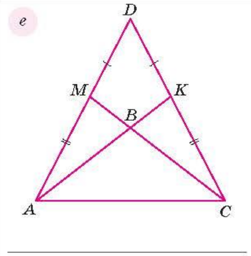
г



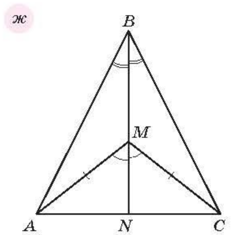
д



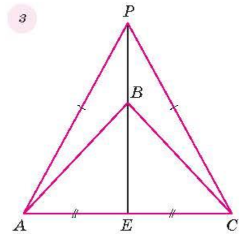
е



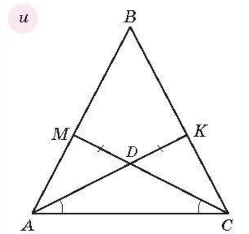
ж



з



и



АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ

п. 2.1

43 1. Медиана AM разбивает треугольник ABC на два треугольника BAM и CAM. Выполните рисунок и запишите формулу периметра для каждого треугольника:

$P_{ABC} =$ ______________________

$P_{BAM} =$ ______________________

$P_{CAM} =$ ______________________

Сравните сумму периметров треугольников BAM и CAM с периметром треугольника ABC. На какую величину они отличаются? ______________________

2. Найдите периметр треугольника ABC, если периметры треугольников BAM и CAM равны 16 см и 18 см, а медиана AM равна 5 см.

Дано: ______________________

Найти: P_{ABC}.

Решение. ______________________

Ответ: ______________________

3. Найдите медиану AM треугольника ABC, если известно, что периметр треугольника ABC равен 20, а периметр треугольника ABM равен 16.

Дано: ______________________

Найти: AM.

Решение. ______________________

Ответ: ______________________

п. 2.3

44 В треугольниках ABC и DEF: $\angle C = \angle F$, $AB = DE$, $AC = DF$. Выполните рисунок. Можно ли установить равенство треугольников?

Если да, то докажите это равенство, если нет, то объясните почему.

____

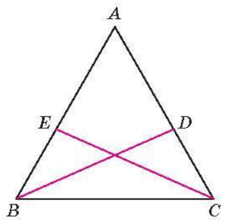
45 1. Известно, что $AB = AC$, $AE = AD$. Найдите BD, если $CE = 15{,}2$.

Дано: ______________________

Найти: ______________________

Решение. ______________________

Ответ: ______________________



РАБОТАЕМ С ТЕКСТОМ

п. 2.1

1 1. Прочитайте текст учебника на с. 55 и ответьте на вопросы.

Какую геометрическую фигуру представляет собой:

а) биссектриса треугольника: ______________________________,

её особенности: ______________________________.

отличие от биссектрисы угла: ______________________________

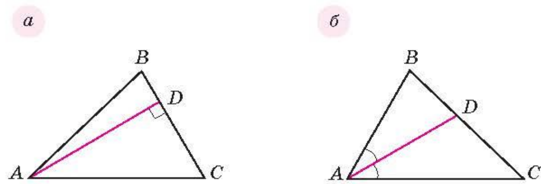
б) медиана треугольника: ______________________________,

её особенности: ______________________________.

в) высота треугольника: ______________________________,

её особенности: ______________________________.

2. Под каждым рисунком подпишите, чем является отрезок AD в треугольнике.



______________ ______________ ______________

2 Составьте верное утверждение.

а) Можно утверждать, что AD — биссектриса треугольника ABC, если:

1. $BD = DC$ 2. $\angle BAD = \angle CAD$ 3. $\angle BDA = \angle CDA$

б) Можно утверждать, что AM — медиана треугольника ABC, если:

1. $AB = AC$ 2. $AM = MC$ 3. $BM = MC$

в) Можно утверждать, что AH — высота треугольника, если:

1. $\angle BAC = 90^\circ$ 2. $\angle AHB = \angle AHC$ 3. $\angle ABC = 90^\circ$

п. 2.2

3 Прочитайте на с. 56 учебника определение равнобедренного треугольника. Запишите, какое свойство равнобедренного треугольника содержит определение.

____

АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ

п. 2.1

43

1. Медиана AM разбивает треугольник ABC на два треугольника BAM и CAM. Выполните рисунок и запишите формулу периметра для каждого треугольника:

P_{ABC} = ______________________

P_{BAM} = ______________________

P_{CAM} = ____________________

____

Сравните сумму периметров треугольников BAM и CAM с периметром треугольника ABC. На какую величину они отличаются? ______________________

2. Найдите периметр треугольника ABC, если периметры треугольников BAM и CAM равны 16 см и 18 см, а медиана AM равна 5 см.

Дано: ______________________

____

Найти: P_{ABC}.

Решение. ____

______________________________ Ответ: ______________

3. Найдите медиану AM треугольника ABC, если известно, что периметр треугольника ABC равен 20, а периметр треугольника ABM равен 16.

Дано: ______________________

____

Найти: AM.

Решение. ____

______________________________ Ответ: ______________

26 а) В треугольнике ABC медиана BM равна стороне BC. В каком отношении делит сторону AC высота, опущенная из вершины B?
б) В треугольнике ABC: BM — медиана, BH — высота, $BM = BC$ (рис. 15). Найдите AH, если $AC = 76$ см.

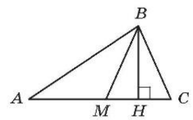


Рис. 15

27 а) Угол, смежный с углом, противолежащим основанию равнобедренного треугольника, равен 128°. Найдите угол между боковой стороной треугольника и медианой, проведённой к основанию.
б) Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, и угол, равный 130°, — вертикальные. Найдите угол, который образует боковая сторона с высотой, проведённой к основанию равнобедренного треугольника.

28 В треугольнике ABC: $AB = 6$, $BC = 3$. В каком отношении биссектриса, выходящая из вершины B, делит медиану, выходящую из вершины C?

К 29 **ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ**
Запишите формулу для вычисления периметра P равнобедренного треугольника с основанием b и боковой стороной a.
1) На сколько увеличится периметр, если боковую сторону увеличить на 2? на 10? на величину m?
2) На сколько уменьшится периметр, если основание уменьшить на 3? на 8? на величину m?
3) Как изменится периметр, если все стороны треугольника увеличить в 5 раз? уменьшить в 3 раза? уменьшить в n раз?
4) Что произойдёт с боковой стороной, если основание увеличится, а периметр не изменится?
5) Что произойдёт с основанием, если боковая сторона увеличится, а периметр не изменится?
6) Можно ли разбить равнобедренный треугольник на два треугольника одинакового периметра? Можно ли это сделать с другими треугольниками? Обоснуйте свои ответы.

30 В треугольнике ABC медиана CM равна отрезку BM. Докажите, что один из углов треугольника ABC равен сумме двух других его углов.

31 а) Медиана делит треугольник на два треугольника с равными периметрами. Докажите, что исходный треугольник равнобедренный.
б) Периметр равнобедренного треугольника равен 27. Медиана делит его на два треугольника, разность периметров которых равна 3. Найдите стороны исходного треугольника.

п. 2.3

Т 32 Треугольники ABC и MNP равны (рис. 16). Запишите равенство соответствующих элементов.

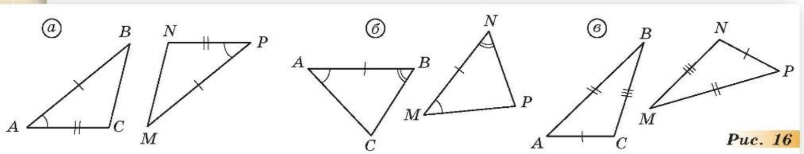


Рис. 16

33 На рисунке 17: $\triangle ABC = \triangle PKM$.
а) Какому из углов — M, P или K — обязательно равен угол A?
б) Может ли угол M быть равным углу A?
в) Может ли угол K быть равным углу A, если $MP < MK$?

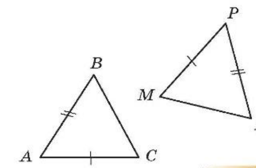


Рис. 17

34 Равны ли треугольники ABC и MNP, если:
а) $AB = MN$, $AC = MP$, $\angle A = \angle M$;
б) $AB = MP$, $BC = PN$, $\angle C = \angle P$?

К Т 35 Изобразите два равных угла A и B. На разных сторонах угла A отложите отрезки AM и AN. Отложите на разных сторонах угла B отрезки BD и BE, такие, что $BD = AM$, $BE = AN$. Соедините точки M и N, также E и D. Перечислите равные элементы треугольников AMN и BDE.

К Т 36 а) Используя данные рисунка 18, докажите в каждом случае равенство треугольников, изображённых на рисунках.

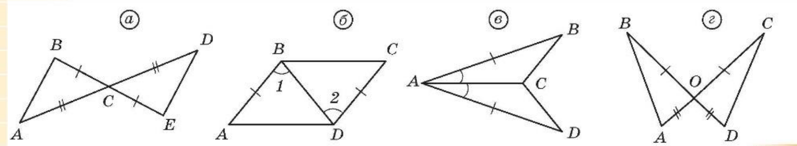


Рис. 18

б) По данным рисунка 18, в найдите $\angle B$ и CD, если известно, что $\angle D = 38°$, $BC = 4{,}5$ см.
в) По данным рисунка 18, г найдите BD, если известно, что $OC = 8$, $OD = 3{,}7$.

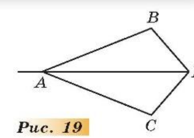


Рис. 19

37 На рисунке 19: $\angle BAD = \angle CAD$, $AB = AC$. Докажите, что луч DA является биссектрисой угла BDC.

Т 38 На рисунке 20 отмечены равные элементы треугольника ABC.
а) Докажите, что треугольники ABD и CBE равны.
б) Докажите, что треугольник DBE равнобедренный.

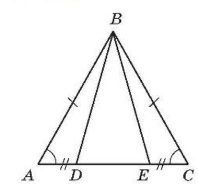


Рис. 20

Т 39 Используя данные рисунка 21, докажите в каждом случае, что треугольник ABC равнобедренный.

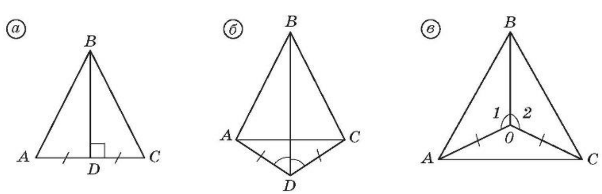


Рис. 21

40 а) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC провели биссектрису BD. Докажите, что $\triangle ABD = \triangle CBD$.
б) Известно, что биссектриса BD разбивает треугольник ABC на два равных треугольника. Верно ли, что $AB = BC$?

41 Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них.
а) Чему равен отрезок BC, если отрезок AD равен 10 см?
б) Чему равен отрезок BD, если $AC = 12{,}5$ см?

42 Отрезки равной длины AB и CD пересекаются в точке O так, что $AO = OD$. Докажите равенство треугольников ABC и DCB.

К Т **43** а) Через середину O отрезка AB проведена прямая, перпендикулярная прямой AB. Докажите, что каждая точка M этой прямой одинаково удалена от точек A и B.
б) На сторонах угла ABC отложены равные отрезки BM и BN. Произвольная точка D биссектрисы этого угла соединена с точками M и N. Докажите, что $DM = DN$.

К **44** а) В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. На этих сторонах взяты соответственно точки K и M так, что $BK = BM$. Докажите, что $CK = AM$.
б) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC на сторонах AB и BC взяты соответственно точки O и E так, что $OA = CE$. Докажите, что равны углы AOC и CEA.

45 Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведённые к равным сторонам, равны.

46 а) На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли точки M и N так, что $AM = CN$. Докажите, что треугольник MBN равнобедренный.
б) На основании AC равнобедренного треугольника ABC отметили точки D и E так, что $AD = CE$. Докажите, что $\angle BDC = \angle BEA$. Указание: рассмотрите различные случаи взаимного расположения точек D и E на отрезке AC.

47 Точки A, B, C, D принадлежат одной прямой, причём отрезки AB и CD имеют общую середину. Докажите, что если треугольник ABE равнобедренный с основанием AB, то треугольник CDE тоже равнобедренный с основанием CD. Указание: рассмотрите различные случаи взаимного расположения точек A, B и C.

48 а) На рисунке *22*: $AB = BC = AC$, $AD = BE = CO$. Докажите, что треугольник DEO равносторонний.
б) Докажите, что отрезки, соединяющие середины сторон равностороннего треугольника, образуют также равносторонний треугольник.

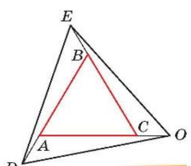


Рис. 22

49 Три черепахи находятся в точках A, B и C, являющихся вершинами равностороннего треугольника. Они одновременно с одинаковой скоростью начинают ползти. Черепаха, находившаяся в A, ползёт по прямой AB в направлении к B. Черепаха из B ползёт в C, черепаха из C ползёт в A. Докажите, что во все моменты времени черепахи располагаются в вершинах равностороннего треугольника.

50 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC на биссектрисе BD отмечена произвольным образом точка M. Докажите, что треугольник AMC — равнобедренный.

51 Точки A, B, C и D лежат на одной прямой (рис. *23*), треугольники ABM и ABO равны. Докажите, что треугольники MDC и ODC равны. Равенство каких треугольников ещё можно доказать?

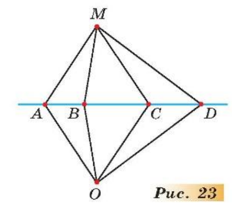


Рис. 23

52 Докажите, что в равнобедренном треугольнике медианы, проведённые к боковым сторонам, равны.

53 Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника.

К **54** Докажите равенство равнобедренных треугольников по основанию и медиане, проведённой к основанию.

К Т **55** Перечертите в тетрадь куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, изображённый на рисунке *24*.
а) Проведите отрезки A_1C_1 и BD. Докажите, что $A_1C_1 = BD$.
б) Проведите отрезки AC, AD_1 и D_1C. Докажите, что треугольник AD_1C равнобедренный.

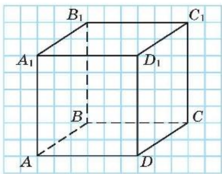


Рис. 24

П. 2.4

Т **56** На каждом рисунке (рис. *25*) обозначены равные элементы двух треугольников. Равны ли эти треугольники? Ответ запишите с помощью символов. Запишите остальные равные элементы треугольников.

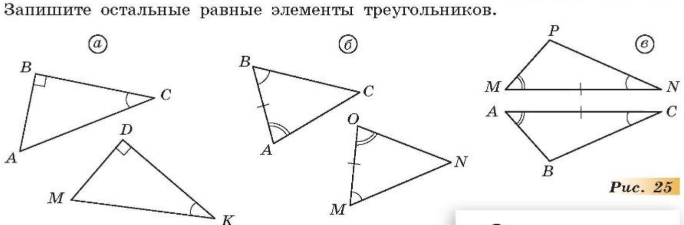


Рис. 25

Т **57** Используя данные рисунка *26*, докажите равенство треугольников, изображённых на рисунке.

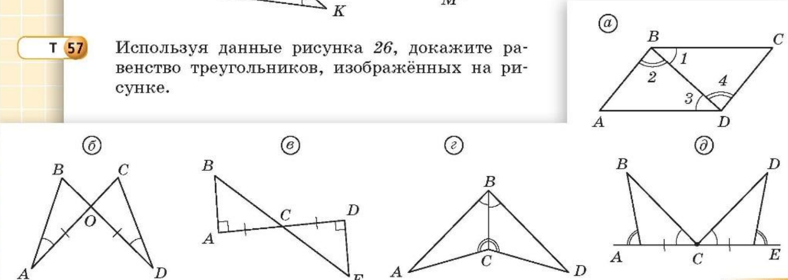


Рис. 26

Т 58 На рисунке 27: $AB \perp AD$, $CD \perp AD$, $\angle CAD = \angle BDA$. Докажите, что $AB = CD$.
Равенство каких фигур ещё можно доказать?

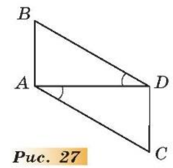


Рис. 27

59 а) На рисунке 28: $\angle BAD = \angle DCB$, $AO = CO$. Докажите, что $\angle B = \angle D$ и $AB = DC$.
б) В треугольнике ABC высота BH является и биссектрисой. Будут ли треугольники ABH и CBH равны? Ответ обоснуйте.

Неверно! Две стороны и угол одного треугольника равны двум сторонам и углу другого треугольника. Следует ли из этого, что данные треугольники равны?

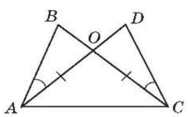


Рис. 28

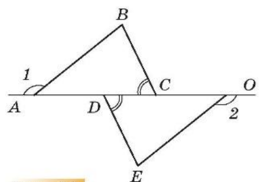


Рис. 29

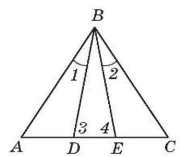


Рис. 30

60 На рисунке 29 дана фигура, у которой $AD = CO$, $\angle ACB = \angle EDO$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что треугольники ABC и DEO равны.

61 В треугольнике ABC: $AB = BC$ и $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 30).
а) Докажите, что $\angle 3 = \angle 4$.
б) Можно ли найти DC, если известно, что $AE = 5{,}8$?

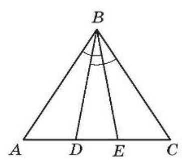


Рис. 31

62 На рисунке 31: $AB = BC$, $\angle CBD = \angle ABE$. Докажите, что:
а) $\triangle DBE$ — равнобедренный; б) $AD = CE$.

К 63 Докажите, что прямая, перпендикулярная биссектрисе угла, отсекает на его сторонах равные отрезки.

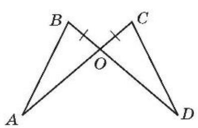


Рис. 32

64 а) На рисунке 32: $BO = OC$. Какое условие достаточно добавить, чтобы утверждать, что треугольники ABO и DCO равны:
1) по первому признаку равенства треугольников;
2) по второму признаку равенства треугольников?
б) На рисунке 33: $\angle ABD = \angle BDC$. Какое условие достаточно добавить, чтобы утверждать, что треугольники ABD и CBD равны:
1) по первому признаку равенства треугольников;
2) по второму признаку равенства треугольников?

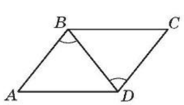


Рис. 33

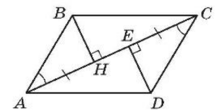


Рис. 34

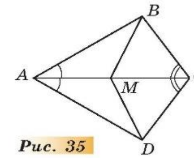


Рис. 35

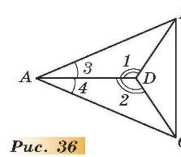


Рис. 36

65 а) На рисунке 34: $AH = EC$, $BH \perp AC$, $DE \perp AC$, $\angle BAC = \angle DCA$. Докажите, что $BC = AD$. Найдите $\angle ACB$, если $\angle CAD = 41°$.
б) На рисунке 35: $\angle BAC = \angle CAD$, $\angle BCM = \angle MCD$. Докажите, что $BM = MD$. Найдите $\angle AMB$, если $\angle AMD = 117°$.

66 На рисунке 36: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Докажите, что $\angle DBC = \angle DCB$.

К 67 а) Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы соответствующих углов равны.
б) Докажите, что в равнобедренном треугольнике биссектрисы, проведённые к боковым сторонам, равны.

К 68 а) Докажите равенство двух треугольников по стороне, медиане, проведённой к этой стороне, и углу между этой стороной и медианой.
б) Докажите равенство двух треугольников по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе этого угла.
в) Докажите равенство двух треугольников по биссектрисе, углу, из вершины которого проведена эта биссектриса, и углу, образованному биссектрисой со стороной, к которой она проведена.

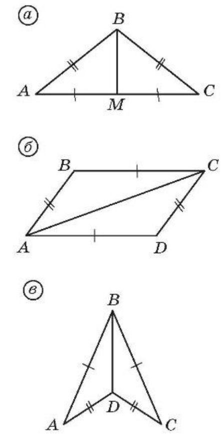


Рис. 37

П. 2.5

69 Используя данные рисунка 37, докажите равенство треугольников, изображённых на рисунке.

70 Даны равносторонние треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Нужно ли проверять равенство трёх пар сторон этих треугольников, чтобы можно было выяснить, равны они либо не равны? Назовите наименьшее число таких пар.

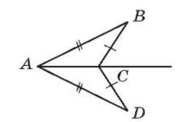


Рис. 38

К 71 а) На рисунке 38: $AB = AD$, $BC = DC$. Докажите, что луч AC является биссектрисой угла BAD.
б) На рисунке 39: $AC = BD$, $AB = CD$. Докажите, что 1) $\angle ABC = \angle BCD$; 2) $\triangle BOC$ — равнобедренный.

72 а) Даны равнобедренные треугольники ABC и DEO с равными основаниями AC и DO. Какое условие достаточно добавить, чтобы утверждать, что данные треугольники равны: по второму признаку равенства треугольников? по третьему признаку равенства треугольников?

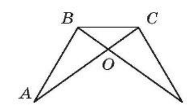


Рис. 39

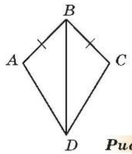


Рис. 40

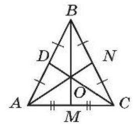


Рис. 41

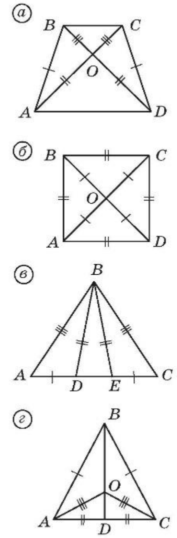


Рис. 42

б) На рисунке *40*: $AB = BC$. Какое условие достаточно добавить, чтобы утверждать, что треугольники ABD и CBD равны по первому признаку равенства треугольников? по третьему признаку равенства треугольников?

73 Докажите разными способами, что медиана равнобедренного треугольника, проведённая к его основанию, делит треугольник на два равных треугольника.

К 74 На рисунке *41*: $AD = DB = BN = NC$, $AM = MC$.
а) Укажите как можно больше пар равных треугольников. б) Укажите как можно больше равнобедренных треугольников.

Т 75 Установите равенство треугольников, изображённых на рисунке *42*. Укажите как можно больше пар равных треугольников.

76 На рисунке *43*: $AB = CD$, $BC = AD$. Докажите, что точка O — середина отрезков AC и BD.

77 На рисунке *44*: $AD = CM$, $AB = EM$, $BC = DE$, $\angle BCA = 36°$. Найдите $\angle ADE$.

78 а) В четырёхугольнике $ABCD$ (рис. *45*) $AB = BC = CD = AD$. 1) Докажите равенство углов B и D. 2) Найдите $\angle A$, если $\angle C = 112°$.
б) В четырёхугольнике $ABCD$ (рис. *46*) $AB = CD$, $BC = AD$. Докажите равенство углов A и C, B и D.

Т 79 На рисунке *47*: $AD = DH = HE = EC$, $BH \perp AC$, $BO < OH$.
а) Выпишите как можно больше пар равных треугольников. б) Исходя из рисунка *47*, выпишите все пары: треугольник и его медиана.

К 80 Нарисуйте тетраэдр $ABCD$ (рис. *48*). Пусть у этого тетраэдра $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$. Укажите равные углы на гранях этого тетраэдра.

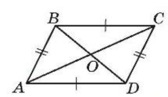


Рис. 43

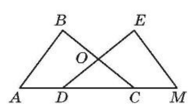


Рис. 44

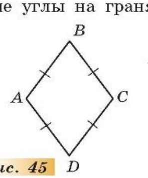


Рис. 45

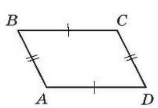


Рис. 46

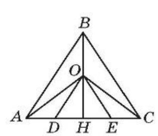


Рис. 47

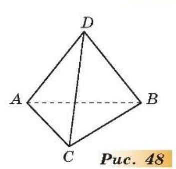


Рис. 48

К 81 Разрежьте равносторонний треугольник на 2, 3, 4, 6, 8, 12 равных треугольников.

К 82 На рисунке *49, а* равносторонний треугольник разрезан на 4 равносторонних треугольника, а на рисунке *49, б* — на 9 равносторонних треугольников. Разрежьте равносторонний треугольник на 6 равносторонних треугольников (не обязательно равных между собой).

К 83 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. *50*). Докажите, что:
а) точка D равноудалена от точек A_1 и C_1;
б) $\triangle A_1C_1D$ — равносторонний;
в) $\triangle A_1C_1D = \triangle B_1AC$.

К 84 Докажите равенство двух треугольников, если в этих треугольниках две стороны и медиана, проведённая к одной из них, соответственно равны.

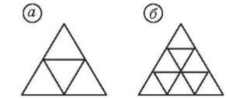


Рис. 49

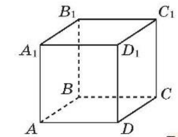


Рис. 50

п. 2.6

85 а) На рисунке *51*: $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.
б) На рисунке *51*: $\angle 3 = \angle 4$. Сравните отрезки AB и CB.

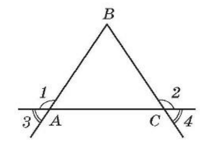


Рис. 51

86 а) На рисунке *52*: $\angle 1 = \angle 2$, отрезки AB и BC равны. Докажите, что $\triangle CDE$ — равнобедренный.
б) На рисунке *52*: $\angle 1 = \angle 2$, $CD = DE$. Докажите, что $\triangle ABC$ — равнобедренный.

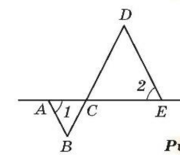


Рис. 52

87 а) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC медианы AM и CE пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник AOC — равнобедренный.
б) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O (рис. *53*). Докажите, что треугольник AOC — равнобедренный.

К Т 88 Перечертите рисунок *54* в тетрадь и изобразите равнобедренный треугольник так, чтобы все вершины треугольника находились в узлах клетки, а отрезок MN был: а) основанием; б) боковой стороной.

89 Начертите на клетчатой бумаге с помощью геометрической линейки равнобедренный треугольник: а) боковая сторона которого равна 2,5 см, а угол, противолежащий основанию, равен 90°; б) основание которого равно 4 см, а угол при основании равен 45°.

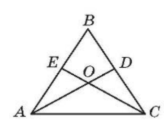


Рис. 53

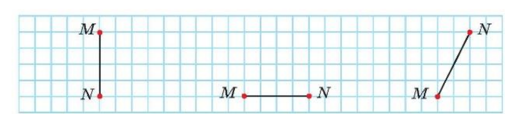


Рис. 54

90 а) На биссектрисе BD треугольника ABC отметили точку M. Известно, что отрезок MD — высота треугольника AMC.
1) Докажите, что треугольник AMC — равнобедренный.
2) Найдите AC, если $DC = 3{,}8$ см.
б) На медиане BM треугольника ABC отметили точку O. Известно, что $OA = OC$, $AB = 7$ см. Найдите BC.

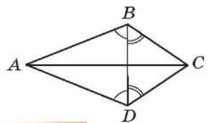


Рис. 55

91 а) На рисунке 55: $\angle ABD = \angle ADB$, $\angle CDB = \angle CBD$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle ADC$.
б) В четырёхугольнике $ABCD$: $AC \perp BD$, $AO = OC$ (рис. 56). Докажите, что $\triangle ABD = \triangle CBD$.

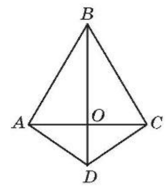


Рис. 56

92 В некотором треугольнике из одной и той же вершины провели медиану и высоту, которые не совпадают. Следует ли из этого, что треугольник не является равнобедренным?

93 Нетрудно доказать, что равнобедренные треугольники равны, если основание и прилежащий к нему угол одного треугольника соответственно равны основанию и прилежащему к нему углу другого треугольника. Предложите свои признаки равенства равнобедренных треугольников.

К 1 Можно ли два равнобедренных треугольника с равными боковыми сторонами расположить так, чтобы один лежал внутри другого?

К 2 Докажите, что если у четырёхугольника противоположные стороны попарно равны, то точка пересечения его диагоналей является центром симметрии четырёхугольника.

К 3 В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Пусть M — такая точка плоскости, что отрезок MB_1 пересекает сторону BC в точке K, $BM = AB_1$, $\angle MBB_1 = \angle BB_1A$. Докажите, что $BK = KB_1$.

К 4 Точки A, B, A_1 и B_1 не лежат на одной прямой. Точки A_1 и B_1 симметричны соответственно точкам A и B относительно некоторой прямой. Докажите равенство треугольников: а) AA_1B и A_1AB_1; б) ABB_1 и A_1B_1B.

К 5 В треугольнике ABC известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CA = 6$. На стороне BC взята точка M так, что $CM = 1$. Прямая, проходящая через M перпендикулярно биссектрисе угла ACB, пересекает AC в точке N, а прямая, проходящая через N перпендикулярно биссектрисе угла BAC, пересекает прямую AB в точке K. Найдите BK и AK.

К 6 В треугольнике ABC известно, что $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 7$. На сторонах AB, BC и CA взяты соответственно точки K, L и M так, что прямые KL, LM и MK перпендикулярны соответственно биссектрисам углов ABC, BCA и CAB. На отрезки какой длины делят точки K, L и M стороны треугольника ABC?

К 7 На сторонах AB, BC и CA равностороннего треугольника взяты соответственно точки K, M и P так, что $AK = BM = CP \neq \frac{1}{2} AB$. Докажите, что прямые AM, BP и CK при пересечении образуют равносторонний треугольник.

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

- Какая геометрическая фигура называется треугольником?
- Что называют высотой треугольника?
- Что такое медиана треугольника?
- Что такое биссектриса треугольника?
- Какие треугольники называют равными?
- Верно ли утверждение:
  1) если треугольники равны, то и периметры этих треугольников равны
  2) если периметры двух треугольников равны, то и сами треугольники равны?
- Какой треугольник называется равнобедренным? равносторонним?
- Назовите элементы равнобедренного треугольника.
- Какими свойствами обладает равнобедренный треугольник? Докажите теорему о свойствах равнобедренного треугольника.
- Докажите, что у равностороннего треугольника все углы равны.
- Докажите первый признак равенства треугольников.
- Докажите второй признак равенства треугольников.
- Докажите третий признак равенства треугольников.
- Какая теорема называется свойством, а какая — признаком? Приведите примеры.
- Сформулируйте и докажите признаки равнобедренного треугольника.
- Объясните, что такое жёсткость треугольника. Приведите примеры использования жёсткости треугольника в технике, быту.

ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ:

http://fcior.edu.ru → каталог ЭОР → основное общее образование → математика → название модуля: — Треугольник. — Треугольник и его элементы. — Виды треугольников. — Медианы, биссектрисы, высоты равностороннего треугольника. — Определение равнобедренного и равностороннего треугольника. — Равнобедренный треугольник и его свойства. — Теорема о биссектрисе равнобедренного треугольника. — Теорема об углах равнобедренного треугольника. — Медианы, биссектрисы и высоты треугольника. — Первый признак равенства треугольников. — Признаки равенства треугольников. — Три признака равенства треугольников.

Что такое функциональная грамотность

.

№ 1

147 х 154 =

= 147 х 153 + 147 =

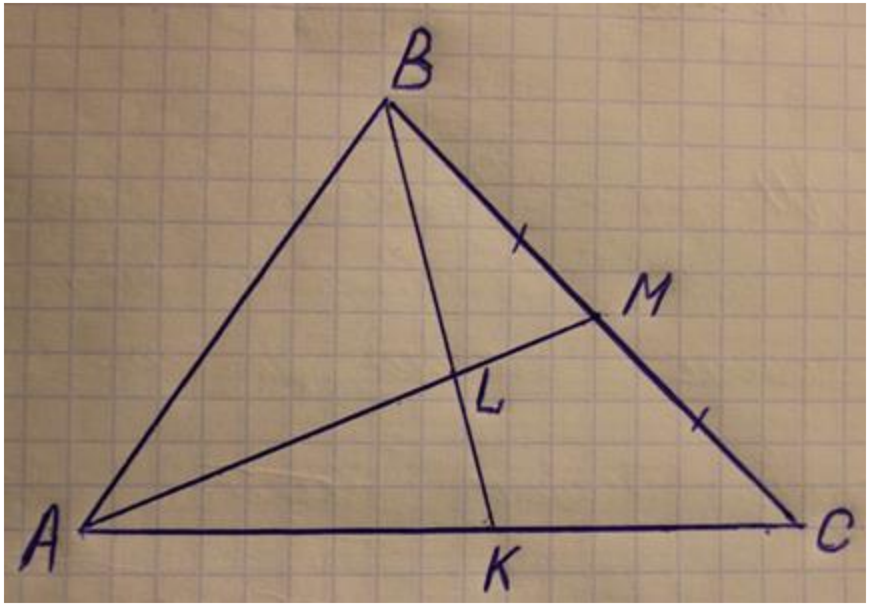
= (150 – 3) (150 + 3) + 147 =

= 22500 – 9 + 147 =

= 22500 – 138 =

= 22362

В треугольнике *ABC* медиана *AM* перпендикулярна биссектрисе *BK*. Найдите *BC*, если *AB* = 7 см.

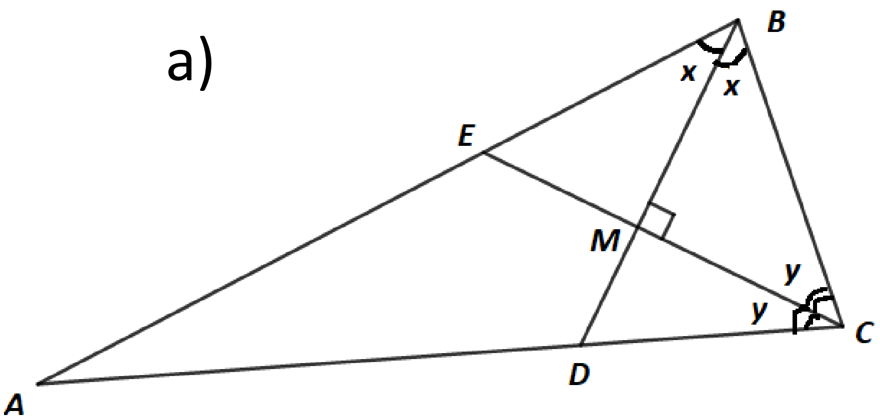


Важно понимать, что процесс формирования функциональной грамотности не может быть набором отдельных заданий или отдельных уроков

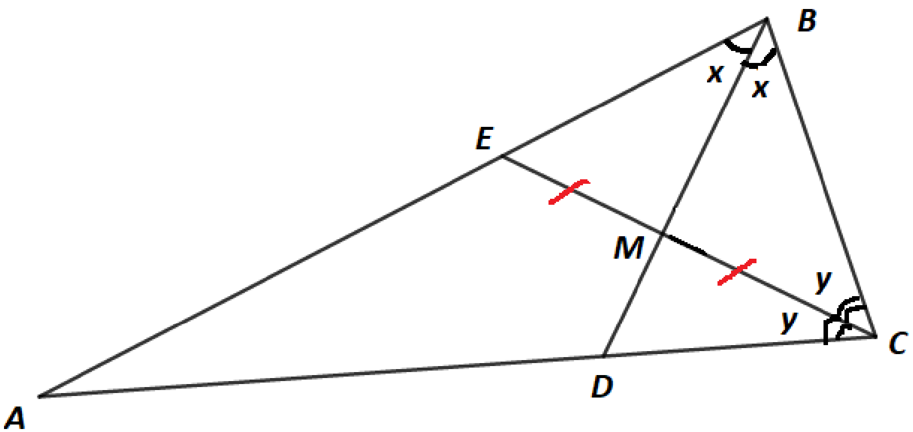
К Т 41

а) Существует ли треугольник, две биссектрисы которого перпендикулярны?
б) Существует ли треугольник, в котором одна биссектриса делит пополам другую биссектрису?

а)



б)



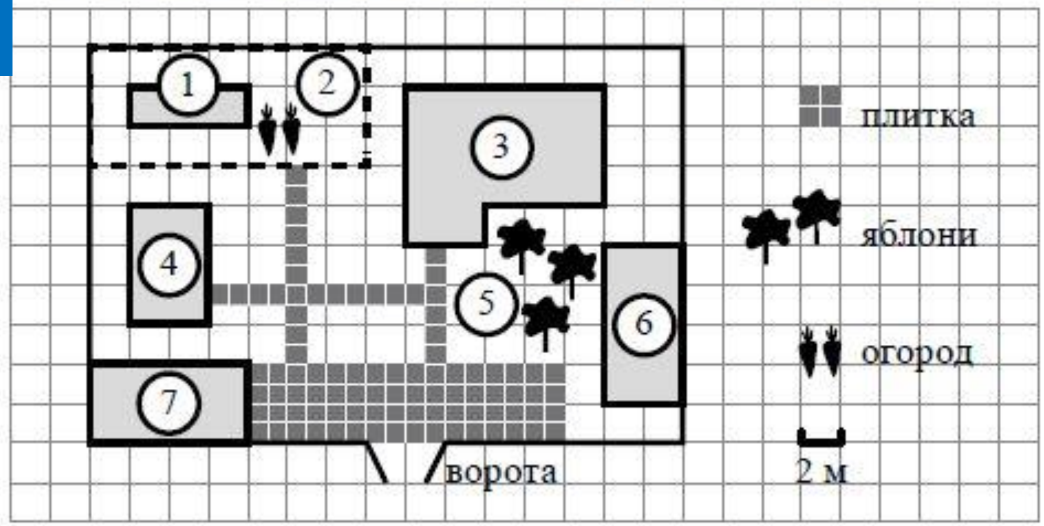
Качество образовательных достижений школьников детерминируется качеством учебных заданий, предлагаемых им педагогами

Демоверсия ОГЭ 2021

Высший уровень читательской грамотности

- Умение работать с объёмными текстами;
- умение получать информацию, необходимую для решения конкретной учебной задачи, не лежащую на поверхности;
- умение выбирать элементы информации, которые сообщаются не в нужном порядке;
- умение находить часть информации, представленную в виде графиков, рисунков, карт…

Прочитайте внимательно текст и выполните задания 1–5.



На плане изображено домохозяйство по адресу: с. Авдеево, 3-й Поперечный пер., д. 13 (сторона каждой клетки на плане равна 2 м). Участок имеет прямоугольную форму. Выезд и въезд осуществляются через единственные ворота.

При входе на участок справа от ворот находится баня, а слева — гараж, отмеченный на плане цифрой 7. Площадь, занятая гаражом, равна 32 кв. м.

Жилой дом находится в глубине территории. Помимо гаража, жилого дома и бани, на участке имеется сарай (подсобное помещение), расположенный рядом с гаражом, и теплица, построенная на территории огорода (огород отмечен цифрой 2). Перед жилым домом имеются яблоневые посадки.

Все дорожки внутри участка имеют ширину 1 м и вымощены тротуарной плиткой размером 1 м×1 м. Между баней и гаражом имеется площадка площадью 64 кв. м, вымощенная такой же плиткой.

К домохозяйству подведено электричество. Имеется магистральное газоснабжение.

Система заданий и приёмы работы

9 1. Прочитайте в п. 1.7 учебника определение биссектрисы угла и ответьте на вопрос: сколько и какие условия должны выполняться, чтобы можно было утверждать, что данный луч является биссектрисой угла?

____

____.

2. Известно, что луч OK — биссектриса угла AOM. Укажите неверное равенство.

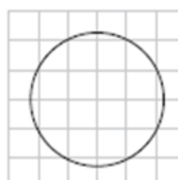
1. $\angle AOK = \frac{1}{2}\angle AOM$ 2. $\angle AOK = \angle KOM$ 3. $\angle AOM = \frac{1}{2}\angle KOM$

13 1. **Используя свойство клетчатой бумаги:**

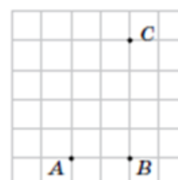
а) отметьте центр окружности и проведите радиусы в узлы клеток;

б) отметьте центр окружности, проходящей через точки A, B и C.

а



б



14 1. **Начертите окружность с центром в точке O и радиусом 2 см. Проведите хорду MN, радиусы OM и ON.**

2. Определите вид треугольника OMN.

____

3. Проведите диаметр ME и отрезок NE. Укажите как можно больше свойств треугольника MNE. ____

____

РАБОТАЕМ С ТЕКСТОМ

п. 2.1

1 1. Прочитайте текст учебника на с. 55 и ответьте на вопросы.

Какую геометрическую фигуру представляет собой:

а) биссектриса треугольника: ______________________________,

её особенности: ______________________________.

отличие от биссектрисы угла: ______________________________

б) медиана треугольника: ______________________________,

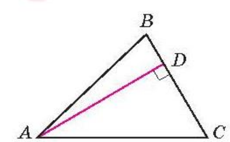
её особенности: ______________________________.

в) высота треугольника: ______________________________,

её особенности: ______________________________.

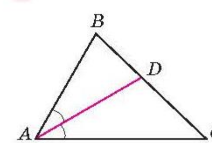
2. Под каждым рисунком подпишите, чем является отрезок AD в треугольнике.

а



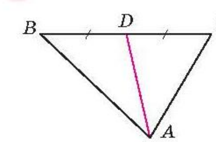
____

б



____

в



____

Составьте верное утверждение.

а) Можно утверждать, что AD — биссектриса треугольника ABC, если:

1. $BD = DC$ 2. $\angle BAD = \angle CAD$ 3. $\angle BDA = \angle CDA$

б) Можно утверждать, что AM — медиана треугольника ABC, если:

1. $AB = AC$ 2. $AM = MC$ 3. $BM = MC$

в) Можно утверждать, что AH — высота треугольника, если:

1. $\angle BAC = 90°$ 2. $\angle AHB = \angle AHC$ 3. $\angle ABC = 90°$

п. 2.2

3 Прочитайте на с. 56 учебника определение равнобедренного треугольника. Запишите, какое свойство равнобедренного треугольника содержит определение.

Система заданий и приёмы работы с текстом теоремы

п. 1.2

3 1. Прочитайте в п. 1.2. учебника теорему о свойстве касательной к окружности и запишите:

условие теоремы: ______________________________

заключение теоремы: ______________________________

2. Запишите теорему на языке «Если ... , то...»: ______________________________

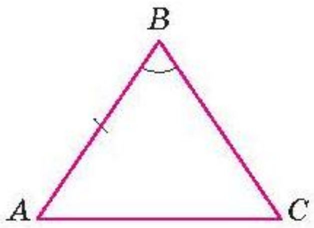
7 1. Прочитайте фрагмент «Первый признак равенства треугольников» п. 2.3 учебника. Запишите:

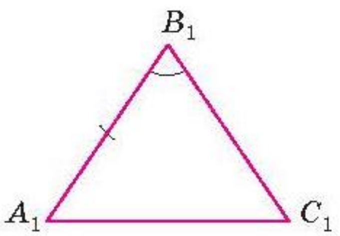
условие теоремы: ______________________________

____

заключение: ______________________________

2. Докажите равенство равнобедренных треугольников по боковой стороне и углу, противолежащему основанию.





Дано: ______________________________

____

Доказать: ______________________________

Доказательство. ______________________________

Система заданий и приёмы работы с текстом задачи

На рисунке отрезок AB — диаметр окружности с центром O. Используя данные рисунка, докажите, что $CD = \frac{1}{2}AB$, и найдите периметр треугольника AOC, если радиус окружности равен 4,5 см.

Дано: ______________________________

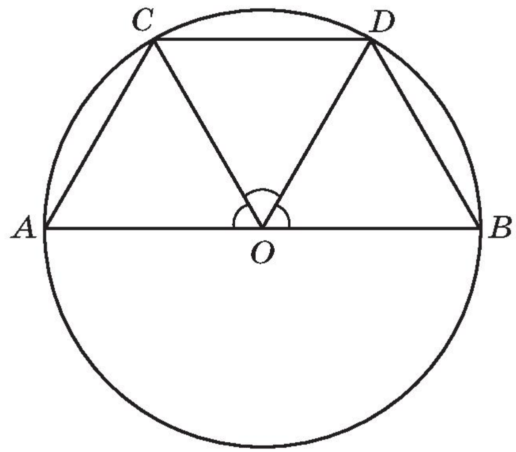
____

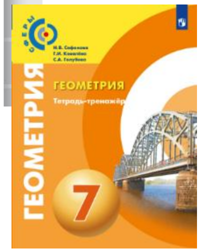
Найти: ______________________________

Решение. ______________________________

____

______________________________ Ответ: ______________





17 1. По краткой записи составьте и запишите текст задачи. Сделайте чертёж и решите задачу. Сколько решений имеет задача?

а) Текст. ______________________________

Дано: $\angle ABD = 33°$, BD — *луч*,
$\angle DBC$ *на* $20°$ *больше* ABD.
Найти: $\angle ABC$.

Решение 1. ______________________________

Решение 2. ______________________________

19 Сформулируйте по-другому текст задачи и решите её.

а) Разность смежных углов равна 45°. Найдите эти углы.

Текст. ______________________________

Дано: ______________________________

Найти: ______________________________

Решение ______________________________

Ответ: ______________________________

б) Один из смежных углов на 200 % больше другого. Найдите эти углы.

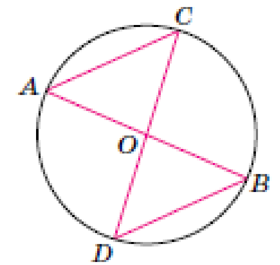
Текст. ______________________________

Решение ______________________________

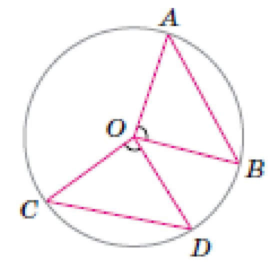
Ответ: ______________________________

Учим работать с информацией, представленной в графическом виде

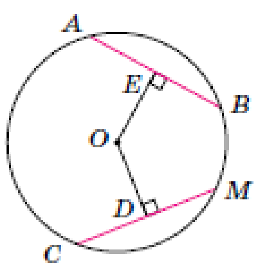
16 AB и CD диаметры окружности с центром O.
Какие геометрические фигуры равны?



17 Углы AOB и COD равны.
Сравните хорды AB и CD.



18 1. *Дано*: $AB = CM$, $OE \perp AB$, $OD \perp CM$.



Докажите: $OE = OD$.

Доказательство.

2. Сформулируйте текст задачи.

19 AB и CM — диаметры окружности. Докажите, что $AM \parallel BC$.

Внимание приёмам и методам математики

Задача. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Известно, что $AB > AC$. Докажите, что $\angle BAM < \angle MAC$.

Решение. По условию задачи выполним чертёж (рис. *1*).

Для доказательства выполним дополнительное построение: на продолжении медианы AM отложим отрезок $MD = AM$ и проведём отрезок BD (рис. *2*).

Рассмотрим треугольники CMA и BMD.

В этих треугольниках $AM = MD$ по построению, $BM = MC$, так как AM — медиана, $\angle AMC = \angle DMB$ — как вертикальные углы, значит, $\triangle CMA = \triangle BMD$ по двум сторонам и углу между ними.

Из равенства треугольников следует, что $\angle MDB = \angle CAM$ и $BD = AC$ как соответственные элементы.

Рассмотрим треугольник DAB. $AB > BD$, так как $BD = AC$, а $AB > AC$ по условию. Против большей стороны лежит больший угол, значит, $\angle MDB > \angle BAM$. Заменим $\angle MDB$ на равный ему $\angle CAM$, получим неравенство $\angle CAM > \angle BAM$, т. е. $\angle BAM < \angle CAM$.

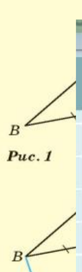


Рис. 1

УДВОЕНИЕ МЕДИАНЫ Для того чтобы научиться решать задачи по геометрии, очень важно освоить отдельные приёмы, методы решения задач. Разобравшись, как такой приём или метод «работает», вы сможете в дальнейшем эффективно его использовать. При решении предыдущей задачи мы пользовались одним из таких приёмов — приёмом удвоения медианы. В чём же он состоит?

Часто для решения задачи надо сначала провести какое-нибудь дополнительное построение (например, в треугольнике провести высоту или в четырёхугольнике провести диагональ).

Одно из важных дополнительных построений — продолжение медианы треугольника.

Если в условии задачи фигурирует медиана треугольника, то очень часто помочь решению может продолжение медианы на отрезок, ей равный, т. е. *удвоение медианы*.

Учебник будет и дальше знакомить вас с приёмами и методами геометрии.

5.6 МЕТОД ПЛОЩАДЕЙ

ВЫ УЗНАЕТЕ:
- В чём состоит метод площадей
- Классический способ доказательства теоремы Пифагора

Понятие площади широко используется при доказательстве теорем и решении задач.

МЕТОД ПЛОЩАДЕЙ Этот метод основан на использовании площади как вспомогательной величины, его ещё называют методом вспомогательной площади. Докажем этим методом теорему о биссектрисе угла треугольника.

3.4 КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД

ВЫ УЗНАЕТЕ:
- Примеры применения метода координат при решении задач

Метод координат является одним из самых универсальных методов. Для того чтобы им воспользоваться, нужно ввести систему координат и записать условие задачи в координатах.

ВЫБОР СИСТЕМЫ КООРДИНАТ Пожалуй, самым главным этапом решения геометрической задачи координатным методом является удобный выбор системы координат, так как успех в решении во многом зависит именно от выбора системы координат.

Есть геометрические фигуры, своим видом подсказывающие выбор системы координат: прямоугольник, ромб, квадрат, окружность... (рис. *3.16, а—д*).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОТ ПРОТИВНОГО Способ рассуждений, который мы применили для доказательства единственности перпендикуляра к прямой, называется **доказательством от противного**, и состоит он в следующем.

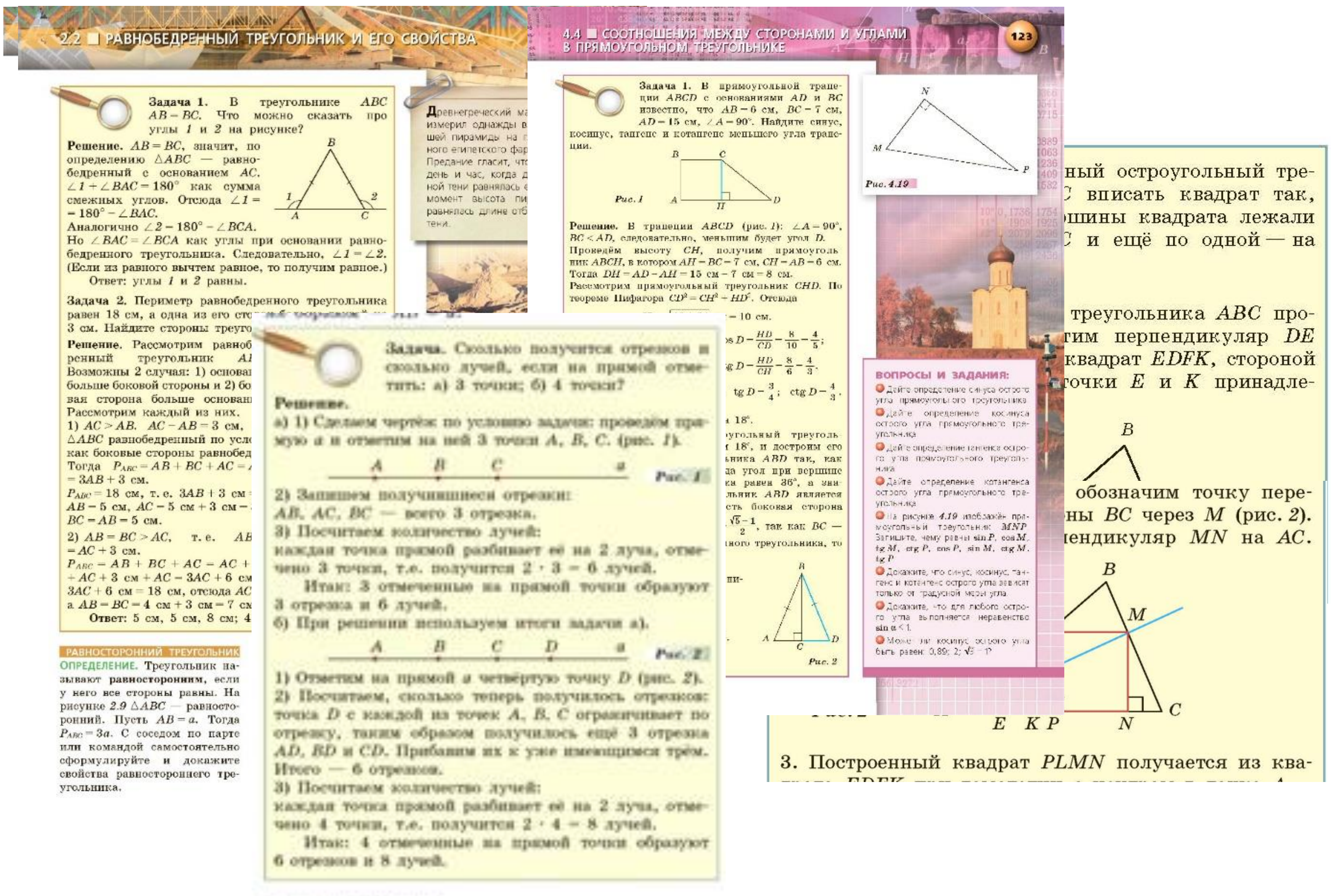
1. Сначала делают предположение, что доказываемое утверждение неверно, и предполагают противоположное тому, что надо доказать.
2. Затем путём рассуждений приходят к выводу, противоречащему уже известным фактам.
3. Чтобы противоречие не возникало, есть лишь одна возможность — справедливость доказываемого утверждения. На этом основании заключают, что предположение неверно, а значит, верно то утверждение, которое нужно было доказать.

5.4 МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ ТОЧЕК В ЗАДАЧАХ НА ПОСТРОЕНИЕ

Одним из самых распространённых методов решения задач на построение является метод геометрических мест точек.

В ЧЁМ СУТЬ МЕТОДА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ ТОЧЕК Рассмотрим ещё раз задачу: построить треугольник по сто-

На теоретических разворотах представлены опорные задачи, где разбираются приёмы, способы рассуждений, методы решения задач



Задача 1. Найдите периметр равнобедренного треугольника, две стороны которого равны 4,8 см и 9,7 см.

Решение. В задаче не указано, какая из сторон является основанием.

Если основание равнобедренного треугольника равно 9,7 см, то боковая сторона будет равна 4,8 см. Проверим, выполняется ли неравенство треугольника: так, основание должно быть меньше суммы боковых сторон, но $9{,}7 > 4{,}8 + 4{,}8$, так как $4{,}8 + 4{,}8 = 9{,}6$. Значит, основание не может быть равным 9,7 см.

Тогда основание равно 4,8 см, а боковая сторона 9,7 см.

И периметр треугольника $P = 4{,}8$ см $+ 2 \cdot 9{,}7$ см $= 24{,}2$ см.

Рис. 1

Задача 2. Докажите, что медиана BM треугольника ABC меньше полусуммы сторон BC и BA.

Решение. Воспользуемся приёмом удвоения медианы: выполнив чертёж по условию задачи, сделаем дополнительное построение — на продолжении медианы BM отложим отрезок $ME = BM$ и соединим точки A и E.

1. Рассмотрим треугольник ABE. Из неравенства треугольника следует, что $BE < AB + AE$. Так как $BE = 2BM$, то $2BM < AB + AE$. $\triangle AME = \triangle CMB$ по двум сторонам и углу между ними:

$AM = MC$, так как BM — медиана, $BM = ME$ по построению, $\angle BMC = \angle AME$ — как вертикальные углы. Тогда $AE = BC$ как соответствующие элементы в равных треугольниках.

В неравенстве $2BM < AB + AE$ заменим AE на равный ему отрезок BC, получим $2BM < AB + BC$, тогда $BM < \frac{1}{2}(AB + BC)$.

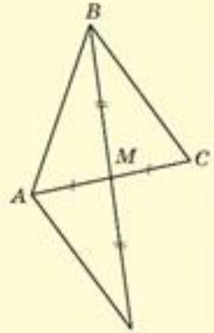


Рис. 2

Задача 1. Найдите периметр равнобедренного треугольника, две стороны которого равны 4,8 см и 9,7 см.

Решение. В задаче не указано, какая из сторон является основанием.

Если основание равнобедренного треугольника равно 9,7 см, то боковая сторона будет равна 4,8 см. Проверим, выполняется ли неравенство треугольника: так, основание должно быть меньше суммы боковых сторон, но $9{,}7 > 4{,}8 + 4{,}8$, так как $4{,}8 + 4{,}8 = 9{,}6$. Значит, основание не может быть равным 9,7 см.

Тогда основание равно 4,8 см, а боковая сторона 9,7 см.

И периметр треугольника $P = 4{,}8$ см $+ 2 \cdot 9{,}7$ см $= 24{,}2$ см.

Рис. 1

Задача 2. Докажите, что медиана BM треугольника ABC меньше полусуммы сторон BC и BA.

Решение. Воспользуемся приёмом удвоения медианы: выполнив чертёж по условию задачи, сделаем дополнительное построение — на продолжении медианы BM отложим отрезок $ME = BM$ и соединим точки A и E.

1. Рассмотрим треугольник ABE. Из неравенства треугольника следует, что $BE < AB + AE$. Так как $BE = 2BM$, то $2BM < AB + AE$. $\triangle AME = \triangle CMB$ по двум сторонам и углу между ними:

$AM = MC$, так как BM — медиана, $BM = ME$ по построению, $\angle BMC = \angle AME$ — как вертикальные углы. Тогда $AE = BC$ как соответствующие элементы в равных треугольниках.

В неравенстве $2BM < AB + AE$ заменим AE на равный ему отрезок BC, получим $2BM < AB + BC$, тогда $BM < \frac{1}{2}(AB + BC)$.

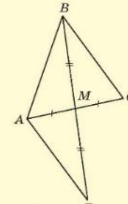


Рис. 2

ЗАДАЧИ

1. Существует ли треугольник, одна из сторон которого на 5 см меньше второй и на 3 см меньше третьей стороны, а периметр равен 18 см?
2. Будут ли располагаться на одной прямой точки A, B и C, если $AB = 1{,}4$ см, $BC = 1{,}8$ см, $AC = 3$ см?
3. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 20 см, а другая равна 8 см. Какая из них является основанием?
4. Найдите периметр равнобедренного треугольника, если его стороны равны 5,2 см и 7,6 см.
5. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC, в котором $AB > BC$. Докажите, что $AD > DC$.
6. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены соответственно точки D, E и K, отличные от вершин треугольника. Докажите, что периметр треугольника DEK меньше периметра треугольника ABC.
7. Дан равносторонний треугольник ABC. Внутри него взята некоторая точка O. Докажите, что $OA < OB + OC$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

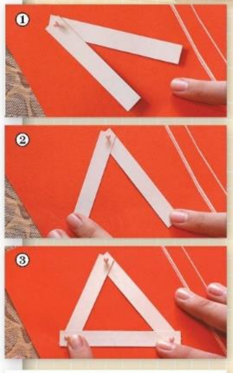
- В каком случае три отрезка могут быть сторонами треугольника?
- Докажите теорему, выражающую неравенство треугольника.
- Существует ли треугольник со сторонами: а) 8, 3, 5; б) 8, 3, 4; в) 8, 5, 5?
- Существует ли треугольник, периметр которого равен 24 см, а одна из сторон 12 см?

Геометрия и жизнь

доказательство будет аналогичным приведённому. Проведите его самостоятельно. ▼

ЖЁСТКОСТЬ ТРЕУГОЛЬНИКА Из третьего признака равенства треугольников следует важнейшее свойство треугольника — его жёсткость.

Проведите такой эксперимент:
1. Возьмите две полоски бумаги и соедините их булавкой (фото 1).
2. Убедитесь, что можно изменять угол между полосками, произвольно двигая их (фото 2).
3. Скрепите две детали третьей и убедитесь, что невозможно изменить получившийся треугольник, не разрушив конструкции (фото 3).



Свойство жёсткости треугольника широко используется на практике. Так, чтобы стремянка не раздвигалась, а стояла жёстко, стойки стремянки фиксируют перемычкой; чтобы садовая калитка не деформировалась, приколачивают рейку, образующую треугольник со штакетником; в конфигурации стропил крыши должны быть треугольники и т. д.

Жёсткость треугольника используют в промышленном строительстве: например, любая ферма моста состоит из треугольников, и чем треугольников больше, тем конструкция прочнее.

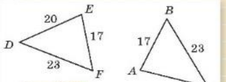


Рис. 2.29

ЗАДАЧИ

1 На рисунке *2.26*: $AB = CD$, $BC = AD$. Докажите, что $\angle B = \angle D$.

2 На рисунке *2.27*: $AC = AD$, $BC = BD$. Найдите угол BAC, если угол $BAD = 34°$.

3 Докажите, что два равнобедренных треугольника равны, если боковая сторона и основание одного треугольника соответственно равны боковой стороне и основанию другого треугольника.

4 На рисунке *2.28*: $AB = CD$, $BC = AD$, BM — биссектриса угла ABC, DK — биссектриса угла ADC. Докажите, что $\triangle ABM = \triangle CDK$.

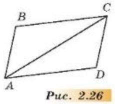


Рис. 2.26

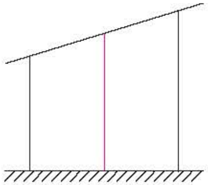
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:
Сформулируйте и докажите соседу по парте третий признак равенства треугольников.
Какой элемент треугольника ABC на рисунке 2.29 нужно отметить, чтобы утверждать, что треугольники DEF и ABC равны по третьему признаку равенства треугольников?

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте и докажите соседу по парте третий признак равенства треугольников.
- Какой элемент треугольника ABC на рисунке *2.29* нужно отметить, чтобы утверждать, что треугольники DEF и ABC равны по третьему признаку равенства треугольников?
- Придумайте эксперимент для доказательства факта, что прямоугольник не является жёсткой фигурой. Предложите способ, как сделать конструкцию из прямоугольника жёсткой. Где на практике можно использовать предложенный вами способ?

ПРИМЕНЯЕМ ГЕОМЕТРИЮ

1. Над скамейками на школьном стадионе сделан навес от дождя и солнца, стоящий по боковым сторонам на двух столбах. Решено укрепить конструкцию, поставив между этими столбами ещё один ровно посередине. Какой длины нужен столб, если высота большего из стоящих столбов равна 3,2 м, меньшего — 2,3 м, а столб нужно вкопать на глубину 0,6 м?



2. Предложите способ, как, имея лист А4, одними перегибаниями листа получить:

а) параллелограмм, не являющийся прямоугольником: ____________________

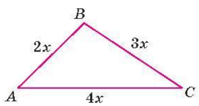
____

б) ромб: ____________________________________

Рубрика «Выполняем тест»

ВЫПОЛНЯЕМ ТЕСТ

1. Чему равна наименьшая сторона треугольника, если его периметр равен 27?



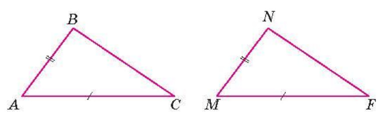
Ответ: ______________

2. Основание равнобедренного треугольника равно 7 см, а периметр равен 19 см. Чему равна боковая сторона треугольника?

1. 5 см 2. 6 см 3. 7 см 4. 12 см

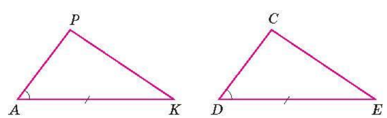
3. Из равенства треугольников ABC и MNF следует, что:

1. $\angle B = \angle M$
2. $\angle B = \angle N$
3. $\angle B = \angle F$

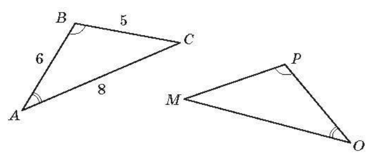


4. Какое из представленных ниже равенств нужно установить для доказательства равенства треугольников APK и CED?

1. $AP = DE$
2. $AP = CE$
3. $AP = CD$



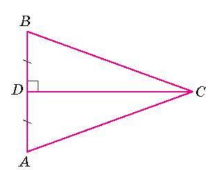
5. На рисунке $\triangle ABC = \triangle MPO$. Чему равна сторона OP?



Ответ: ______________

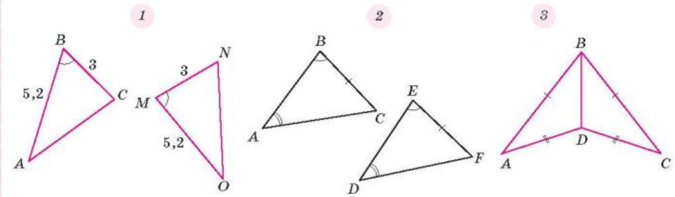
6. По какому признаку равенства треугольников равны треугольники на рисунке?

1. По первому признаку равенства треугольников
2. По второму признаку равенства треугольников
3. По третьему признаку равенства треугольников
4. Невозможно установить равенство



Ответ: ______________

7. Запишите номера рисунков, где изображены равные треугольники.



Ответ: ______________

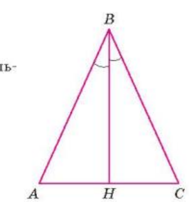
8. Выберите верные утверждения и запишите их номера.

1. Если треугольники равны, то равны все соответствующие элементы треугольников.
2. Периметр равностороннего треугольника в три раза больше его стороны.
3. Если в треугольнике периметр в три раза больше одной из его сторон, то этот треугольник равносторонний.
4. В равностороннем треугольнике сумма длин медиан равна сумме длин его высот.
5. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая из вершины треугольника, противоположной основанию, разбивает его на два равных треугольника.
6. Если биссектриса AM треугольника ABC разбивает его на два равных треугольника, то $AB = BC$.
7. Равносторонний треугольник является равнобедренным.
8. Для доказательства равенства треугольников достаточно установить равенство трёх пар элементов в этих треугольниках.

Ответ: ______________

9. Выберите верное равенство, если известно, что треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC.

1. $\angle ABC = \angle ACB$
2. $\angle BAC = \angle BCH$
3. $\angle AHB = \angle CHB$



Ответ: ______________

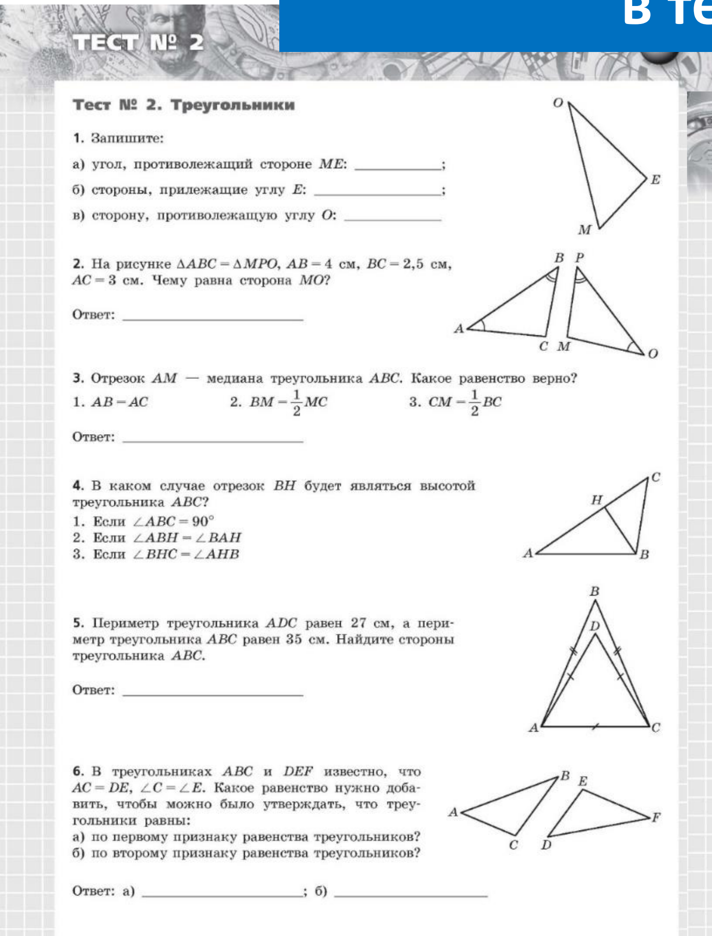
10. В треугольнике MPC известно, что $\angle M = \angle C$, биссектриса PE делит сторону MC пополам, $ME = 9{,}6$ см. Чему равна сторона MC?

Ответ: ______________

11. В треугольнике ABC: $AB = BC$, BM — медиана, $\angle ABC = 44^\circ$. Тогда

$\angle ABM =$ ________ $\angle AMB =$ ________

Тесты «Проверь себя» к каждой главе в тетради-экзаменаторе



Тест № 2. Треугольники

1. Запишите:

а) угол, противолежащий стороне ME: ____________;

б) стороны, прилежащие углу E: ________________;

в) сторону, противолежащую углу O: _____________

2. На рисунке $\Delta ABC = \Delta MPO$, $AB = 4$ см, $BC = 2{,}5$ см, $AC = 3$ см. Чему равна сторона MO?

Ответ: ______________________

3. Отрезок AM — медиана треугольника ABC. Какое равенство верно?

1. $AB = AC$ 2. $BM = \frac{1}{2}MC$ 3. $CM = \frac{1}{2}BC$

Ответ: ______________________

4. В каком случае отрезок BH будет являться высотой треугольника ABC?

1. Если $\angle ABC = 90°$
2. Если $\angle ABH = \angle BAH$
3. Если $\angle BHC = \angle AHB$

5. Периметр треугольника ADC равен 27 см, а периметр треугольника ABC равен 35 см. Найдите стороны треугольника ABC.

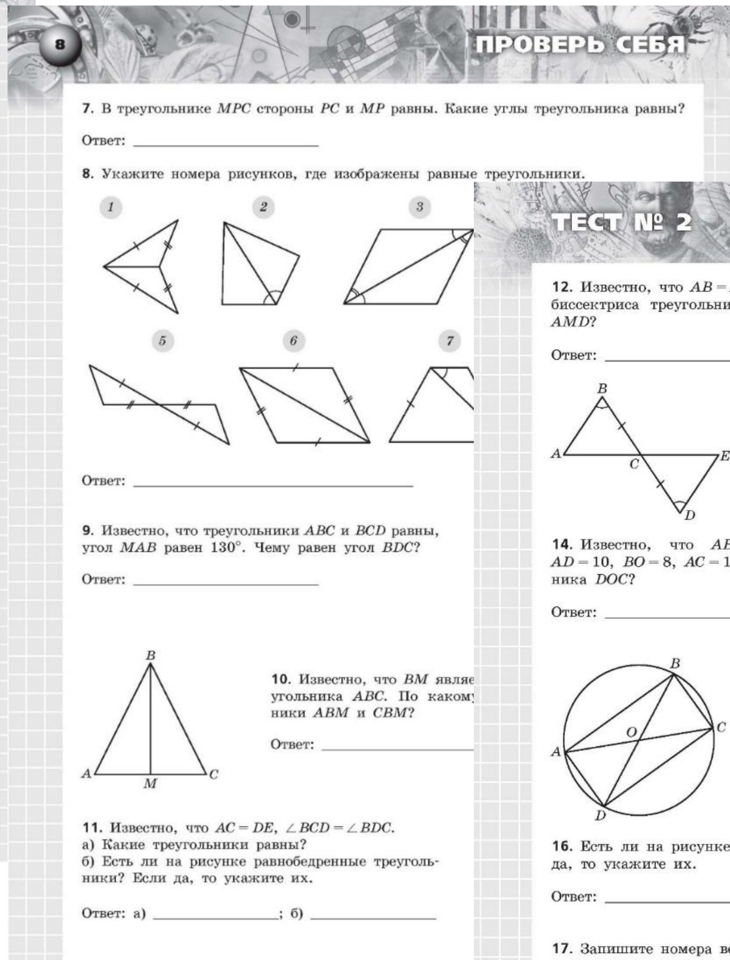
Ответ: ______________________

6. В треугольниках ABC и DEF известно, что $AC = DE$, $\angle C = \angle E$. Какое равенство нужно добавить, чтобы можно было утверждать, что треугольники равны:

а) по первому признаку равенства треугольников?

б) по второму признаку равенства треугольников?

Ответ: а) ____________________; б) ____________________



7. В треугольнике MPC стороны PC и MP равны. Какие углы треугольника равны?

Ответ: ______________________

8. Укажите номера рисунков, где изображены равные треугольники.

Ответ: ____________________________________

9. Известно, что треугольники ABC и BCD равны, угол MAB равен 130°. Чему равен угол BDC?

Ответ: ______________________

10. Известно, что BM являе… угольника ABC. По какому… ники ABM и CBM?

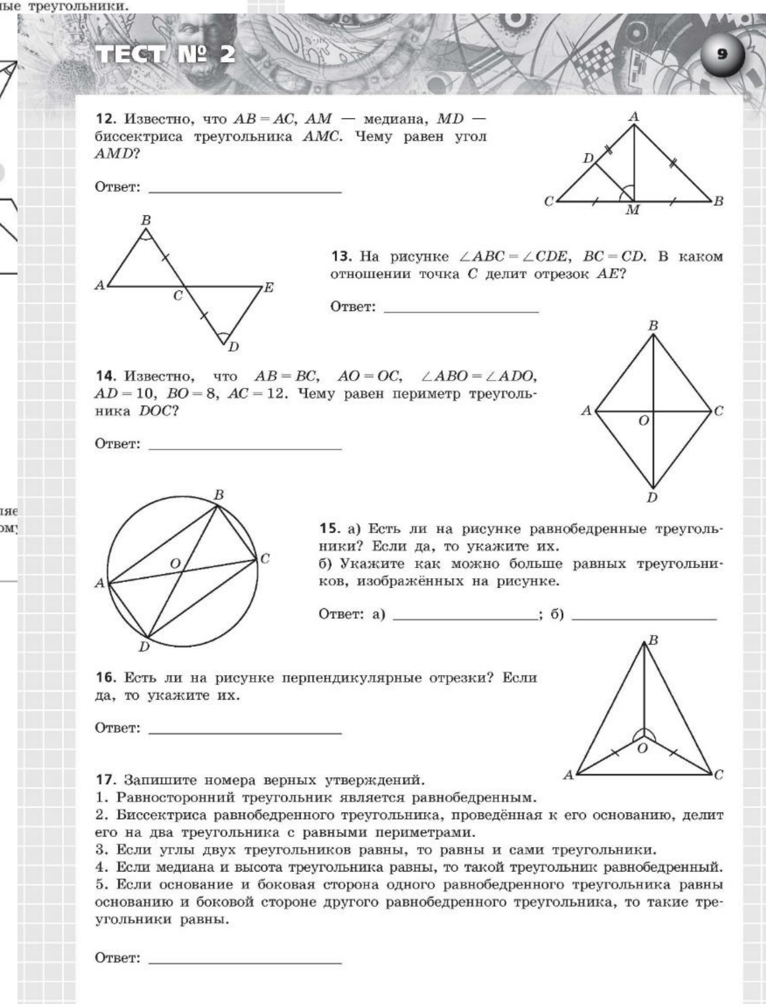
Ответ: ______________

11. Известно, что $AC = DE$, $\angle BCD = \angle BDC$.

а) Какие треугольники равны?

б) Есть ли на рисунке равнобедренные треугольники? Если да, то укажите их.

Ответ: а) ________________; б) ________________



12. Известно, что $AB = AC$, AM — медиана, MD — биссектриса треугольника AMC. Чему равен угол AMD?

Ответ: ______________________

13. На рисунке $\angle ABC = \angle CDE$, $BC = CD$. В каком отношении точка C делит отрезок AE?

Ответ: ____________________

14. Известно, что $AB = BC$, $AO = OC$, $\angle ABO = \angle ADO$, $AD = 10$, $BO = 8$, $AC = 12$. Чему равен периметр треугольника DOC?

Ответ: ______________________

15. а) Есть ли на рисунке равнобедренные треугольники? Если да, то укажите их.

б) Укажите как можно больше равных треугольников, изображённых на рисунке.

Ответ: а) __________________; б) __________________

16. Есть ли на рисунке перпендикулярные отрезки? Если да, то укажите их.

Ответ: ______________________

17. Запишите номера верных утверждений.

1. Равносторонний треугольник является равнобедренным.
2. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая к его основанию, делит его на два треугольника с равными периметрами.
3. Если углы двух треугольников равны, то равны и сами треугольники.
4. Если медиана и высота треугольника равны, то такой треугольник равнобедренный.
5. Если основание и боковая сторона одного равнобедренного треугольника равны основанию и боковой стороне другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.

Ответ: ______________________

Завершённая линия учебников Геометрия 7 – 9 кл.

Авторы: **Берсенев А.А., Сафонова Н.В.**

Номер в ФПУ:

7 кл – 1.1.2.4.3.2.1

8 кл. – 1-1.2.4.3.2.2

8 кл. – 1-1.2.4.3.2.3

Шлейф УМК «Геометрия 7-9»

Тетрадь-тренажёр

Тетрадь-экзаменатор

Поурочные методические рекомендации

Задачник

Геометрия в компьютерной среде

Где купить

https://shop.prosv.ru/katalog?FilterByArrtibuteId=13!2995&utm_campaign=vebinary_17_21_avgusta_Prosv&utm_medium=email&utm_source=Sendsay#/orderby=5&sFilters=4!2304;2!1721;13!2995;13!2995

ПРОСВЕЩЕНИЕ

https://shop.prosv.ru/katalog?FilterByArrtibuteId=13!2995&utm_campaign=vebinary_17_21_avgusta_Prosv&utm_medium=email&utm_source=Sendsay#/orderby=5&sFilters=4!2304;2!1721;13!2995;13!2995

Сафонова Н. В., Ковалева Г. И., Голубева С.А.

Геометрия. Тетрадь-тренажёр. 7 класс

195,00 ₽

СООБЩИТЬ О ПОСТУПЛЕНИИ

Берсенев А.А., Сафонова Н.В.

Геометрия. 7 класс.

461,00 ₽

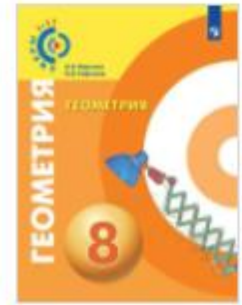
В КОРЗИНУ

Коллектив авторов

Геометрия. 7 класс. Электронная форма учебника

150,00 ₽

В КОРЗИНУ



Берсенев А.А., Сафонова Н.В.

Геометрия. 8 класс.

461,00 ₽

В КОРЗИНУ

Коллектив авторов

Геометрия. 8 класс

Берсенев А.А., Сафонова Н.В.

Геометрия. 9 класс

Берсенев А.А., Сафонова Н.В.

Геометрия. 9 класс

коллектив автор

Геометрия. 9 класс

СФЕРЫ

Сафонова Наталья Васильевна

8 953 150 90 10

nvsafonova@mail.ru

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

ПРОСВЕЩЕНИЕ

Новая завершённая линия учебников «Геометрия 7-9» авторов Берсенева А.А. и Сафоновой Н.В. – современный УМК для ума и для жизни

Сафонова Наталья Васильевна,
автор УМК «Геометрия 7-9»,
ведущий методист
Санкт-Петербургского филиала
АО «Издательство «Просвещение»

Завершённая линия учебников Геометрия 7 – 9 кл.

Авторы: **Берсенев А.А., Сафонова Н.В.**

Номер в ФПУ:

7 кл – 1.1.2.4.3.2.1

8 кл. – 1-1.2.4.3.2.2

8 кл. – 1-1.2.4.3.2.3

Шлейф УМК «Геометрия 7-9»

Тетрадь-тренажёр

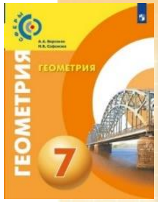
Тетрадь-экзаменатор

Поурочные методические рекомендации

Задачник

Геометрия в компьютерной среде

Содержание учебника 7 класса



СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 5
РАБОТАЕМ С УЧЕБНИКОМ 6

Глава 1 НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ
1.1. Что изучает геометрия 8
1.2. Точка. Прямая. Плоскость 10
1.3. Прямая. Луч. Отрезок 12
1.4. Сравнение отрезков 14
1.5. Измерение отрезков. Расстояние между точками 16
1.6. Луч и угол 18
1.7. Сравнение углов 20
1.8. Измерение углов 22
1.9. Смежные углы 24
1.10. Вертикальные углы 26
1.11. Перпендикулярные прямые 28
1.12. Окружность 32
1.13. О симметрии 34
1.14. Теоремы, аксиомы, определения 38
Решаем задачи 40
Подведём итоги 52

Глава 2 ТРЕУГОЛЬНИКИ
2.1. Треугольник 54
2.2. Равнобедренный треугольник и его свойства 56
2.3. Первый признак равенства треугольников 58
2.4. Второй признак равенства треугольников 60
2.5. Третий признак равенства треугольников 62
2.6. Признаки равнобедренного треугольника 64
Решаем задачи 66
Подведём итоги 78

Глава 3 ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ
3.1. Параллельные прямые 80
3.2. Признаки параллельности прямых 82
3.3 Аксиома параллельных прямых 84
3.4. Свойства параллельных прямых 86
3.5. Углы с соответственно параллельными сторонами 88
Решаем задачи 90
Подведём итоги 98

Глава 4 СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА
4.1. Сумма углов треугольника 100
4.2. Соотношения между сторонами и углами треугольника 102
4.3. Неравенство треугольника 104
4.4. Прямоугольный треугольник 106
4.5. Признаки равенства прямоугольных треугольников 108
Решаем задачи 110
Подведём итоги 118

Глава 5 ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ
5.1. Геометрическое место точек 120
5.2. Основные задачи на построение 122
5.3. Задачи на построение 126
5.4. Метод геометрических мест точек в задачах на построение 130

Решаем задачи 132
Подведём итоги 138
Это вы можете 139
Проекты, которые мы рекомендуем 141
Список литературы 142

Содержание учебников 8 и 9 классов

СОДЕРЖАНИЕ

Работаем с учебником . . . 4
Повторение . . . 5

Глава 1 ОКРУЖНОСТЬ
1.1. Окружность . . . 10
1.2. Окружность и прямая . . . 12
1.3. Центральный и вписанный углы . . . 14
1.4. Хорды и дуги . . . 18
1.5. Окружность, вписанная в треугольник . . . 20
1.6. Окружность, описанная около треугольника . . . 22
Решаем задачи . . . 24
Подведём итоги . . . 38

Глава 2 ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ
2.1. Четырёхугольник и его свойства . . . 40
2.2. Параллелограмм и его свойства . . . 44
2.3. Признаки параллелограмма . . . 48
2.4. Прямоугольник . . . 50
2.5. Ромб . . . 52
2.6. Квадрат . . . 54
2.7. Средняя линия треугольника . . . 56
2.8. Трапеция . . . 58
2.9. Теорема Фалеса . . . 60
2.10. Вписанные и описанные четырёхугольники . . . 62
Решаем задачи . . . 66
Подведём итоги . . . 82

Глава 3 ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ
3.1. Пропорциональные отрезки . . . 84
3.2. Подобие треугольников . . . 88
3.3. Признаки подобия треугольников . . . 92
3.4. Метод подобия и некоторые метрические соотношения в окружности . . . 96
3.5. Свойство биссектрисы треугольника . . . 98
3.6. Замечательные точки в треугольнике . . . 100
Решаем задачи . . . 104
Подведём итоги . . . 112

Глава 4 РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ
4.1. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике . . . 114
4.2. Среднее геометрическое и среднее арифметическое двух отрезков . . . 116
4.3. Теорема Пифагора . . . 118
4.4. Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике . . . 120
4.5. Тригонометрические тождества . . . 124
4.6. Решение прямоугольных треугольников . . . 128
Решаем задачи . . . 132
Подведём итоги . . . 144

Глава 5 ПЛОЩАДЬ
5.1. Площадь многоугольника . . . 146
5.2. Площадь прямоугольника . . . 150
5.3. Площадь параллелограмма . . . 152
5.4. Площадь треугольника . . . 154
5.5. Площадь трапеции . . . 158
5.6. Метод площадей . . . 160
Решаем задачи . . . 162
Подведём итоги . . . 172

Проекты, которые мы рекомендуем . . . 173
Список литературы . . . 173
Это вы можете . . . 174
Таблица значений тригонометрических функций . . . 175

СОДЕРЖАНИЕ

Работаем с учебником . . . 4
Повторение . . . 5

Глава 1 РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ
1.1. Тригонометрические функции угла от 0° до 180° . . . 18
1.2. Теорема косинусов . . . 22
1.3. Теорема синусов . . . 26
1.4. Решение треугольников . . . 28
1.5. Применение тригонометрических функций к вычислению площадей . . . 32
Решаем задачи . . . 34
Подведём итоги . . . 46

Глава 2 ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА
2.1. Многоугольники . . . 48
2.2. Правильные многоугольники . . . 52
2.3. Длина окружности . . . 56
2.4. Площадь круга . . . 58
Решаем задачи . . . 60
Подведём итоги . . . 72

Глава 3 МЕТОД КООРДИНАТ
3.1. Декартова система координат . . . 74
3.2. Уравнение окружности . . . 78
3.3. Уравнение прямой . . . 80
3.4. Координатный метод . . . 84
Решаем задачи . . . 88
Подведём итоги . . . 96

Глава 4 ВЕКТОРЫ
4.1. Вектор . . . 98
4.2. Координаты вектора . . . 102
4.3. Сложение векторов . . . 104
4.4. Разность векторов . . . 108
4.5. Умножение вектора на число . . . 110
4.6. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам . . . 112
4.7. Применение векторов к решению задач . . . 114
4.8. Скалярное произведение векторов . . . 116
4.9. Применение скалярного произведения к решению задач . . . 120
Решаем задачи . . . 122
Подведём итоги . . . 138

Глава 5 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
5.1. Движение . . . 140
5.2. Осевая симметрия . . . 144
5.3. Параллельный перенос . . . 146
5.4. Поворот . . . 148
5.5. Преобразования подобия . . . 150
Решаем задачи . . . 154
Подведём итоги . . . 164

Выполняем тест . . . 165
Проекты. Список литературы . . . 174
Таблица значений тригонометрических функций . . . 175

Преимущества УМК «Геометрия 7-9»

1. Внимание к мотивационной составляющей курса: современный, дружественный ребенку дизайн. Практико-ориентированный курс.
2. Доступность изучаемого материала учащимся с разным уровнем способностей.
3. Реализует компетентностный подход в обучении. Направлен на эффективное формирование функциональной грамотности.
4. Многоуровневая система заданий:

- большое количество простых заданий для формирования предметных умений и навыков у слабых учащихся;
- большое количество заданий на готовых чертежах;
- большое количество заданий и базового, и повышенных уровней;
- исследовательские и проектные задания;
- задания высокого уровня для подготовки к олимпиадам;
- возможность углублённого изучения предмета;
- возможность организации внеурочной деятельности.

5. *Все теоремы* курса рассматриваются *в теоретических разворотах*.
6. Усиленное внимание приёмам и методам математики.
7. Эффективная подготовка к итоговой аттестации: ОГЭ, ВПР, НИКО, PISA.
8. Формирование оценочной самостоятельности.
9. Возможность достижения высоких результатов обучения, работая только с учебником.

Яркий мир учебника заинтересовывает учащихся, создаёт положительную мотивацию к обучению

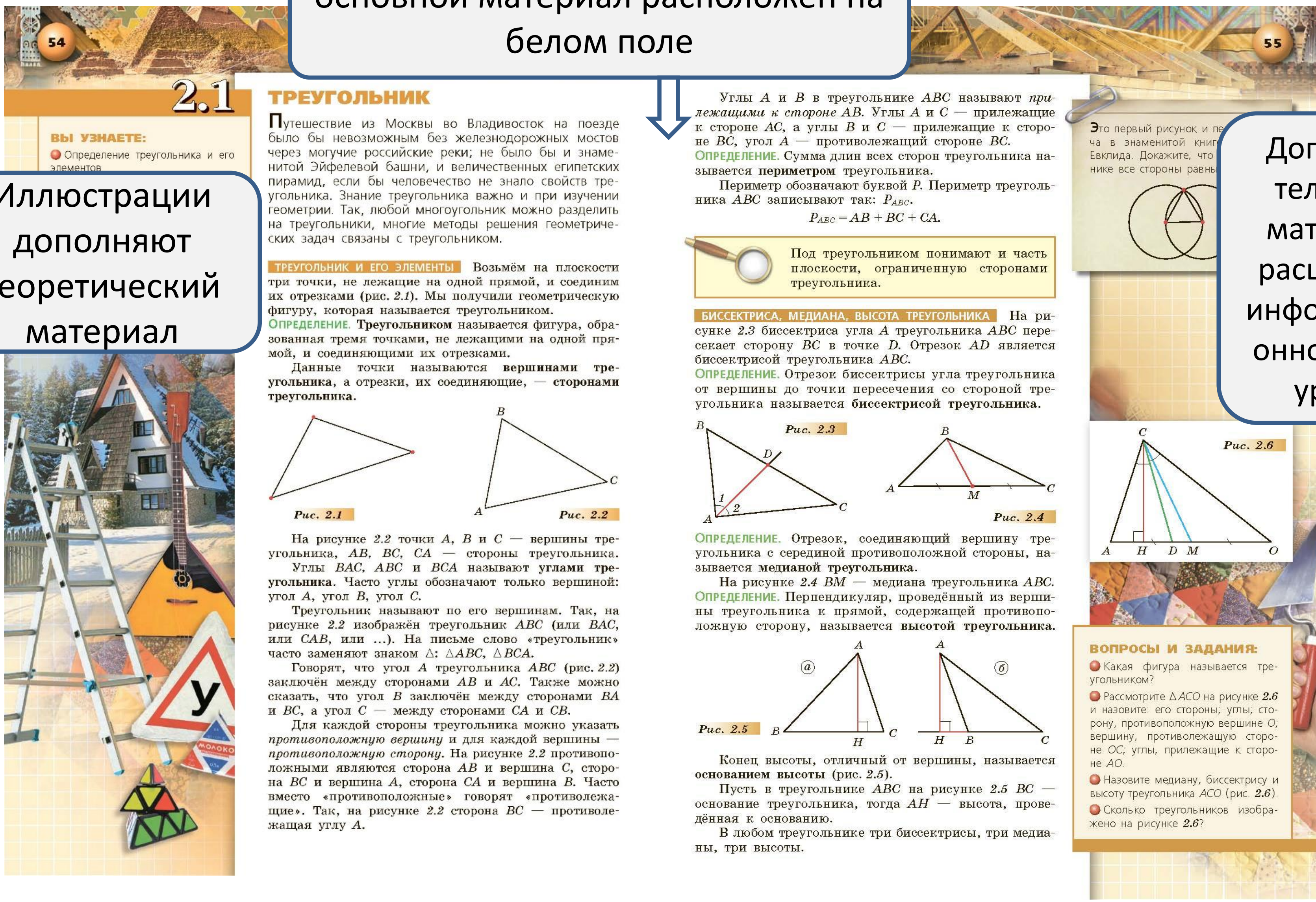
УМК эффективно способствует созданию положительной мотивации к обучению.
Учебники выполнены в сферовском формате, учитывающим все современные дизайнерские и методические решения.
Яркие цветные иллюстрации, отражающие применение изучаемого материала в повседневной жизни, особым образом структурированный учебный материал, доступность учебных текстов заинтересовывают учащихся, мотивируют их к изучению геометрии.

Создание положительной мотивации к обучению через особым образом структурированный материал

основной материал расположен на белом поле

Иллюстрации дополняют теоретический материал

Дополнительный материал расширяет информационное поле урока



2.1

ТРЕУГОЛЬНИК

ВЫ УЗНАЕТЕ:
- Определение треугольника и его элементов

Путешествие из Москвы во Владивосток на поезде было бы невозможным без железнодорожных мостов через могучие российские реки; не было бы и знаменитой Эйфелевой башни, и величественных египетских пирамид, если бы человечество не знало свойств треугольника. Знание треугольника важно и при изучении геометрии. Так, любой многоугольник можно разделить на треугольники, многие методы решения геометрических задач связаны с треугольником.

ТРЕУГОЛЬНИК И ЕГО ЭЛЕМЕНТЫ Возьмём на плоскости три точки, не лежащие на одной прямой, и соединим их отрезками (рис. 2.1). Мы получили геометрическую фигуру, которая называется треугольником.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Треугольником** называется фигура, образованная тремя точками, не лежащими на одной прямой, и соединяющими их отрезками.

Данные точки называются **вершинами треугольника**, а отрезки, их соединяющие, — **сторонами треугольника**.

Рис. 2.1

Рис. 2.2

На рисунке 2.2 точки A, B и C — вершины треугольника, AB, BC, CA — стороны треугольника. Углы BAC, ABC и BCA называют **углами треугольника**. Часто углы обозначают только вершиной: угол A, угол B, угол C.

Треугольник называют по его вершинам. Так, на рисунке 2.2 изображён треугольник ABC (или BAC, или CAB, или ...). На письме слово «треугольник» часто заменяют знаком $\triangle$: $\triangle ABC$, $\triangle BCA$.

Говорят, что угол A треугольника ABC (рис. 2.2) заключён между сторонами AB и AC. Также можно сказать, что угол B заключён между сторонами BA и BC, а угол C — между сторонами CA и CB.

Для каждой стороны треугольника можно указать *противоположную вершину* и для каждой вершины — *противоположную сторону*. На рисунке 2.2 противоположными являются сторона AB и вершина C, сторона BC и вершина A, сторона CA и вершина B. Часто вместо «противоположные» говорят «противолежащие». Так, на рисунке 2.2 сторона BC — противолежащая углу A.

Углы A и B в треугольнике ABC называют *прилежащими к стороне AB*. Углы A и C — прилежащие к стороне AC, а углы B и C — прилежащие к стороне BC, угол A — противолежащий стороне BC.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Сумма длин всех сторон треугольника называется **периметром** треугольника.

Периметр обозначают буквой P. Периметр треугольника ABC записывают так: P_{ABC}.

$$P_{ABC} = AB + BC + CA.$$

Под треугольником понимают и часть плоскости, ограниченную сторонами треугольника.

БИССЕКТРИСА, МЕДИАНА, ВЫСОТА ТРЕУГОЛЬНИКА На рисунке 2.3 биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D. Отрезок AD является биссектрисой треугольника ABC.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отрезок биссектрисы угла треугольника от вершины до точки пересечения со стороной треугольника называется **биссектрисой треугольника**.

Рис. 2.3

Рис. 2.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется **медианой треугольника**.

На рисунке 2.4 BM — медиана треугольника ABC.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется **высотой треугольника**.

Рис. 2.5

Конец высоты, отличный от вершины, называется **основанием высоты** (рис. 2.5).

Пусть в треугольнике ABC на рисунке 2.5 BC — основание треугольника, тогда AH — высота, проведённая к основанию.

В любом треугольнике три биссектрисы, три медианы, три высоты.

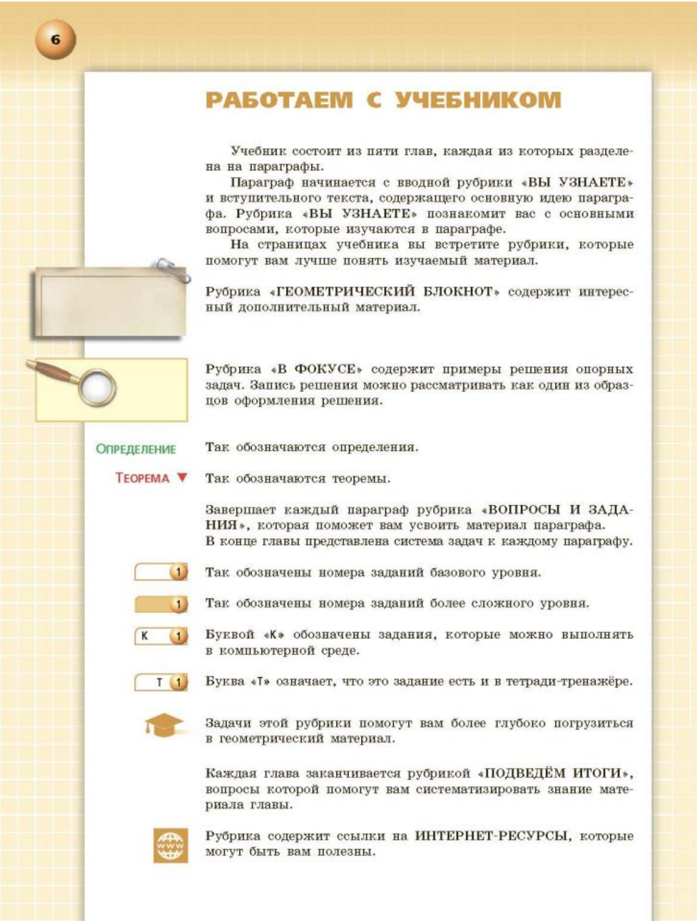
Это первый рисунок и пе... ча в знаменитой книг... Евклида. Докажите, что ... нике все стороны равны...

Рис. 2.6

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:
- Какая фигура называется треугольником?
- Рассмотрите $\triangle ACO$ на рисунке 2.6 и назовите: его стороны; углы; сторону, противоположную вершине O; вершину, противолежащую стороне OC; углы, прилежащие к стороне AO.
- Назовите медиану, биссектрису и высоту треугольника ACO (рис. 2.6).
- Сколько треугольников изображено на рисунке 2.6?

Учебники имеют строгий формат:
поразворотный принцип и рубрикация позволяют учащимся лучше ориентироваться в учебном материале, учат работать с информацией, представленной в разных видах: текстовой, графической, иллюстративной.
Принцип: один разворот – один параграф диктует тщательную работу над текстом учебника, что делает тексты доступными и понятными для учащихся.
Ученик, пропустивший занятия, может самостоятельно изучить материал. Иллюстрации и советы отображают применение учебного материала в практической жизни, что эффективно способствует формированию функциональной грамотности.
Каждый параграф начинается с вводной части, несущей мотивационную нагрузку и содержащей практико-ориентированные сведения.

Рубрики на страницах учебников 7-9



РАБОТАЕМ С УЧЕБНИКОМ

Учебник состоит из пяти глав, каждая из которых разделена на параграфы.

Параграф начинается с вводной рубрики «ВЫ УЗНАЕТЕ» и вступительного текста, содержащего основную идею параграфа. Рубрика «ВЫ УЗНАЕТЕ» познакомит вас с основными вопросами, которые изучаются в параграфе.

На страницах учебника вы встретите рубрики, которые помогут вам лучше понять изучаемый материал.

Рубрика «ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ БЛОКНОТ» содержит интересный дополнительный материал.

Рубрика «В ФОКУСЕ» содержит примеры решения опорных задач. Запись решения можно рассматривать как один из образцов оформления решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Так обозначаются определения.

ТЕОРЕМА ▼ Так обозначаются теоремы.

Завершает каждый параграф рубрика «ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ», которая поможет вам усвоить материал параграфа. В конце главы представлена система задач к каждому параграфу.

1 Так обозначены номера заданий базового уровня.

1 Так обозначены номера заданий более сложного уровня.

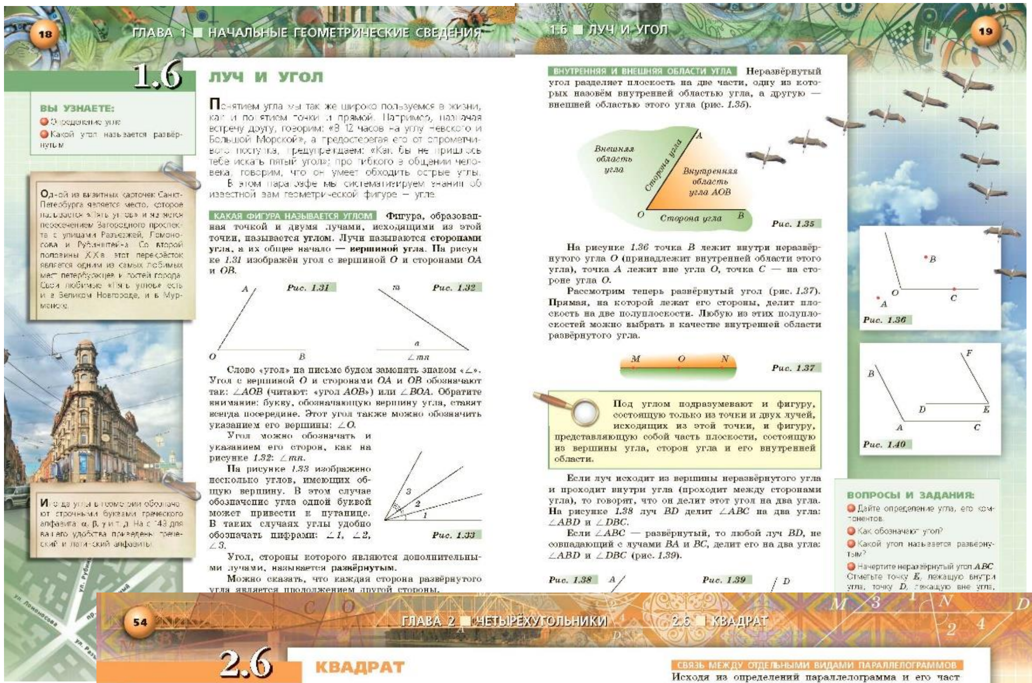
К 1 Буквой «К» обозначены задания, которые можно выполнять в компьютерной среде.

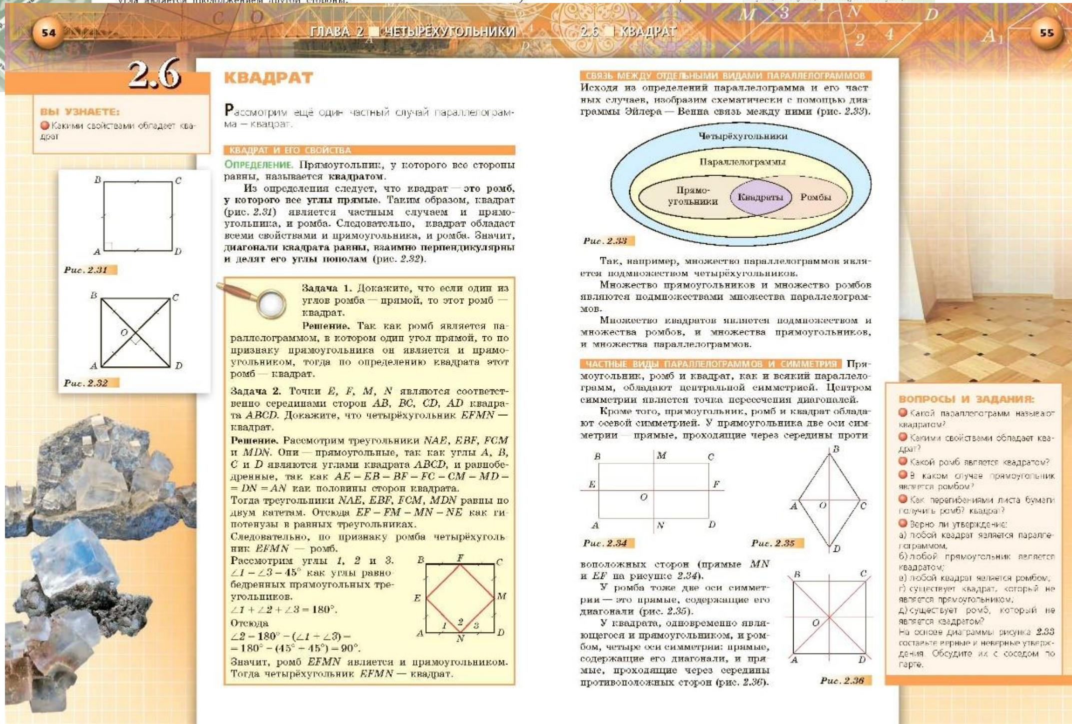
Т 1 Буква «Т» означает, что это задание есть и в тетради-тренажёре.

Задачи этой рубрики помогут вам более глубоко погрузиться в геометрический материал.

Каждая глава заканчивается рубрикой «ПОДВЕДЁМ ИТОГИ», вопросы которой помогут вам систематизировать знание материала главы.

Рубрика содержит ссылки на ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ, которые могут быть вам полезны.

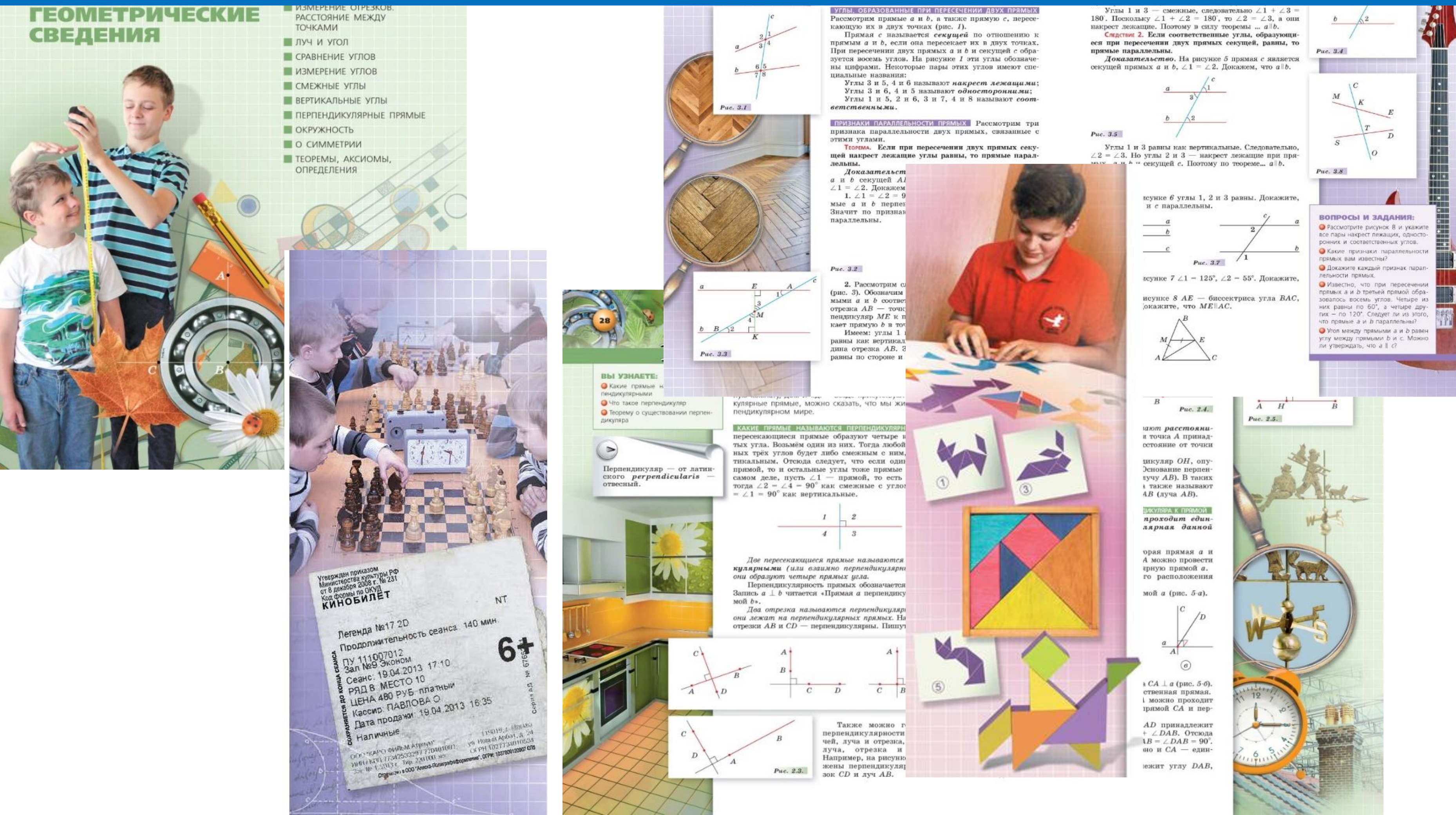




Поразворотный принцип и рубрикация делают учебный материал более доступным, позволяют эффективно формировать у учащихся умение работать с информацией

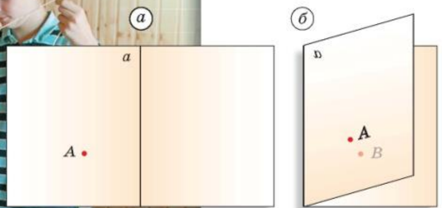
Каждая рубрика имеет свою прописку на развороте: основной текст расположен в центре, выделены определенным дизайнерским решением теоремы и определения, опорные задачи, дополнительный материал, разные уровни заданий.
Иллюстрации и дополнительный материал находятся на цветных полях. Это позволяет формировать умение работать с разнообразной информацией: обучает организации информации, ее хранению, анализу, получению новой информации из имеющейся.

Создание положительной мотивации к обучению через опору на жизненный опыт ребенка, учет возрастных интересов, практико-ориентированный учебный материал. Все убеждает учащегося в важности геометрии в его жизни, мотивирует к изучению предмета



Практические советы, содержащиеся в учебниках, помогают применять полученные на уроке знания в обыденной жизни

2-й случай. Точка A
Пусть A — точка, н
(рис. *1.67-а*). Перегнём
мой a (рис. *1.67-б*) так,
цей a наложилась на др
точка A наложится на н
точку буквой B.



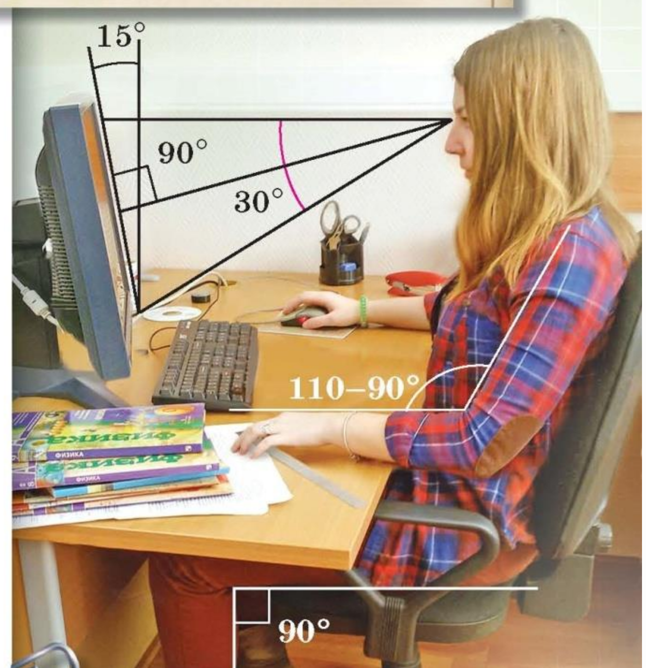
Разогнём плоскость
прямую. Точку пересече
H (рис. *1.67-в*).
Перегнём плоскость
лежит на прямой a, поэт
чит, луч HA совместится
угол *1* совместится с угл
Так как углы *1* и 2
180°, поэтому каждый
прямая AH — перпенди
Докажем теперь, что
Предположим, что
две прямые AH и AK,
(рис. *1.68*).

Рис. 1.68

Линию, идущую по направлению силы тяжести, называют вертикальной, а линию, перпендикулярную вертикальной, называют горизонтальной.
Отвес, показывающий направление силы тяжести (вертикаль), — необходимый инструмент при строительстве. Его легко сделать самому: достаточно к прочной нити привязать небольшой груз.

Мысленно перегнём
чтобы полуплоскость с
A, наложилась на другу
При перегибании то
точка A накладывается
обозначим буквой B.
накладываются на отре

Следование рекомендациям рисунка позволяет меньше уставать и беречь своё здоровье.



Угол обзора у человека (угол, который человек может охватить взглядом) составляет примерно 180°. При этом угол ясного зрения составляет всего 28°. У кошки угол обзора — 185°, а у собаки всего лишь 30°–40°.

Оказывается, угол, который образует ветвь со стволом плодоносящего дерева (он называется углом отхождения), влияет на плодоношение. Оптимальным углом отхождения скелетных ветвей считается угол 50–60 . Ветви с углом отхождения менее 45 и более 80 рекомендуется удалять.

Практические советы помогают применять полученные на уроке знания в обыденной жизни

1.7 СРАВНЕНИЕ УГЛОВ

ВЫ УЗНАЕТЕ:
- Как сравнить два угла
- Определение биссектрисы угла

Умение сравнивать углы очень важно не только при решении геометрических задач, но и в практической жизни.

СРАВНЕНИЕ УГЛОВ Сравнение углов аналогично сравнению отрезков.

Пусть нам даны два неразвёрнутых угла — угол ABC и угол MON. Наложим угол MON на угол ABC так, чтобы вершина O совместилась с вершиной B, сторона ON совместилась со стороной BC, а лучи BA и OM находились в одной полуплоскости относительно прямой BC. Если при этом совместятся стороны BA и OM, то и углы совместятся и, следовательно, углы равны (рис. 1.41-*а*). Если же стороны OM и BA не совместятся, то меньшим считается тот угол, который составляет часть другого. На рисунке 1.41-*б* угол ABC меньше угла MON. Записывается это так: $\angle ABC < \angle MON$.

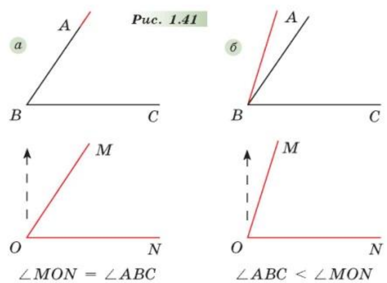


Рис. 1.41

Ясно, что любые два развёрнутых угла равны. Неразвёрнутый угол составляет часть развёрнутого угла (рис. 1.42), поэтому развёрнутый угол больше любого неразвёрнутого угла.

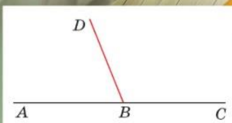


Рис. 1.42

*Инструмент **угломер** предназначен в том числе и для построения равных углов с высоким уровнем точности*

БИССЕКТРИСА УГЛА *Луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла, называется **биссектрисой** этого угла.*

$\angle ABD = \angle DBC$. BD — биссектриса угла ABC (рис. 1.43).

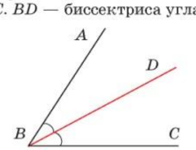
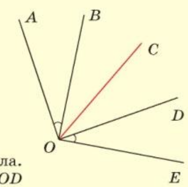


Рис. 1.43

Задача. Углы AOB и DOE на рисунке равны. Луч OC — биссектриса угла AOE. Является ли луч OC биссектрисой угла BOD?

Решение.

1. OC — биссектриса угла AOE, значит, по свойству биссектрисы $\angle AOC = \angle COE$.
2. $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$, отсюда $\angle BOC = \angle AOC - \angle AOB$.
3. $\angle COE = \angle COD + \angle DOE$, отсюда $\angle COD = \angle COE - \angle DOE$.
4. $\angle AOB = \angle DOE$ по условию.
5. Из 1–4 следует, что $\angle BOC = \angle COD$, т.е. луч OC делит угол BOD на два равных угла. Значит, луч OC является биссектрисой угла BOD по определению.



В практической жизни часто приходится пользоваться равенством углов и свойством биссектрисы угла.

С незапамятных времён и до настоящего времени столяры используют прибор для построения угла, равного данному. Называется такой прибор «малка». Его легко изготовить самому. Малка представляет собой две рейки, соединённые винтом, при ослаблении которого можно устанавливать нужный угол.

Придумано много различных инструментов. Например, при изготовлении рамки для фотографий или углов плинтуса, когда нужно поделить прямой угол пополам, пользуются стуслом.

ЗАДАЧИ

1 На рисунке 1.44 луч OB — биссектриса угла AOC. Можно ли совместить наложением: 1) углы AOB и COB? 2) углы AOB и AOC?

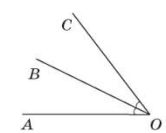


Рис. 1.44

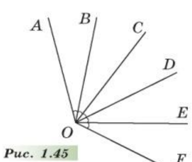
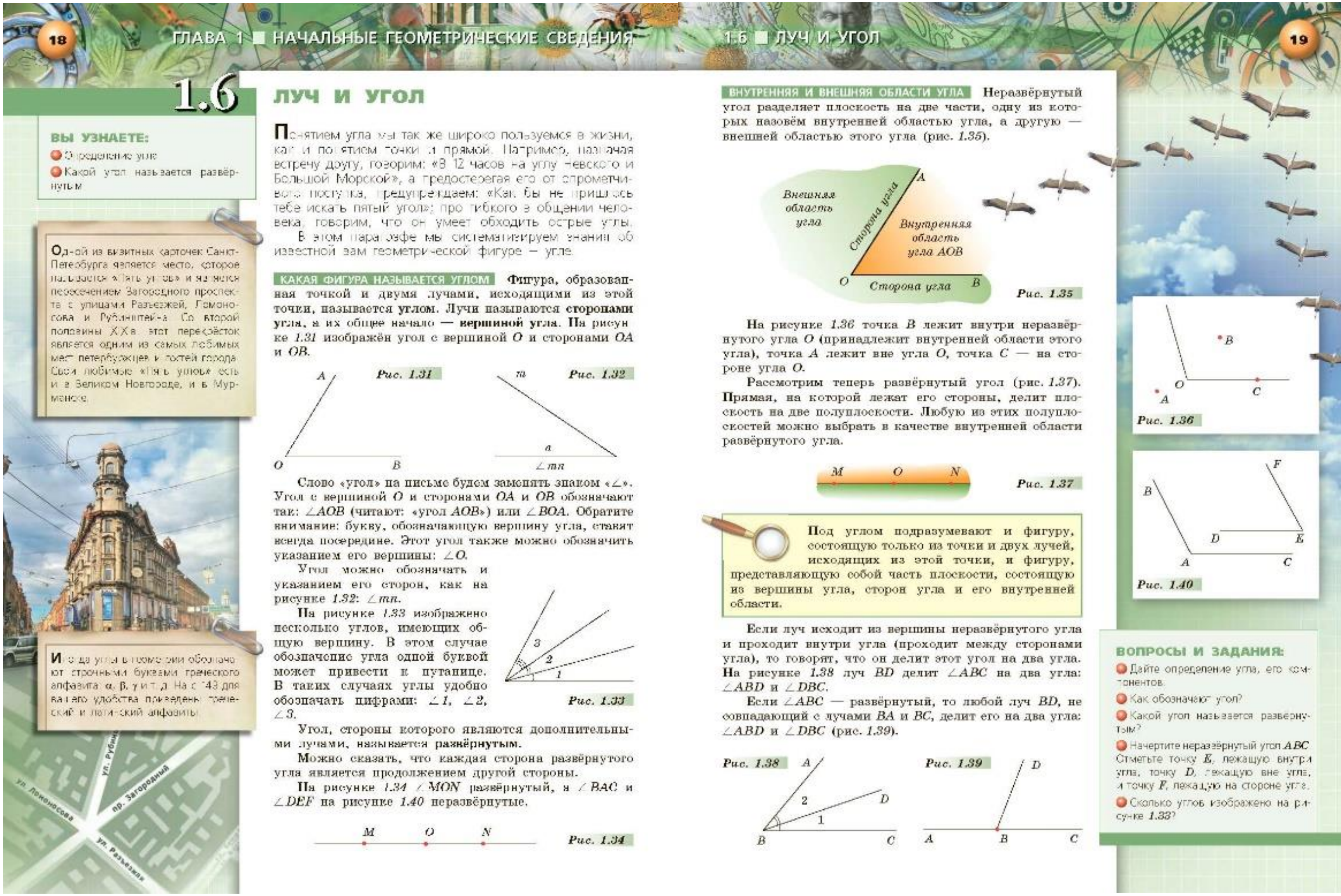


Рис. 1.45

2 На рисунке 1.45 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF$. Какой луч является биссектрисой угла AOC? угла DOF? угла BOF? Биссектрисой каких углов является луч OC?

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:
- Какие углы называются равными?
- Как сравнить два угла?
- Какой луч называется биссектрисой угла?
- Каким свойством обладает биссектриса угла?
- Три прямые пересекаются в одной точке. Сколько получается углов, меньших развёрнутого?

Важную роль играет доступность как теоретической, так и практической составляющих курса



18 ГЛАВА 1 ■ НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.6 ■ ЛУЧ И УГОЛ 19

1.6 ЛУЧ И УГОЛ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Определение угла
- Какой угол называется развёрнутым

Одной из визитных карточек Санкт-Петербурга является место, которое называется «Пять углов» и является пересечением Загородного проспекта с улицами Разъезжей, Ломоносова и Рубинштейна. Со второй половины XX в. этот перекрёсток является одним из самых любимых мест петербуржцев и гостей города. Свои любимые «Пять углов» есть и в Великом Новгороде, и в Мурманске.

Иногда углы в геометрии обозначают строчными буквами греческого алфавита α, β, γ и т. д. На с. 143 для вашего удобства приведены греческий и латинский алфавиты.

Понятием угла мы так же широко пользуемся в жизни, как и понятием точки и прямой. Например, назначая встречу другу, говорим: «В 12 часов на углу Невского и Большой Морской», а предостерегая его от опрометчивого поступка, предупреждаем: «Как бы не пришлось тебе искать пятый угол»; про гибкого в общении человека, говорим, что он умеет обходить острые углы.

В этом параграфе мы систематизируем знания об известной вам геометрической фигуре — угле.

КАКАЯ ФИГУРА НАЗЫВАЕТСЯ УГЛОМ Фигура, образованная точкой и двумя лучами, исходящими из этой точки, называется **углом**. Лучи называются **сторонами угла**, а их общее начало — **вершиной угла**. На рисунке 1.31 изображён угол с вершиной O и сторонами OA и OB.

Рис. 1.31 *Рис. 1.32*

Слово «угол» на письме будем заменять знаком «∠». Угол с вершиной O и сторонами OA и OB обозначают так: $\angle AOB$ (читают: «угол AOB») или $\angle BOA$. Обратите внимание: букву, обозначающую вершину угла, ставят всегда посередине. Этот угол также можно обозначить указанием его вершины: $\angle O$.

Угол можно обозначать и указанием его сторон, как на рисунке 1.32: $\angle mn$.

На рисунке 1.33 изображено несколько углов, имеющих общую вершину. В этом случае обозначение угла одной буквой может привести к путанице. В таких случаях углы удобно обозначать цифрами: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

Рис. 1.33

Угол, стороны которого являются дополнительными лучами, называется **развёрнутым**.

Можно сказать, что каждая сторона развёрнутого угла является продолжением другой стороны.

На рисунке 1.34 $\angle MON$ развёрнутый, а $\angle BAC$ и $\angle DEF$ на рисунке 1.40 неразвёрнутые.

Рис. 1.34

ВНУТРЕННЯЯ И ВНЕШНЯЯ ОБЛАСТИ УГЛА Неразвёрнутый угол разделяет плоскость на две части, одну из которых назовём внутренней областью угла, а другую — внешней областью этого угла (рис. 1.35).

Рис. 1.35

На рисунке 1.36 точка B лежит внутри неразвёрнутого угла O (принадлежит внутренней области этого угла), точка A лежит вне угла O, точка C — на стороне угла O.

Рассмотрим теперь развёрнутый угол (рис. 1.37). Прямая, на которой лежат его стороны, делит плоскость на две полуплоскости. Любую из этих полуплоскостей можно выбрать в качестве внутренней области развёрнутого угла.

Рис. 1.36

Рис. 1.37

Под углом подразумевают и фигуру, состоящую только из точки и двух лучей, исходящих из этой точки, и фигуру, представляющую собой часть плоскости, состоящую из вершины угла, сторон угла и его внутренней области.

Рис. 1.40

Если луч исходит из вершины неразвёрнутого угла и проходит внутри угла (проходит между сторонами угла), то говорят, что он делит этот угол на два угла. На рисунке 1.38 луч BD делит $\angle ABC$ на два угла: $\angle ABD$ и $\angle DBC$.

Если $\angle ABC$ — развёрнутый, то любой луч BD, не совпадающий с лучами BA и BC, делит его на два угла: $\angle ABD$ и $\angle DBC$ (рис. 1.39).

Рис. 1.38 *Рис. 1.39*

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Дайте определение угла, его компонентов.
- Как обозначают угол?
- Какой угол называется развёрнутым?
- Начертите неразвёрнутый угол ABC. Отметьте точку E, лежащую внутри угла, точку D, лежащую вне угла, и точку F, лежащую на стороне угла.
- Сколько углов изображено на рисунке 1.33?

Доступные тексты и задания для разного уровня подготовки и способностей учащихся обеспечивают комфортность обучения, способствуют созданию положительной мотивации к изучению предмета

УМК реализует деятельностный подход в обучении: деятельность учащихся запрограммирована учебными текстами и заданиями

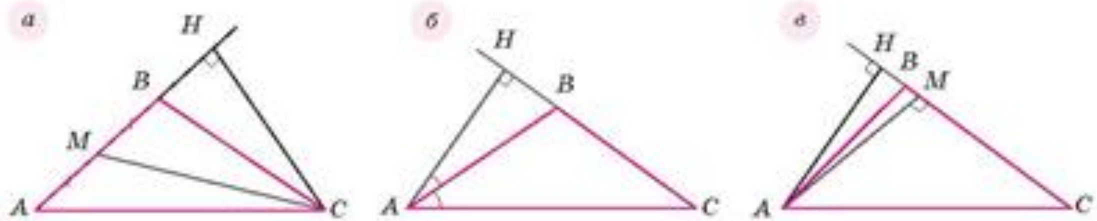
Докажите соседу по парте, что около любого прямоугольника можно описать окружность. Какая точка является центром этой окружности?

Докажите соседу по парте, что около любой равнобедренной трапеции можно описать окружность.

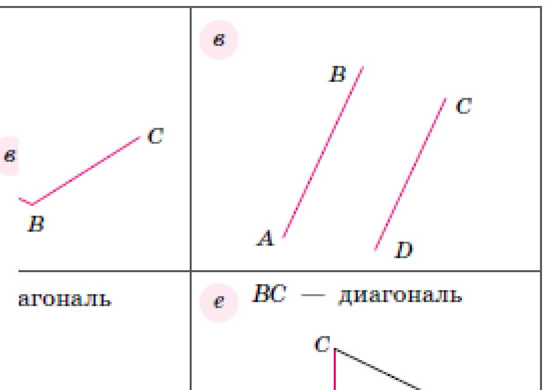
Можно ли описать окружность около четырёхугольника ABC
если:
а) $\angle A = 90°$, $\angle B = 80°$, $\angle C = 90$
$\angle D = 100°$;
б) $\angle A = 80°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 90$
$\angle D = 100°$.

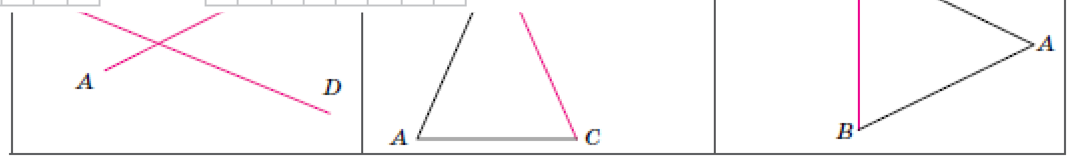
Докажите соседу по парте, ч
в любой ромб можно вписа
окружность. Где находится цен
этой окружности?

13 Рассмотрите рисунки и укажите, какая конструкция невозможна.

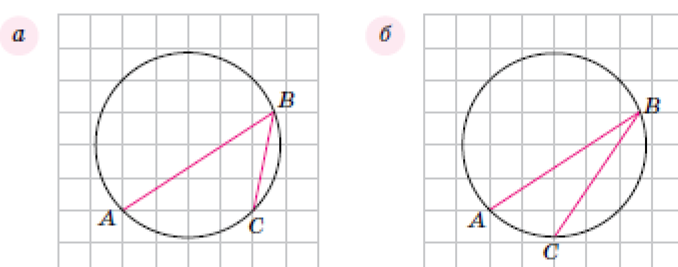


2. По данным рисунка начертите четырёхугольник и запишите его обозначение.





Используя свойство клетчатой бумаги, найдите величины вписанных углов.



51 Пользуясь свойствами и признаками параллелограмма, придумайте с соседом по парте способ нахождения расстояния между двумя пунктами на одном берегу реки, находясь на другом её берегу, если вам известны расстояния до этих пунктов.

5.4 МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ ТОЧЕК В ЗАДАЧАХ НА ПОСТРОЕНИЕ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- В чём состоит метод геометрических мест точек

Одним из самых распространённых методов решения задач на построение является метод геометрических мест точек.

В ЧЁМ СУТЬ МЕТОДА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ ТОЧЕК Рассмотрим ещё раз задачу: **построить треугольник по стороне, высоте и медиане, проведённой к этой стороне.**

Итак, нам даны три отрезка a, b и c (рис. 5.51). Пусть отрезок a равен стороне треугольника, отрезок b — высоте треугольника, отрезок c — медиане треугольника. Рассмотрим другой способ решения задачи.

Анализ. Пусть задача решена (рис. 5.52).

Задачу можно считать решённой, если мы построим три вершины треугольника.

Две вершины треугольника ABC мы получим, построив в любом месте плоскости отрезок AB, равный a.

Третья вершина C удовлетворяет двум следующим условиям.

1) Вершина C треугольника ABC находится на расстоянии b от прямой, содержащей сторону AB треугольника (высота CH треугольника, опущенная из точки C на сторону AB, равна b).

Иными словами, точка C принадлежит геометрическому месту точек, удалённых на расстояние b от прямой AB, а этим геометрическим местом точек являются две прямые, параллельные AB и расположенные по разные от неё стороны. Так как обе прямые равноценны, будем рассматривать лишь точки по одну сторону от прямой AB.

2) Точка C удалена от середины стороны AB на расстояние c, равное длине медианы CM треугольника. Геометрическим местом точек, удалённых на расстояние c от точки M, является окружность с центром в точке M и радиусом, равным c. ... надлежит этой окружности.

Построив эти прямую и окр... точку C как пересечение прямой ...

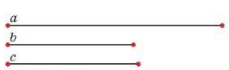


Рис. 5.51

Рис. 5.52

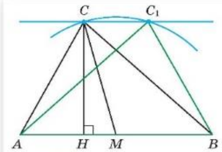


Рис. 5.53

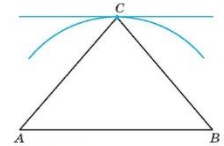


Рис. 5.54

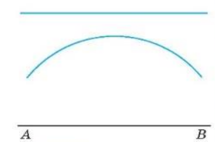


Рис. 5.55

На самом деле таких точек может быть две (рис. 5.53). Но им соответствуют два равных треугольника и выбрать можно любой из них.

В случае касания прямой и окружности такой треугольник один (рис. 5.54). Построенные прямая и окружность могут и не пересекаться (рис. 5.55). В этом случае задача не имеет решения.

Как видим, суть метода геометрических мест точек в задачах на построение довольно проста и сводится к следующему.

Сначала задача сводится к нахождению какой-либо точки. Эта точка определяется как точка пересечения двух линий, удовлетворяющих двум условиям. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть некоторая линия 1 (в нашем случае прямая, параллельная прямой AB и находящаяся от неё на расстоянии b).

Геометрическое место точек, удовлетворяющее второму условию, есть некоторая линия 2 (в нашем случае окружность с центром в середине отрезка AB и радиусом, равным медиане искомого треугольника).

Построив эти геометрические места, найдём искомую точку как точку их пересечения (рис. 5.56).

Мы уже пользовались этим методом при решении задач на построение. Так, известное вам простейшее построение треугольника по трём сторонам осуществля... ...очему.) ...троение ...ствует.

...стройте ...В и на-

...айдите ...и ...и

...вноуда-

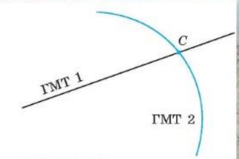


Рис. 5.56

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Объясните, в чём состоит метод геометрических мест точек в задачах на построение.
- Обсудите с соседом по парте и приведите примеры задач из § 5.2 и 5.3, при решении которых использовался метод геометрических мест точек.

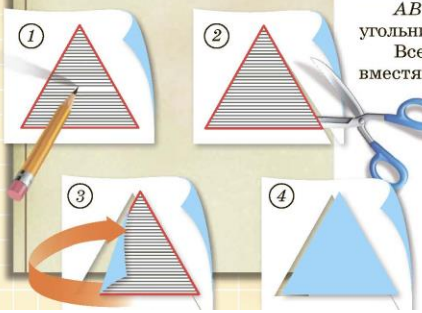
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Объясните, в чём состоит метод геометрических мест точек в задачах на построение.
- Обсудите с соседом по парте и приведите примеры задач из § 5.2 и 5.3, при решении которых использовался метод геометрических мест точек.

Широко представлены опыт и эксперимент

Вот какое доказательство свойства углов равнобедренного треугольника предложил писатель и математик Ч. Л. Доджсон, известный всему миру под псевдонимом Льюис Кэрролл, автор «Алисы в Стране чудес».

1. Начертите на листе бумаги равнобедренный треугольник ABC и заштрихуйте его (рис. *1*).
2. Аккуратно вырежьте треугольник ABC (рис. *2*).
3. Переверните треугольник другой стороной листа (рис. *3*). При этом углы A и C поменялись местами.
4. Вставьте в лист бумаги перевёрнутый треугольник (рис. *4*).
5. Вы видите, что углы при наложении совпали.



СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА Равнобедренный треугольник обладает важными свойствами.

ТЕОРЕМА. **В равнобедренном треугольнике: 1) углы при основании равны; 2) биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой.**

Доказательство.

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием AC (рис. *2.8*). Пусть BM — биссектриса этого треугольника. Мысленно перегнём плоскость по прямой BM так, чтобы полуплоскость, содержащая точку A, наложилась на другую полуплоскость.

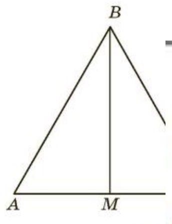


Рис.

BM — биссектриса угла ABC, поэтому луч BA совместится с лучом BC.

$AB = BC$ как боковые стороны равнобедренного
угольника ABC, поэтому точка A совместится с точ

Все три вершины треугольников ABM и CB
вместятся, следовательно, эти треугольники рав

Углы BAC и BCA совместились пр
ложении, значит, $\angle BAC = \angle BCA$. П
часть теоремы доказана.

При совмещении треугольников совм
лись стороны AM и MC, значит, AM
т. е. BM является медианой.

Совместились и углы AMB и CMB,
как они смежные, то их сумма равна
поэтому каждый из них равен $90°$, зн
$BM \perp AC$, значит, BM является и высот

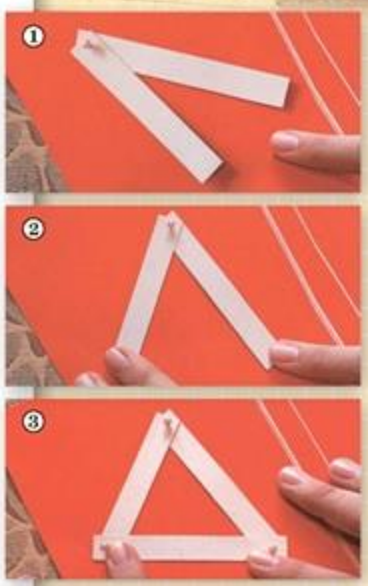
доказательство будет аналогичным приведённому. Проведите его самостоятельно. ▼

ЖЁСТКОСТЬ ТРЕУГОЛЬНИКА Из третьего признака равенства треугольников следует важнейшее свойство треугольника — его жёсткость.

Проведите такой эксперимент:
1. Возьмите две полоски бумаги и соедините их булавкой (фото 1).
2. Убедитесь, что можно изменять угол между полосками, произвольно двигая их (фото 2).
3. Скрепите две детали третьей и убедитесь, что невозможно изменить получившийся треугольник, не разрушив конструкции (фото 3).

Свойство жёсткости треугольника широко используется на практике. Так, чтобы стремянка не раздвигалась, а стояла жёстко, стойки стремянки фиксируют перемычкой; чтобы садовая калитка не деформировалась, приколачивают рейку, образующую треугольник со штакетником; в конфигурации стропил крыши должны быть треугольники и т. д.

Жёсткость треугольника используют в промышленном строительстве: например, любая ферма моста состоит из треугольников, и чем треугольников больше, тем конструкция прочнее.



Точку пересечения медиан треугольника называют **центроидом треугольника** (центром масс треугольника).

В справедливости такого названия можно убедиться, проведя следующий эксперимент.

Вырежите из плотного картона или пластика произвольный треугольник. Проведя медианы, определите центроид и попытайтесь удержать треугольник в равновесии, положив его на острие карандаша или спицы в центроиде.

Точка пересечения медиан треугольника является одной из замечательных точек треугольника.

Внимание приёмам и методам математики

Задача. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Известно, что $AB > AC$. Докажите, что $\angle BAM < \angle MAC$.

Решение. По условию задачи выполним чертёж (рис. 1).

Для доказательства выполним дополнительное построение: на продолжении медианы AM отложим отрезок $MD = AM$ и проведём отрезок BD (рис. 2).

Рассмотрим треугольники CMA и BMD.

В этих треугольниках $AM = MD$ по построению, $BM = MC$, так как AM — медиана, $\angle AMC = \angle DMB$ — как вертикальные углы, значит, $\triangle CMA = \triangle BMD$ по двум сторонам и углу между ними.

Из равенства треугольников следует, что $\angle MDB = \angle CAM$ и $BD = AC$ как соответственные элементы.

Рассмотрим треугольник DAB. $AB > BD$, так как $BD = AC$, а $AB > AC$ по условию. Против большей стороны лежит бо… ший угол, значит, $\angle MDB > \angle BAM$. Заменим $\angle MDB$ на р… ный ему $\angle CAM$, получим неравенство $\angle CAM > \angle BAM$, т… $\angle BAM < \angle CAM$.

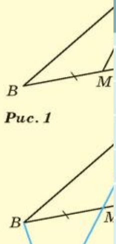


Рис. 1

УДВОЕНИЕ МЕДИАНЫ Для того чтобы научиться решать задачи по геометрии, очень важно освоить отдельные приёмы, методы решения задач. Разобравшись, как такой приём или метод «работает», вы сможете в дальнейшем эффективно его использовать. При решении предыдущей задачи мы пользовались одним из таких приёмов — приёмом удвоения медианы. В чём же он состоит?

Часто для решения задачи надо сначала провести какое-нибудь дополнительное построение (например, в треугольнике провести высоту или в четырёхугольнике провести диагональ).

Одно из важных дополнительных построений — продолжение медианы треугольника.

Если в условии задачи фигурирует медиана треугольника, то очень часто помочь решению может продолжение медианы на отрезок, ей равный, т. е. *удвоение медианы*.

Учебник будет и дальше знакомить вас с приёмами и методами геометрии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОТ ПРОТИВНОГО Способ рассуждений, который мы применили для доказательства единственности перпендикуляра к прямой, называется **доказательством от противного**, и состоит он в следующем.

1. Сначала делают предположение, что доказываемое утверждение неверно, и предполагают противоположное тому, что надо доказать.
2. Затем путём рассуждений приходят к выводу, противоречащему уже известным фактам.
3. Чтобы противоречие не возникало, есть лишь одна возможность — справедливость доказываемого утверждения. На этом основании заключают, что предположение неверно, а значит, верно то утверждение, которое нужно было доказать.

5.6 МЕТОД ПЛОЩАДЕЙ

ВЫ УЗНАЕТЕ:
- В чём состоит метод площадей
- Классический способ доказательства теоремы Пифагора

Понятие площади широко используется при доказательстве теорем и решении задач.

МЕТОД ПЛОЩАДЕЙ Этот метод основан на использовании площади как вспомогательной величины, его ещё называют методом вспомогательной площади. Докажем этим методом теорему о биссектрисе угла треугольника.

3.4 КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД

ВЫ УЗНАЕТЕ:
- Примеры применения метода координат при решении задач

Метод координат является одним из самых универсальных методов. Для того чтобы им воспользоваться, нужно ввести систему координат и записать условие задачи в координатах.

ВЫБОР СИСТЕМЫ КООРДИНАТ Пожалуй, самым главным этапом решения геометрической задачи координатным методом является удобный выбор системы координат, так как успех в решении во многом зависит именно от выбора системы координат.

Есть геометрические фигуры, своим видом подсказывающие выбор системы координат: прямоугольник, ромб, квадрат, окружность… (рис. 3.16, а—д).

4 МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ ТОЧЕК В ЗАДАЧАХ НА ПОСТРОЕНИЕ

че-

Одним из самых распространённых методов решения задач на построение является метод геометрических мест точек.

В ЧЁМ СУТЬ МЕТОДА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ ТОЧЕК Рассмотрим ещё раз задачу: построить треугольник по сто-

Задача. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Известно, что $AB > AC$. Докажите, что $\angle BAM < \angle MAC$.

Решение. По условию задачи выполним чертёж (рис. *1*).

Для доказательства выполним дополнительное построение: на продолжении медианы AM отложим отрезок $MD = AM$ и проведём отрезок BD (рис. *2*).

Рассмотрим треугольники CMA и BMD.

В этих треугольниках $AM = MD$ по построению, $BM = MC$, так как AM — медиана, $\angle AMC = \angle DMB$ — как вертикальные углы, значит, $\triangle CMA = \triangle BMD$ по двум сторонам и углу между ними.

Из равенства треугольников следует, что $\angle MDB = \angle CAM$ и $BD = AC$ как соответственные элементы.

Рассмотрим треугольник DAB. $AB > BD$, так как $BD = AC$, а $AB > AC$ по условию. Против большей стороны лежит больший угол, значит, $\angle MDB > \angle BAM$. Заменим $\angle MDB$ на равный ему $\angle CAM$, получим неравенство $\angle CAM > \angle BAM$, т. е. $\angle BAM < \angle CAM$.

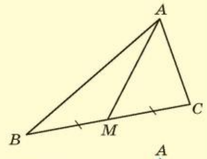


Рис. 1

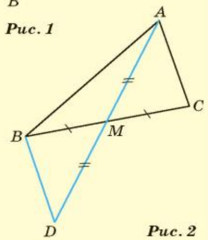


Рис. 2

УДВОЕНИЕ МЕДИАНЫ Для того чтобы научиться решать задачи по геометрии, очень важно освоить отдельные приёмы, методы решения задач. Разобравшись, как такой приём или метод «работает», вы сможете в дальнейшем эффективно его использовать. При решении предыдущей задачи мы пользовались одним из таких приёмов — приёмом удвоения медианы. В чём же он состоит?

Часто для решения задачи надо сначала провести какое-нибудь дополнительное построение (например, в треугольнике провести высоту или в четырёхугольнике провести диагональ).

Одно из важных дополнительных построений — продолжение медианы треугольника.

Если в условии задачи фигурирует медиана треугольника, то очень часто помочь решению может продолжение медианы на отрезок, ей равный, т. е. *удвоение медианы*.

Учебник будет и дальше знакомить вас с приёмами и методами геометрии.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

Сформулируйте и докажите теорему о соотношениях между сторо-

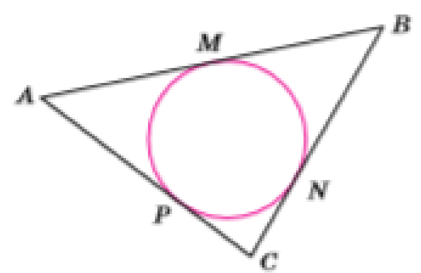
Математическая составляющая сохраняет традиции качественной математической подготовки отечественной школы.

Особое внимание уделяется методам и приёмам математики, они выделены в отдельные параграфы или подпункты. Объясняется в каких случаях рационально их применять.

п. 1.5

51

1. Окружность с центром O вписана в треугольник ABC. Запишите равные отрезки.



2. Рассмотрите решение задачи на с. 21 учебника. Пользуясь тем же приёмом — «Шагаем по периметру», — решите следующие задачи.

1. В прямоугольный треугольник, с катетами a и b и гипотенузой c вписана окружность радиуса r. Докажите, что $c = a + b - 2r$.

Дано: ______________________

____

Найти: ______________________

Решение. ______________________

Все теоремы представлены в теоретической части учебника

1.4 ХОРДЫ И ДУГИ

ВЫ УЗНАЕТЕ:
- Некоторые соотношения между дугами и хордами в окружности

Существует ли в окружности зависимость между дугами и хордами?

УГОЛ МЕЖДУ КАСАТЕЛЬНОЙ И ХОРДОЙ Пусть прямая MN касается окружности с центром O в точке A. Проведём хорду AB (рис. 1.29).

Каждый из образовавшихся углов MAB и NAB будем называть **углом между касательной и хордой.**

ТЕОРЕМА. **Угол между касательной и хордой, проведённой из точки касания, измеряется половиной дуги, заключённой внутри этого угла.**

Доказательство. Пусть прямая MN касается окружности с центром O в точке A, AB — хорда.

Докажем, что $\angle NAB = \frac{1}{2} \smile AB$.

1-й случай. Хорда AB является диаметром окружности (рис. 1.30). Тогда дуги, заключённые внутри углов MAB и NAB, являются полуокружностями, следовательно, $\smile ACB = 180°$. Так как OA — радиус, проведённый в точку касания, то $\angle NAB = 90°$. Значит,

$$\angle NAB = \frac{1}{2} \smile ACB.$$

Аналогично доказывается, что $\angle MAB = \frac{1}{2} \smile ADB$.

2-й случай. Хорда AB не является диаметром окружности.

Проведём радиус OA (рис. 1.31). $OA \perp MN$ как радиус, проведённый в точку касания. Тогда величина острого угла NAB будет равна $90° - \angle OAB$, а величина тупого угла MAB будет равна $90° + \angle OAB$.

Обозначим градусную меру центрального угла AOB через x. Тогда $\smile AB = x$.

Треугольник AOB — равнобедренный, $\angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2}(180° - x) = 90° - \frac{x}{2}$. Тогда

$$\angle NAB = 90° - (90° - \frac{x}{2}) = 90° - 90° + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}.$$

Так как $\smile AB = \angle AOB = x$, то $\angle NAB = \frac{1}{2} \smile AB$.

Аналогично доказывается, что $\angle MAB = \frac{1}{2} \smile ACB$. ▼

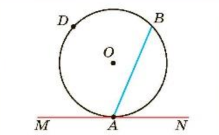


Рис. 1.29

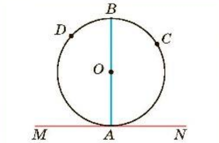


Рис. 1.30

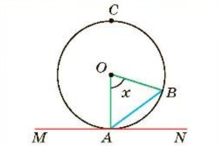


Рис. 1.31

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМЫ Если в теореме поменять местами условие и заключение, то получим **обратную теорему.** Возьмём, например, теорему: «В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к его основанию, является высотой». Поменяем местами условие и заключение, получим обратную теорему: «Если биссектриса треугольника является его высотой, то этот треугольник — равнобедренный». Важно понимать, что не всякая теорема имеет обратную, то есть не всякое обратное утверждение является верным.

При составлении обратной теоремы нужно быть очень внимательным.

Например, для теоремы — «Сумма смежных углов равна 180°» — обратная ей теорема — «Если сумма двух углов равна 180°, то углы смежные» — неверна (так, $\angle AEO + \angle BED = 180°$ на рисунке 1.32, но они не являются смежными). Когда верны прямая и обратная теоремы, их часто называют **взаимно-обратными.**

ХОРДЫ, ДУГИ

ТЕОРЕМА. **Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.**

Доказательство. Если хорда является диаметром окружности, то теорема очевидна.

Пусть хорда AB не является диаметром окружности. На рисунке 1.32: CD — диаметр окружности, AB — хорда. Точка E — точка пересечения AB и CD.

Докажем, что $AE = BE$.

Проведём радиусы OA и OB. Треугольник AOB — равнобедренный с основанием AB ($OA = OB$ как радиусы окружности). $CD \perp AB$ по условию. Тогда OE — высота треугольника AOB, а значит, и медиана. Таким образом, $AE = BE$. ▼

Сформулируем обратную теорему.

ТЕОРЕМА. **Диаметр окружности, делящий хорду, не являющуюся диаметром, пополам, перпендикулярен этой хорде.**

Докажите эту теорему самостоятельно.

ТЕОРЕМА. **Если дуги равны, то равны и стягивающие их хорды.**

Доказательство. Пусть в окружности с центром O равны дуги AB и CD (рис. 1.33). Докажем, что равны хорды AB и CD.

Проведём радиусы OA, OB, OC и OD. Так как $\smile AB = \smile CD$, то $\angle AOB = \angle COD$, $OA = OB = OC = OD = R$, значит, $\triangle AOB = \triangle COD$ по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $AB = CD$. ▼

Обратная теорема **«Равные хорды стягивают равные дуги»,** вообще говоря, неверна. Как вы думаете, почему?

ТЕОРЕМА. **Дуги, заключённые между параллельными хордами, равны.**

Доказательство. На рисунке 1.34 хорды AB и CD параллельны. Докажем, что $\smile AC = \smile BD$.

Проведём хорду BC (рис. 1.35). Тогда $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие, образованные параллельными прямыми AB и CD и секущей BC.

Но углы 1 и 2 являются вписанными в окружность. Так как углы равны, то равны и дуги, на которые они опираются, то есть $\smile AC = \smile BD$. ▼

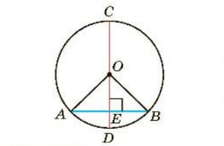


Рис. 1.32

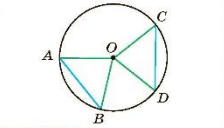


Рис. 1.33

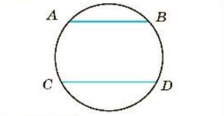


Рис. 1.34

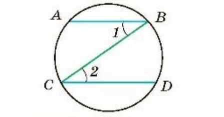
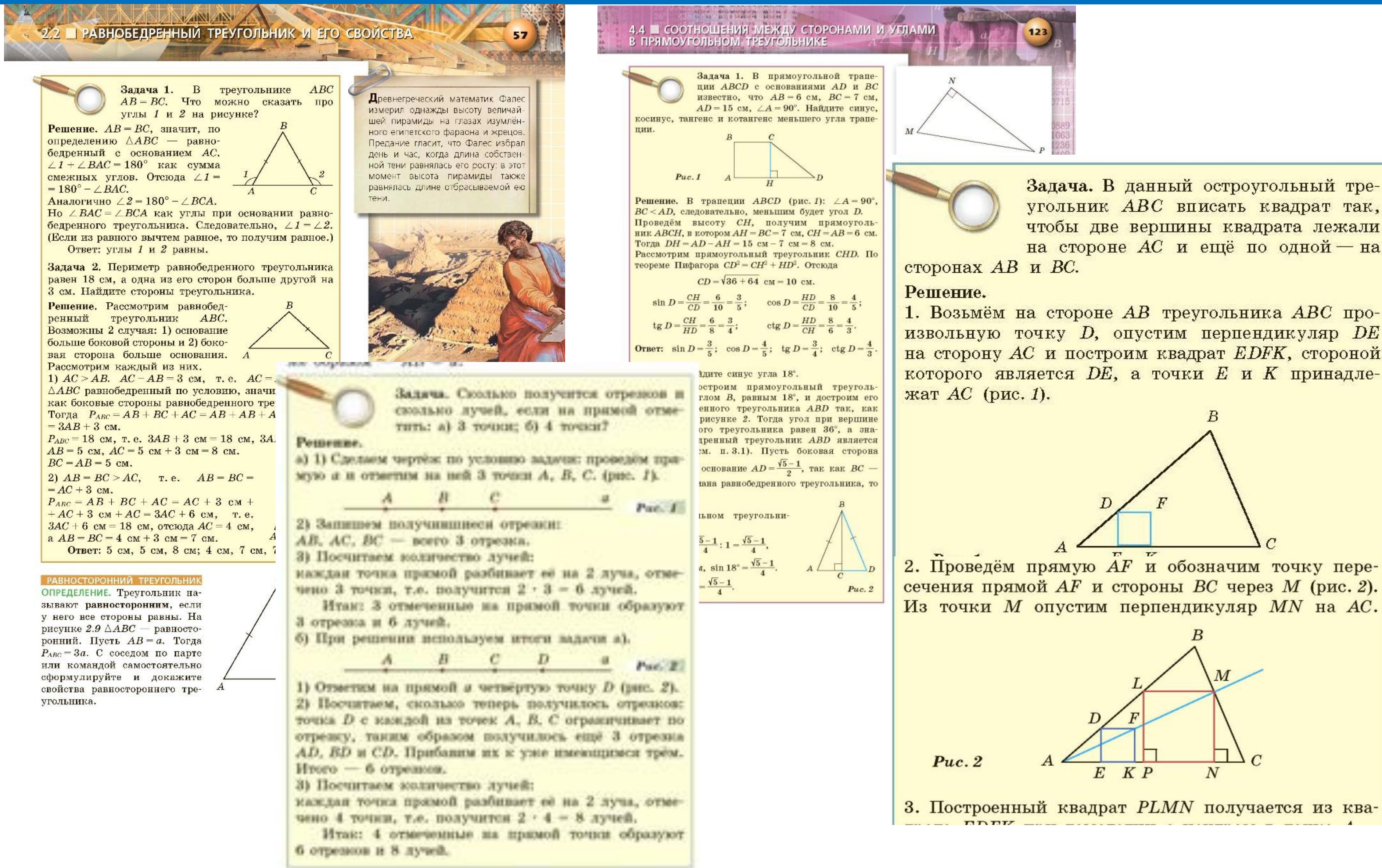


Рис. 1.35

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:
- Чему равен угол между касательной и хордой? Докажите соответствующую теорему соседу по парте.
- Верно ли, что если дуги равны, то равны и стягивающие их хорды? Обоснуйте своё утверждение соседу по парте.
- Докажите теорему о равенстве дуг, расположенных между параллельными хордами.
- Найдите в предыдущих параграфах взаимно-обратные теоремы.

На теоретических разворотах представлены опорные задачи, где разбираются приёмы, способы рассуждений, методы решения задач



2.2 ■ РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК И ЕГО СВОЙСТВА 57

Задача 1. В треугольнике ABC $AB = BC$. Что можно сказать про углы 1 и 2 на рисунке?

Решение. $AB = BC$, значит, по определению $\triangle ABC$ — равнобедренный с основанием AC. $\angle 1 + \angle BAC = 180^\circ$ как сумма смежных углов. Отсюда $\angle 1 = 180^\circ - \angle BAC$. Аналогично $\angle 2 = 180^\circ - \angle BCA$. Но $\angle BAC = \angle BCA$ как углы при основании равнобедренного треугольника. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. (Если из равного вычтем равное, то получим равное.)

Ответ: углы 1 и 2 равны.

Задача 2. Периметр равнобедренного треугольника равен 18 см, а одна из его сторон больше другой на 3 см. Найдите стороны треугольника.

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC. Возможны 2 случая: 1) основание больше боковой стороны и 2) боковая сторона больше основания. Рассмотрим каждый из них.

1) $AC > AB$. $AC - AB = 3$ см, т. е. $AC = \ldots$ $\triangle ABC$ равнобедренный по условию, значи... как боковые стороны равнобедренного тре... Тогда $P_{ABC} = AB + BC + AC = AB + AB + A\ldots$ $= 3AB + 3$ см.
$P_{ABC} = 18$ см, т. е. $3AB + 3$ см $= 18$ см, $3A\ldots$ $AB = 5$ см, $AC = 5$ см $+ 3$ см $= 8$ см. $BC = AB = 5$ см.

2) $AB = BC > AC$, т. е. $AB = BC = AC + 3$ см.
$P_{ABC} = AB + BC + AC = AC + 3$ см $+ AC + 3$ см $+ AC = 3AC + 6$ см, т. е. $3AC + 6$ см $= 18$ см, отсюда $AC = 4$ см, а $AB = BC = 4$ см $+ 3$ см $= 7$ см.

Ответ: 5 см, 5 см, 8 см; 4 см, 7 см, 7...

РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Треугольник называют **равносторонним**, если у него все стороны равны. На рисунке 2.9 $\triangle ABC$ — равносторонний. Пусть $AB = a$. Тогда $P_{ABC} = 3a$. С соседом по парте или командой самостоятельно сформулируйте и докажите свойства равностороннего треугольника.

Древнегреческий математик Фалес измерил однажды высоту величайшей пирамиды на глазах изумлённого египетского фараона и жрецов. Предание гласит, что Фалес избрал день и час, когда длина собственной тени равнялась его росту: в этот момент высота пирамиды также равнялась длине отбрасываемой ею тени.

Задача. Сколько получится отрезков и сколько лучей, если на прямой отметить: а) 3 точки; б) 4 точки?

Решение.
а) 1) Сделаем чертёж по условию задачи: проведём прямую a и отметим на ней 3 точки A, B, C (рис. 1).

Рис. 1

2) Запишем получившиеся отрезки: AB, AC, BC — всего 3 отрезка.
3) Посчитаем количество лучей: каждая точка прямой разбивает её на 2 луча, отмечено 3 точки, т.е. получится $2 \cdot 3 = 6$ лучей.
Итак: 3 отмеченные на прямой точки образуют 3 отрезка и 6 лучей.
б) При решении используем итоги задачи а).

Рис. 2

1) Отметим на прямой a четвёртую точку D (рис. 2).
2) Посчитаем, сколько теперь получилось отрезков: точка D с каждой из точек A, B, C ограничивает по отрезку, таким образом получилось ещё 3 отрезка AD, BD и CD. Прибавим их к уже имеющимся трём. Итого — 6 отрезков.
3) Посчитаем количество лучей: каждая точка прямой разбивает её на 2 луча, отмечено 4 точки, т.е. получится $2 \cdot 4 = 8$ лучей.
Итак: 4 отмеченные на прямой точки образуют 6 отрезков и 8 лучей.

4.4 ■ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ 123

Задача 1. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AD = 15$ см, $\angle A = 90^\circ$. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс меньшего угла трапеции.

Рис. 1

Решение. В трапеции $ABCD$ (рис. 1): $\angle A = 90^\circ$, $BC < AD$, следовательно, меньшим будет угол D. Проведём высоту CH, получим прямоугольник $ABCH$, в котором $AH = BC = 7$ см, $CH = AB = 6$ см. Тогда $DH = AD - AH = 15$ см $- 7$ см $= 8$ см. Рассмотрим прямоугольный треугольник CHD. По теореме Пифагора $CD^2 = CH^2 + HD^2$. Отсюда

$$CD = \sqrt{36 + 64} \text{ см} = 10 \text{ см}.$$

$$\sin D = \frac{CH}{CD} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \quad \cos D = \frac{HD}{CD} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg} D = \frac{CH}{HD} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg} D = \frac{HD}{CH} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\sin D = \frac{3}{5}$; $\cos D = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} D = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} D = \frac{4}{3}$.

...йдите синус угла 18°.
...остроим прямоугольный треугольник ... углом B, равным 18°, и достроим его ...енного треугольника ABD так, как ... рисунке 2. Тогда угол при вершине ...ого треугольника равен 36°, а зна...дренный треугольник ABD является ...м. п. 3.1). Пусть боковая сторона ... основание $AD = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, так как BC — ...иана равнобедренного треугольника, то

Рис. 2

Задача. В данный остроугольный треугольник ABC вписать квадрат так, чтобы две вершины квадрата лежали на стороне AC и ещё по одной — на сторонах AB и BC.

Решение.
1. Возьмём на стороне AB треугольника ABC произвольную точку D, опустим перпендикуляр DE на сторону AC и построим квадрат $EDFK$, стороной которого является DE, а точки E и K принадлежат AC (рис. 1).

2. Проведём прямую AF и обозначим точку пересечения прямой AF и стороны BC через M (рис. 2). Из точки M опустим перпендикуляр MN на AC.

Рис. 2

3. Построенный квадрат $PLMN$ получается из ква...

Заданий в учебниках и шлейфе избыточное количество, удовлетворяющее потребности как разноуровневой начальной подготовки учащихся, так и разноуровневые запросы к конечному результату.

Учтены реалии сегодняшнего этапа школьного математического образования: много простых заданий начального уровня, особенно в 7 классе для формирования умения работать с геометрическим чертежом и т.д.

Для эффективности обучения номера заданий базового уровня и подавляющее большинство заданий повышенных уровней имеют две аналогичные задачи.

Например, это можно использовать так: задача а) решается в классе, задачу б) можно задать на дом.

Технологии труда учителя также предусмотрены в УМК

Многоуровневая система задач позволяет эффективно усваивать учебный материал, дифференцировать и индивидуализировать процесс обучения

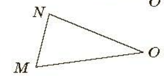
Много простых заданий

п. 2.1

Т 1 а) 1) Назовите стороны, углы и вершины треугольника DEO (рис. *1*).
2) Запишите все возможные обозначения данного треугольника.
Укажите:
1) сторону, противолежащую углу O;
2) угол, противолежащий стороне EO;
3) углы, прилежащие к стороне DE.
б) В треугольнике MNO (рис. *2*) укажите:
1) угол, противолежащий стороне MN;
2) углы, прилежащие к стороне NO;
3) сторону, противолежащую углу N.

Рис. 1

Рис. 2



2 Найдите на рисунке *3* отрезки, которые являются: 1) высотой треугольника; 2) биссектрисой треугольника; 3) медианой треугольника.

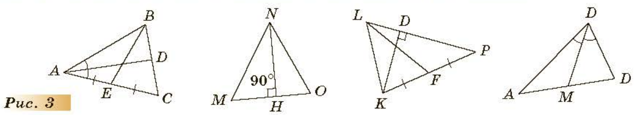


Рис. 3

Т 3 Перерисуйте в тетрадь рисунок *4*.
Проведите в каждом случае из вершины B высоту треугольника. Сделайте вывод о том, как может располагаться высота треугольника.

Рис. 4

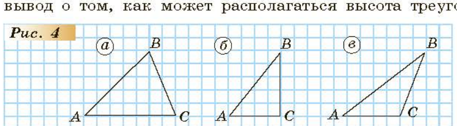
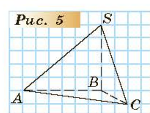


Рис. 5



К Т 4 а) Начертите произвольный треугольник и проведите с помощью линейки одну из его медиан. Как вы думаете, может ли медиана располагаться вне треугольника?
б) Начертите произвольный треугольник и проведите одну из его биссектрис. Как вы думаете, может ли биссектриса треугольника располагаться вне треугольника?

К Т 5 Перенесите изображение пирамиды $SABC$ (рис. *5*) в тетрадь и с помощью линейки проведите из точки S медианы её боковых граней.

6 На стороне AC треугольника ABC отмечена точка M так, что $\angle AMB = \angle BMC$. Сделайте чертёж. Докажите, что отрезок BM — высота треугольника ABC.

7 а) В треугольнике ABC: $AB = 12{,}7$ см, $BC = 7{,}3$ см, $AC = 6{,}5$ см. Чему равен периметр треугольника ABC?
б) Периметр треугольника ABC равен 30 см, причём $BC = 12$ см, а сторона AB в 2 раза больше AC. Найдите сторону AB.
в) Периметр треугольника DEN равен 54 см, причём $EN = 18$ см, а сторона DE на 6,4 см меньше стороны DN. Найдите сторону DN.

п. 2.1

Т 1 Начертите выпуклый четырёхугольник $ABCD$.
а) Запишите ещё два обозначения этого четырёхугольника.
б) Сколько соседних вершин имеет вершина четырёхугольника? Назовите вершины, соседние с вершиной C, с вершиной D.
в) Сколько противолежащих вершин имеет вершина четырёхугольника? Какие вершины четырёхугольника $ABCD$ являются противолежащими?
г) Назовите противолежащие стороны четырёхугольника; смежные стороны четырёхугольника.

Т 2 Вершинами четырёхугольника являются точки M, N, O, P.
а) Известно, что MN и PN — стороны четырёхугольника. Назовите его диагонали.
б) Известно, что ON — диагональ четырёхугольника. Назовите вершины, соседние с вершиной O.
в) Данный четырёхугольник можно назвать $OPNM$. Можно ли его назвать $MNOP$?

К Т 3 а) Начертите отрезок AB. Начертите четырёхугольник так, чтобы отрезок AB был: 1) стороной четырёхугольника; 2) диагональю четырёхугольника.
б) Проведите параллельные прямые. На одной из них обозначьте точки A и B, а на другой — C и D так, чтобы при последовательном соединении этих точек образовался выпуклый четырёхугольник $ABCD$.

К 4 Определите, может ли четырёхугольник $ABCD$ быть выпуклым, если:
а) прямая BC пересекает прямую AD;
б) точки B и C лежат по разные стороны от прямой AD;
в) прямая AB пересекает отрезок CD.

К 5 Существует ли четырёхугольник $ABCD$, в котором:
а) $AB = 15$ см, $BC = 18$ см, $AC = 33$ см; б) $AB = 7$ см, $BC = 11$ см, $AC = 5$ см?

6 а) Периметр четырёхугольника равен 100 см. Найдите стороны четырёхугольника, если известно, что одна из сторон в 2 раза меньше второй, на 10 см меньше третьей и на 20 см меньше четвёртой.
б) Найдите периметр четырёхугольника, если известно, что его меньшая сторона равна 8 см, две другие на 3 см больше, а четвёртая в 2 раза больше меньшей стороны.

7 а) Периметр четырёхугольника $ABCD$ равен 26 см. Периметр треугольника ABD равен 24 см, а периметр треугольника BCD равен 20 см. Найдите длину диагонали BD.
б) В четырёхугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC, равная 10 см. Периметр треугольника ABC равен 35 см, периметр треугольника ADC равен 24 см. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.

Т 8 **ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ**
1) Сколько острых углов может быть в выпуклом четырёхугольнике? А тупых?
2) Докажите, что если три угла выпуклого четырёхугольника являются тупыми, то четвёртый угол — острый.

Широко представлена система заданий на готовых чертежах

Т 11 а) Можно ли по данным рисунка 7 утверждать, что прямые a и b параллельны?

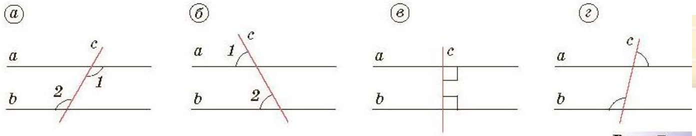


Рис. 7

б) На каких рисунках (рис. 8, а—г) прямые a и b параллельны?

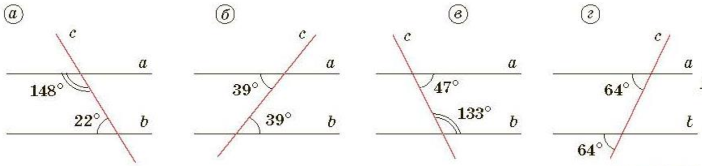


Рис. 8

Т 12 Параллельны ли прямые a и b на рисунке 9?

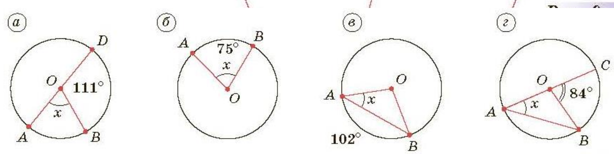


Рис. 22

Т 45 По данным рисунка 22 найдите неизвестную величину, обозначенную буквой x.

46 Отрезок AB — хорда окружности с центром в точке O (рис. 23), $\angle OAB = 37°$. Чему равна величина меньшей из дуг, на которые хорда AB делит окружность?

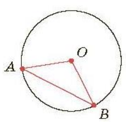


Рис. 23

К 47 а) Чему равен вписанный угол, если градусная мера дуги, на которую он опирается, равна 45°? 150°?

б) Величина вписанного угла равна 38°. Найдите угловую величину дуги, на которую опирается этот угол.

Т 48 Укажите на рисунке 24 вписанные углы.

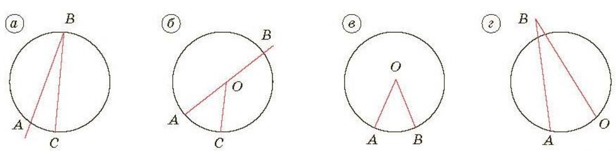


Рис. 24

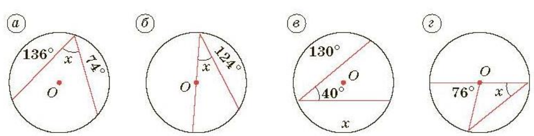


Рис. 25

Т 49 По данным рисунка 25 найдите неизвестную величину, обозначенную буквой x.

К Т 36 а) Используя данные рисунка 18, докажите в каждом случае равенство треугольников, изображённых на рисунках.

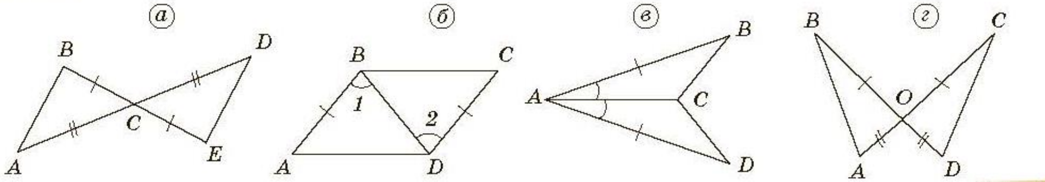


Рис. 18

40 Объясните, откуда следует, что четырёхугольник $ABCD$ на рисунке 8 — параллелограмм.

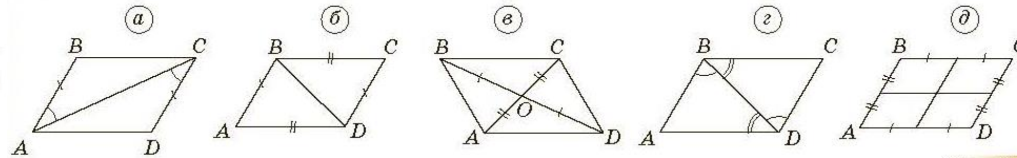


Рис. 8

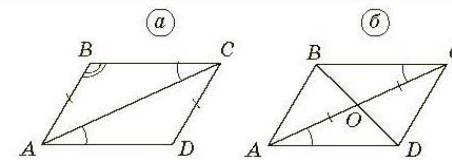


Рис. 9

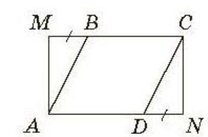


Рис. 10

Т 41 По данным рисунка 9 докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

1. По данным рисунка 11 найдите неизвестные стороны и углы треугольника.

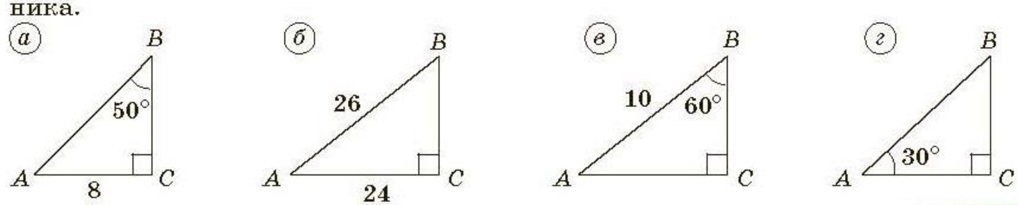
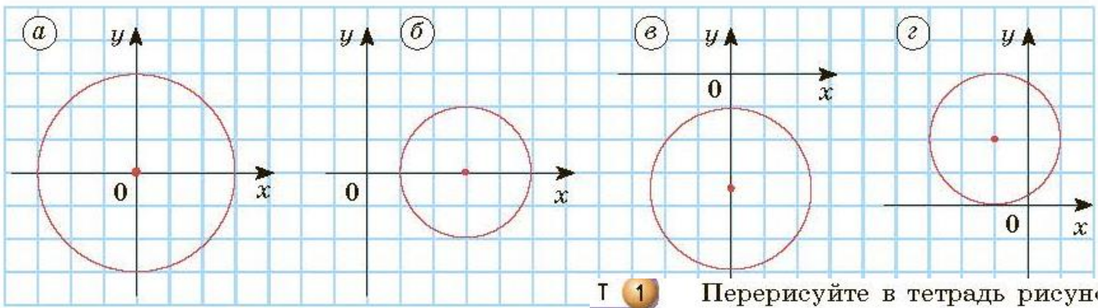


Рис. 11

Широко представлена геометрия на клетчатой бумаге

28 Используя свойства клетчатой бумаги (размер клетки 1 1), определите координаты центра окружности и её радиус (рис. *1*). В каждом случае запишите уравнение окружности.



Т 1 Перерисуйте в тетрадь рисунок *1*. Проведите через каждую из точек A и B прямые, параллельные прямой a.

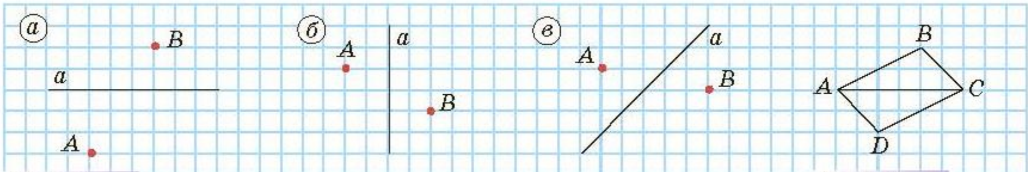


Рис. 1 *Рис. 2*

Т 2 Перерисуйте в тетрадь рисунок *2*. Через точки A и C проведите прямые a и b, перпендикулярные прямой AC. Что можно сказать про прямые a и b?

1. а) На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1
дренные треугольники (рис. *17*). В каждом случае в
угольника и его площадь.
б) На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изо
(рис. *18*). Найдите площадь каждого треугольника.

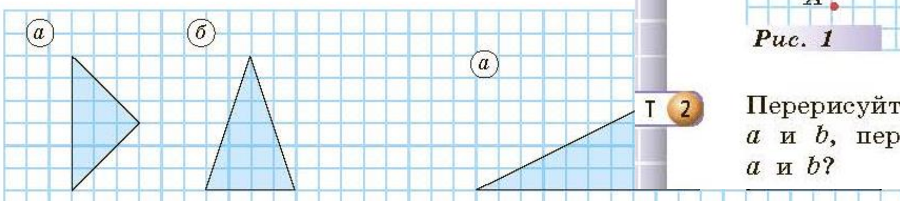


Рис. 17 *Рис. 18*

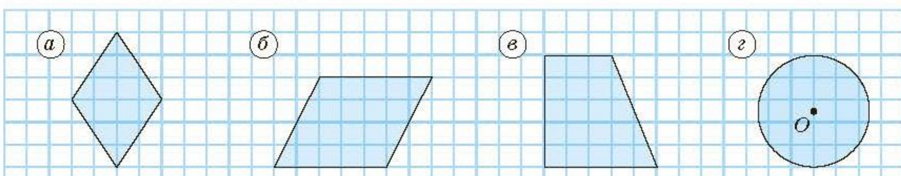


Рис. 19

2. Пользуясь свойствами клетчатой бумаги с размером клетки 1×1, найдите площади фигур, изображённых на рисунке *19*.

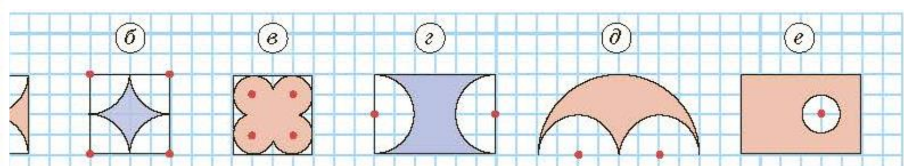


Рис. 13

лите площадь каждой закрашенной фигуры, изобра-
й на рисунке *13*, считая площадь одной клетки рав-
ной 1 кв. ед.

К Т 72 (Задача Гиппократа.) Около прямоугольника описали окружность и на каждой его стороне как на диаметре построили полуокружность (рис. *14*). Докажите, что сумма площадей закрашенных фигур равна площади прямоугольника.

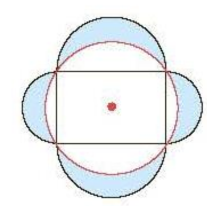


Рис. 14

Задачи-исследования присутствуют в каждом параграфе

К 7

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1) Может ли в треугольнике один из углов быть больше суммы двух других углов? Если да, то каков вид такого треугольника?
2) Может ли в треугольнике каждый из его углов быть меньше суммы двух других углов? Если да, то каков вид такого треугольника?
3) Может ли разность двух углов треугольника быть меньше третьего угла?
4) Существует ли треугольник, у которого разность любых двух углов больше третьего угла? Если да, то каков вид такого треугольника?
5) Если один из углов треугольника равен разности двух других углов, то каков вид этого треугольника?
6) Если величины углов треугольника относятся как $1:2:3$, то каков вид этого треугольника?
7) Каков вид треугольника, если сумма любых двух его углов больше $90°$?

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1. Будут ли равнобедренные треугольники подобны, если:
а) они имеют по равному углу, противоположному основанию треугольников?
б) они имеют по равному углу при основании треугольников?
в) они имеют по равному тупому углу?
г) они имеют по равному острому углу?

…угольные треугольники, если они имеют по

25

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1. В прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC найдите:
   а) гипотенузу AB, если $AC = 5$;
   б) катеты AC и BC, если гипотенуза AB равна 8 см.
2. Пусть катет прямоугольного равнобедренного треугольника равен a. Чему равна гипотенуза этого треугольника?
3. Во сколько раз гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника больше катета?
4. Сделайте вывод, как в прямоугольном равнобедренном треугольнике можно найти:
   а) гипотенузу, если известен катет треугольника;
   б) катет, если известна гипотенуза треугол
5. Найдите диагональ квадрата, если его стор
   а) 3 см; б) $4\sqrt{2}$ см; в) a.
6. Найдите сторону квадрата, если его диагон
   а) 8; б) $5\sqrt{6}$.

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1. Известны координаты трёх вершин параллелограмма. Как найти координаты его четвёртой вершины?
2. Известны координаты четырёх точек. Как проверить, являются ли они вершинами: а) параллелограмма? б) ромба? в) прямоугольника? г) квадрата? д) равнобедренной трапеции?
3. Известны координаты вершин четырёхугольника. Как вычислить его площадь? Приведите примеры.

Предусмотрено построение индивидуальных маршрутов

К Т 1

ЗАДАЧА–ИССЛЕДОВАНИЕ

1. Постройте прямоугольную систему координат.
2. Проведите прямую, параллельную оси абсцисс. Отметьте на этой прямой три точки и запишите их координаты. Что можно сказать про ординаты точек этой прямой?
3. Проведите прямую, перпендикулярную оси абсцисс. Что можно сказать про координаты точек этой прямой?
4. а) Из точки $M\,(2;\,5)$ опустили перпендикуляр на ось ординат. Запишите координаты основания перпендикуляра. б) Запишите координаты основания перпендикуляра, опущенного из точки M на ось абсцисс.
5. Найдите, чему равно расстояние от точки $N\,(-3;\,4)$ до: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат.
6. В прямоугольной системе координат заштрихуйте область, у всех точек которой абсциссы отрицательны, а ординаты положительны.
7. а) Какие оси пересекает отрезок AB, если $A\,(2;\,-4)$, $B\,(-3;\,-2)$?
б) Какая из точек — $A\,(2;\,3)$ или $B\,(-1;\,1)$ — ближе к началу координат?
в) Докажите, что отрезок AB пересекает ось ординат и не пересекает ось абсцисс, если $A\,(-5;\,4)$, $B\,(3;\,2)$.
8. Определите координаты точки M_1, симметричной точке $M\,(2;\,5)$ относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат.
9. Точки $A\,(\ldots;\,3)$ и $A_1\,(-4;\,\ldots)$ симметричны относительно оси ординат. Восстановите их координаты.
10. Запишите неравенство, которому удовлетворяют координаты точек третьего координатного угла.
11. Найдите геометрическое место точек координатной плоскости таких, что:
а) $x \leqslant 0;\ y \leqslant 0;$ б) $x > 0;\ y \leqslant 0;$ в) $x = y;$ г) $|x| = 3;$
д) $x = -4;\ y = 3;$ е) $x = 3;$ ж) $y = -x;$ з) $|y| \leqslant 2.$

В УМК усиленное внимание к формированию навыков исследовательской деятельности.
Такие задания позиционируются в первую очередь для коллективной работы, поэтому идет и эффективное формирование коммуникативной культуры,
умения работать в команде.
Кроме того, предоставляется возможность построение индивидуальных маршрутов.

Задачи повышенных уровней

К 81 Разрежьте равносторонний треугольник на 2, 3, 4, 6, 8, 12 равных треугольников.

К 82 На рисунке *49, а* равносторонний треугольник разрезан на 4 равносторонних треугольника, а на рисунке *49, б* — на 9 равносторонних треугольников. Разрежьте равносторонний треугольник на 6 равносторонних треугольников (не обязательно равных между собой).

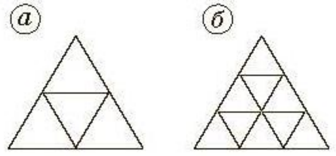


Рис. 49

К 83 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. *50*). Докажите, что:
а) точка D равноудалена от точек A_1 и C_1;
б) $\triangle A_1C_1D$ — равносторонний;
в) $\triangle A_1C_1D = \triangle B_1AC$.

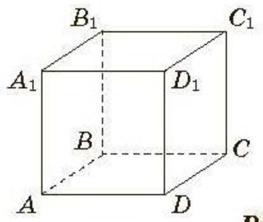


Рис. 50

К 84 Докажите равенство двух треугольников, если в этих треугольниках две стороны и медиана, проведённая к одной из них, соответственно равны.

б) На рисунке 7 изображены прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) и вписанный в него квадрат $CMKN$. Найдите BN, если $CM = 12$ см, $AC = 27$ см.

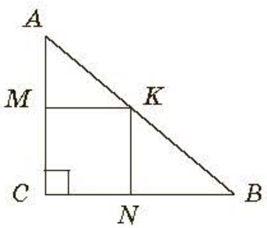


Рис. 7

К 21 Каждый из двух неравных, но подобных треугольников имеет стороны 9 см и 6 см. Найдите неизвестные стороны треугольников.

Т 22 а) Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M. Найдите меньшее основание трапеции, если большее основание AD равно 24 см, $CD = 12$ см, $CM = 18$ см.
б) Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M. Найдите CM, если $DM = 35$ см, $BC : AD = 3 : 5$.

Т 23 В равнобедренный треугольник с основанием 6 см и боковой стороной 9 см вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания этой окружности с боковыми сторонами треугольника.

119 а) Найдите углы треугольника с вершинами: а) $A(1; -\sqrt{3})$, $B(0{,}5; \sqrt{3})$, $C(-1; \sqrt{3})$.
б) Вычислите косинусы углов треугольника ABC, если $A(2; -3)$, $B(-1; -6)$, $C(-2; 1)$.

120 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным 1. Найдите угол между векторами: а) $\overrightarrow{B_1D_1}$ и $\overrightarrow{B_1D}$; б) $\overrightarrow{B_1D}$ и $\overrightarrow{BD_1}$.

Задачи для внеурочной деятельности, подготовки к олимпиадам

К 1 а) Найдите бо́льшую сторону «золотого» прямоугольника, если меньшая сторона равна 1.
б) Расположите прямоугольник так, чтобы его бо́льшая сторона была горизонтальной. Отрежьте от него квадрат с правой стороны. От оставшегося прямоугольника отрежьте квадрат сверху, затем слева, снизу и т. д. по спирали. Покажите, что существует точка M внутри исходного прямоугольника, которая не попадает ни в один из отрезанных квадратов. Найдите расстояние от M до левой и нижней сторон исходного прямоугольника.

2 Диагональ трапеции делит её на два подобных между собой треугольника. Отношение боковых сторон трапеции равно 2. Найдите отн
ний трапеции.

3 Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная осн
трапецию на две подобные между собой трапеции. Найдите
этой прямой внутри трапеции.

4 Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная о
пеции, проходит через точку пересечения её диагоналей.

Задачный материал содержит задания любого уровня сложности: как базового, так и повышенных уровней, что способствует формированию математического мышления, креативности, вариативности и других качеств современного мышления, позволяет подготовить учащихся к дальнейшему обучению математике на углублённом уровне.

К 1 На сторонах AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки K, M, N и P соответственно так, что MP AB; KN BC. Докажите, что точка O, точка пересечения отрезков MP и KN, лежит на диагонали AC тогда и только тогда, когда четырёхугольники $BMOK$ и $DPON$ равновелики.

К 2 На каждой стороне параллелограмма отмечена точка так, что площадь четырёхугольника с вершинами в отмеченных точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей этого четырёхугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.

3 Радиус вписанной в треугольник окружности равен 1, две стороны треугольника равны 3 и 4. Найдите площадь треугольника.

4 В прямоугольном треугольнике к гипотенузе проведена медиана. Из середины медианы опущены перпендикуляры на стороны треугольника. Найдите площадь треугольника с вершинами в основаниях этих перпендикуляров, если площадь исходного треугольника равна S.

5 На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки K, M и N так, что $AK : AB = BM : BC = CN : CA = 1 : 3$. Докажите, что площадь треугольника, ограниченного прямыми AM, BN и CK, составляет $\frac{1}{7}$ площади треугольника ABC.

К 6 Через середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$ проходит прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках M и N соответственно. Докажите, что треугольники ABN и CDM равновелики.

7 На сторонах AB и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечены соответственно точки M и N так, что четырёхугольник $AMCN$ — параллелограмм. Прямые BN и DM пересекаются в точке P. Докажите, что четырёхугольники $AMPN$ и $CBPD$ равновелики.

К 8 а) Постройте треугольник, равновеликий данной трапеции.
б) Постройте прямоугольник, равновеликий данной трапеции.

К 9 На отрезке, соединяющем середины оснований AD и BC трапеции $ABCD$, отмечена точка M. Докажите, что треугольники AMB и CMD — равновелики.

Систематическое повторение

ПОВТОРЯЕМ

1. Найдите на рисунке *5* параллельные стороны у четырёхугольников.
2. Периметр четырёхугольника $ABCD$ равен 7,2 см. Длины его сторон пропорциональны числам 3, 4, 5 и 6. Найдите длины всех сторон четырёхугольника.
3. Углы треугольника пропорциональны числам 2, 3, 5. Определите вид треугольника.
4. Могут ли стороны треугольника быть пропорциональны числам 2, 3 и 5?

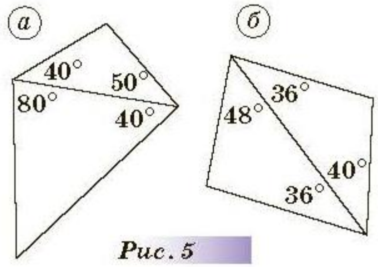


Рис. 5

Начиная с 8 класса к каждому параграфу предусмотрена система упражнений на повторение. Кроме того, систематическое повторение включено и в основной задачный материал.

ПОВТОРЯЕМ

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC медиана BM образует угол 30° с боковой стороной. Из точки M проведена высота MH треугольника BMC. Найдите HC, если $AB = 12$.
2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C внешний угол при вершине B равен 120°, $BC + AB = 36$. Найдите BC и AB.

ПОВТОРЯЕМ

1. В равнобедренной трапеции биссектриса тупого угла параллельна боковой стороне. Найдите углы трапеции.
2. В прямоугольной трапеции боковая сторона равна 12 см, а меньший угол — 60°. Найдите высоту трапеции.
3. Средняя линия равнобедренной трапеции равн
на — 17. Высота трапеции равна 8. Найдите основа

ПОВТОРЯЕМ

1. На рисунке *9* из точки M на стороны угла A опущены перпендикуляры MB и MC. Известно, что $MB = MC$.
а) Докажите, что луч AM — биссектриса угла A.
б) Найдите угол BAC, если известно, что $\angle AMB = 50°$.
2. На рисунке *10* прямые AB и CM пересекаются. Докажите, что прямые a и b, содержащие биссектрисы вертикальных углов, перпендикулярны.
3. Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC.
а) AM и CN — его биссектрисы. Докажите, что $BN = BM$.
б) $AB = 15$, $\angle ABC = 120°$. Найдите медиану BE.

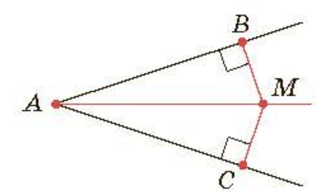


Рис. 9

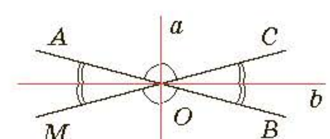


Рис. 10

Эффективная подготовка к экзамену

В учебнике 9 класса в конце каждого параграфа есть рубрика «Готовимся к экзамену, где представлены разноуровневые задания в формате ОГЭ

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. Наклонная крыша установлена на трёх опорах, основания которых расположены на одной прямой на одинаковом расстоянии друг от друга (рис. *16*).
а) Найдите высоту средней опоры, если высота большей опоры равна 3 м, а меньшей — 2,2 м.
б) Найдите высоту меньшей опоры, если высота большей опоры равна 2,8 м, средней опоры — 2,5 м.
2. Вертикальный столб крепится тросом длиной 10 м к стене дома на высоте 3 м от земли (рис. *17*). Чему равна высота столба, если его основание расположено на расстоянии 8 м от дома?
3. В остроугольном треугольнике высота CH равна 5 см, сторона $BC = 17$ см (рис. *18*). Чему равен косинус угла B?

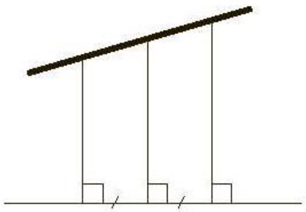


Рис. 16

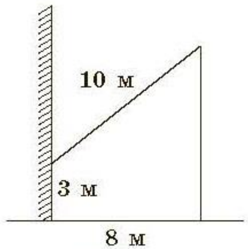


Рис. 17

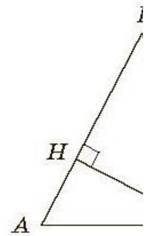


Рис. 18

ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (рис. *21*) изображен метрические фигуры. Найдите площадь каждой фигуры.

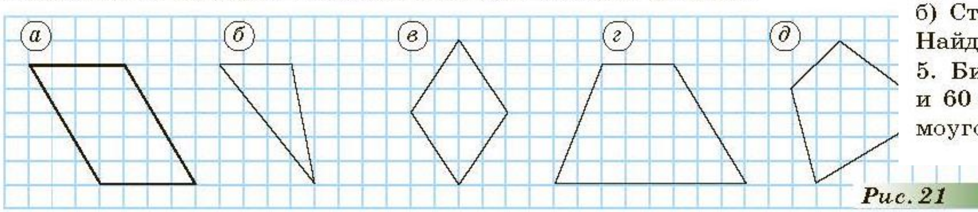


Рис. 21

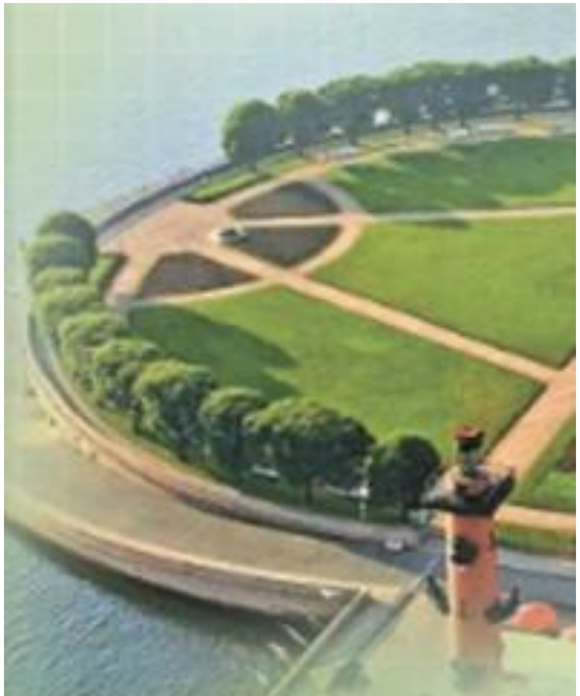
2. Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 40.
3. Площадь прямоугольного треугольника равна 20, один из его катетов — 5. Найдите другой катет.
4. Один из углов равнобедренного треугольника равен 120°, боковая сторона — 10. Найдите площадь треугольника.
5. Сторона равностороннего треугольника равна 8. Чему равна площадь этого треугольника?
6. Сторона параллелограмма равна 10, высота параллелограмма образует с этой стороной угол в 60°. Найдите площадь параллелограмма, если другая сторона равна 18.

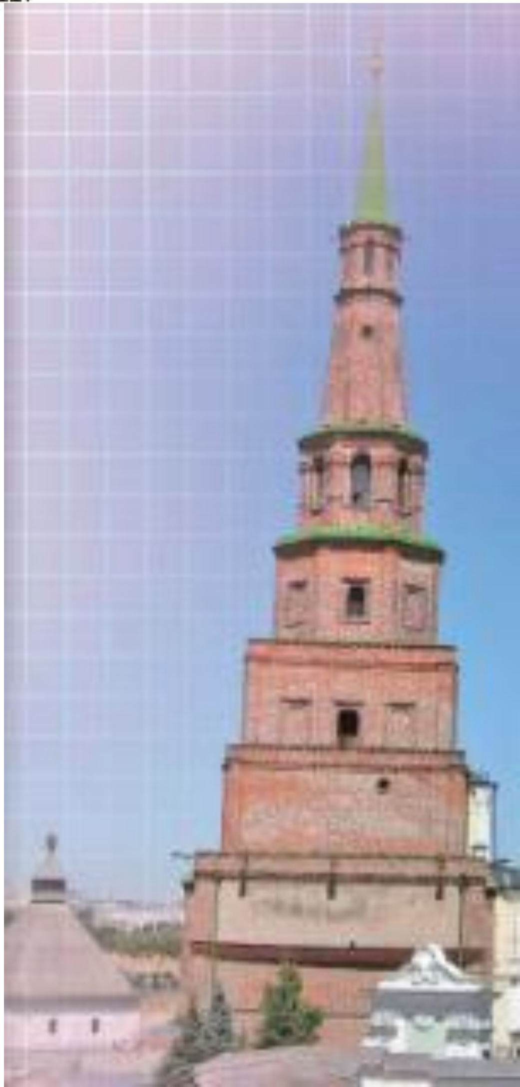
ГОТОВИМСЯ К ЭКЗАМЕНУ

1. а) Диагональ параллелограмма образует со сторонами углы 35° и 40°. Найдите углы параллелограмма.
б) Диагональ прямоугольника образует с одной из сторон угол 28°. Найдите угол между диагоналями прямоугольника.
2. а) Периметр параллелограмма равен 44, а одна из сторон на 6 больше другой. Найдите стороны параллелограмма.
б) Периметр прямоугольника равен 28, одна из сторон на 2 меньше другой. Найдите диагональ и площадь параллелограмма.
3. а) Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если его диагональ равна 10, а расстояние от вершины B до диагонали AC равно 3.
б) Сторона квадрата равна 8. На стороне AB отмечена точка M так, что $CM = 10$. Найдите площадь четырёхугольника $AMCD$.
4. а) Стороны параллелограмма равны $5\sqrt{2}$ и 2, один из углов — 45°. Найдите бóльшую диагональ параллелограмма.
б) Стороны параллелограмма равны 8 и 14, а одна из диагоналей — 18. Найдите другую диагональ параллелограмма.
5. Биссектриса угла прямоугольника делит его диагональ на отрезки 30 см и 60 см. Найдите отрезки, на которые эта биссектриса делит сторону прямоугольника.

101 а) Во Владивостоке имеется фуникулёр, по которому курсирует трамвай. Длина фуникулёра 183 м, а разница между высшей и низшей точками равна 70 м. Под каким углом к горизонту движется трамвай фуникулёра?
б) Башня Сююмбике казанского Кремля относится к «падающим» башням. Шпиль башни отклонён от вертикали на 1,98 м. Высота башни составляет 58 м. Чему равен угол наклона оси башни? Сравните угол наклона башни Сююмбике с углом наклона Пизанской башни.

Сюжеты задач из окружающей действительности

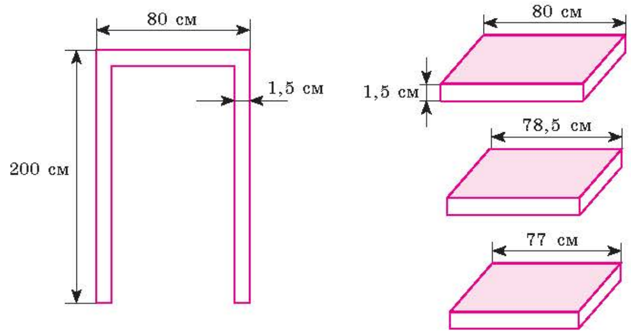




Формируем функциональную грамотность. Рубрика «Применяем геометрию»

ПРИМЕНЯЕМ ГЕОМЕТРИЮ

96 На чертеже представлены размеры стеллажа, к которому нужно подобрать полки. Какой длины и какое максимальное количество полок нужно купить, если известно, что расстояние между полками должно быть равно 30 см?



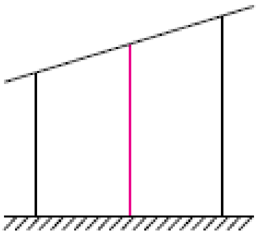
Решение. ____

____

______________________________________ Ответ:

ПРИМЕНЯЕМ ГЕОМЕТРИЮ

1. Над скамейками на школьном стадионе сделан навес от дождя и солнца, стоящий по боковым сторонам на двух столбах. Решено укрепить конструкцию, поставив между этими столбами ещё один ровно посреди. Какой длины нужен столб, если высота большего из стоящих столбов равна 3,2 м, а меньшего — 2,3 м, столб нужно вкопать на глубину 0,6 м?



2. Предложите способ, как имея лист А4, одними перегибаниями листа получить:

а) параллелограмм, не являющийся прямоугольником: ______________________

____

б) ромб: ____

«Применяем геометрию»

ПРИМЕНЯЕМ ГЕОМЕТРИЮ

1 Составьте инструкцию, как изготовить рамку для фотографии, если размеры фотографии 10×15 см, а ширина багета 2 см.

1. Материал: ______________________
2. Инструменты: ______________________
3. Порядок работы: ______________________

____

____

2 В салон самолета можно взять багаж, размеры которого не превышают $22 \times 40 \times 55$ см. Составьте инструкцию, как измерить размеры дорожной сумки.

____

____

____

____

ПРИМЕНЯЕМ ГЕОМЕТРИЮ

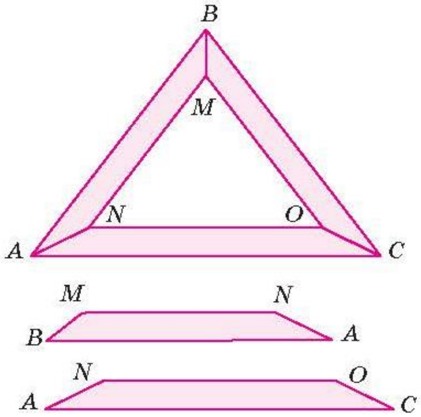
1. Требуется изготовить наличник на окно дачного дома. Окно представляет собой равнобедренный треугольник с углом 80°, противоположным основанию треугольника. Определите, под какими углами нужно выпиливать детали наличника. Какие инструменты для этого понадобятся?

____

____

____

____



Особое внимание к формированию читательской компетенции

11 По данному краткому условию составьте различные варианты текста задачи и найдите неизвестную величину.

а) Дано: $M \in AB$, $BM = AM + 3$, $AB = 19$

Найти: AM.

б) Дано

$DE = 3$

Найти:

Неверно! Опровергните утверждение: через точку, не лежащую на прямой, можно провести только один отрезок, параллельный данной прямой.

Неверно! Какое из утверждений неверно?

1) Если точка C лежит на луче AB, то она обязательно лежит и на отрезке AB.

2) Если точка C лежит на отрезке AB, то она лежит и на луче AB.

п. 1.6

12 Прочитайте п. 1.6 на с. 18–19 учебника и объясните, почему данные ниже утверждения неверны. В каждом случае изобразите рисунок с контрпримером.

у

1. Два луча образуют угол.
2. Прямая — это развёрнутый угол.
3. Угол ABC можно назвать ещё и ACB, и BAC.
4. Луч, выходящий из вершины угла, делит его на два угла.

- Объясните, в чём состоит метод геометрических мест точек в задачах на построение.
- Обсудите с соседом по парте и приведите примеры задач из § 5.2 и 5.3, при решении которых использовался метод геометрических мест точек.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Дайте определение вертикальных углов.
- Сформулируйте и докажите свойство вертикальных углов.
- Какими могут быть два угла, образованные при пересечении двух прямых?
- Верно ли утверждение: если равные углы имеют общую вершину, то они вертикальные?
- С соседом по парте рассмотрите карту вашего города или Москвы — столицы нашей великой Родины (можно воспользоваться яндекс-картами: https://yandex.ru/maps/) и найдите улицы, образующие:
  а) вертикальные углы;
  б) смежные углы.

7 Сколько и какие условия должны выполняться, чтобы для отрезков AB, BC, и AC выполнялось равенство: $AB = AC + BC$?

8 Точки A, B и C лежат на одной прямой. Какое соотношение между отрезками AB, AC и BC выполняется, если точка A лежит между точками B и C?

9 1. Прочитайте на с. 15 учебника, как принято обозначать на чертежах равные отрезки.

у

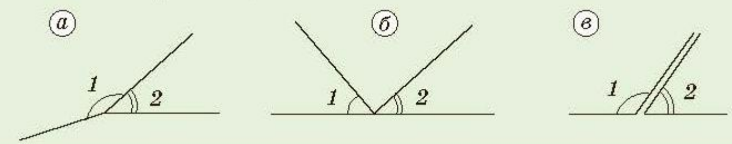
2. Начертите отрезок AB и отложите от точек A и B равные между собой отрезки AM и BN. Отметьте на чертеже равенство этих отрезков.

Верные и неверные утверждения

21 С соседом по парте или командой обсудите утверждения и укажите верные из них.

1. Если косинусы углов равны, то равны и сами углы.
2. Если синусы углов равны, то равны и сами углы.
3. Существует угол, синус и косинус которого равны.
4. Косинус угла треугольника может быть отрицательным
5. Синус угла треугольника может быть отрицательным ч
6. Косинус прямого угла равен 0.
7. Синус угла треугольника может быть равен 1.
8. Косинус угла треугольника может быть равен 1.
9. Синусы смежных углов равны.
10. Косинус любого острого угла больше косинуса любого тупого угла.
11. Синус любого острого угла больше синуса любого тупого угла.
12. Существует угол, синус и косинус которс

Неверно! Объясните, почему $\angle 1$ и $\angle 2$ не являются смежными.

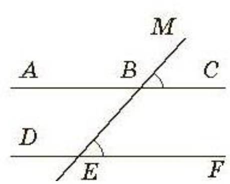


Укажите неверные высказывания.

1) Сумма углов равнобедренного треугольника равна 180°.
2) Если диагонали параллелограмма равны, то это квадрат.
3) Тангенс любого острого угла меньше единицы.
4) Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.
5) Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.
6) Каждая сторона треугольника меньше разности двух других его сторон.
7) Через любые три точки проходит ровно одна прямая.
8) Через любые две точки можно провести не менее одной прямой.
9) Каждая сторона треугольника не превосходит суммы двух других его сторон.
10) Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит хорду пополам.

89 Укажите неверные высказывания:

1) Если один из смежных углов острый, то другой тупой.
2) Если сумма двух углов 180 , то они смежные.
3) Если один из вертикальных углов острый, то другой — тупой.
4) Сумма вертикальных углов может быть больше 180 .
5) Если сумма трёх углов 180 , то они смежные.
6) Если при пересечении двух прямых один из вертикальных углов прямой, то и смежный с ним также прямой.
7) Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.
8) Если углы вертикальные, то они равны.
9) Если углы равны, то они вертикальные.
10) Если два угла имеют общую сторону, то они смежные.



Особое внимание к формированию читательской компетенции Специальная система заданий в каждой главе тренажёра представлена в рубрике «Работаем с текстом»

РАБОТАЕМ С ТЕКСТОМ

п. 2.1

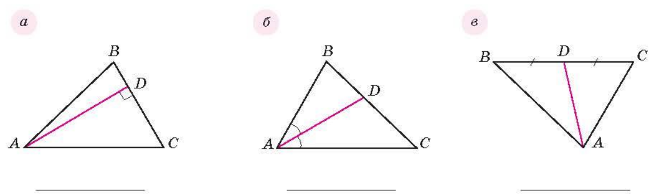
1 1. Прочитайте текст учебника на с. 55 и ответьте на вопросы.
Какую геометрическую фигуру представляет собой:

а) биссектриса треугольника: ______________________,
её особенности: ______________________.
отличие от биссектрисы угла: ______________________

б) медиана треугольника: ______________________,
её особенности: ______________________.

в) высота треугольника: ______________________,
её особенности: ______________________.

2. Под каждым рисунком подпишите, чем является отрезок AD в треугольнике.



__________ __________ __________

2 Составьте верное утверждение.

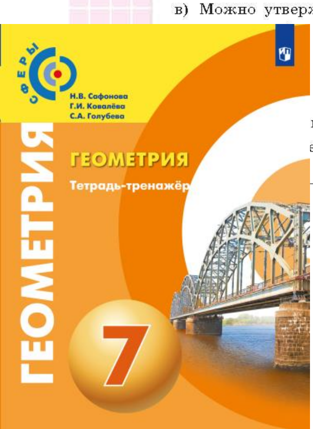
а) Можно утверждать, что AD — биссектриса треугольника ABC, если:
1. $BD = DC$ 2. $\angle BAD = \angle CAD$ 3. $\angle BDA = \angle CDA$

б) Можно утверждать, что AM — медиана треугольника ABC, если:
1. $AB = AC$ 2. $AM = MC$ 3. $BM = MC$

в) Можно утверждать, что AH — высота треугольника, если:
2. $\angle AHB = \angle AHC$ 3. $\angle ABC = 90°$

на с. 56 учебника определение равнобедренного треугольника.
е свойство равнобедренного треугольника содержит определение.

____



РАБОТАЕМ С ТЕКСТОМ

п. 3.1

1 Прочитайте определение параллельных прямых на с. 80 учебника. Какое свойство параллельных прямых оно содержит? ______________________

____

2 1. На с. 80 учебника прочитайте один из признаков параллельности прямых.
Запишите условие теоремы: ______________________
Запишите заключение теоремы: ______________________
2. Укажите в окружающей вас обстановке примеры, иллюстрирующие этот признак. ______________________
3. Как вы считаете, может ли в треугольнике быть два прямых угла? Обоснуйте своё утверждение. ______________________

____

3 Известно, что прямые a и b параллельны. Как по-другому можно охарактеризовать взаимное расположение прямых a и b?
прямые a и b ______________________

п. 3.2

4 Прочитайте признак параллельности прямых на с. 82 учебника. Запишите:
условие теоремы: ______________________
заключение теоремы: ______________________

5 Выберите верное продолжение утверждения.
Прямые параллельны, если при пересечении этих прямых секущей равны:
1. смежные углы 2. накрест лежащие углы 3. односторонние углы
4. соответственные углы 5. вертикальные углы

Ответ: __________

п. 3.3

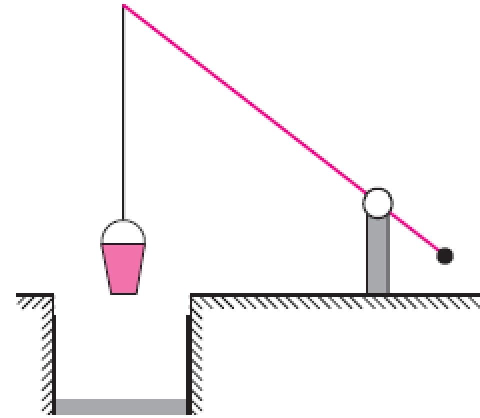
6 1. Прочитайте следствие 1 на с. 84 учебника и запишите:
условие теоремы: ______________________
заключение теоремы: ______________________
2. Как вы считаете, эта теорема является признаком параллельности прямых или свойством параллельных прямых? ______________________

28 Длинное плечо «журавля» равно 6 м, короткое 2 м.

а) На сколько метров опустится конец длинного плеча «журавля», если конец короткого поднялся на 1,5 м?

____

б) На сколько метров опустится конец короткого плеча, если конец длинного плеча поднялся на 2,7 м? ______________



признаки подобия:
...ных треугольников;
...ых треугольников.

...е дома, удалённого на 50 м от объектива фотоаппарата, имеет на его дисплее высоту 10 мм. Расстояние от объектива до изображения равно 50 м. Какова высота дома?
б) Найдите высоту дерева, если длина его тени равна 2,8 м, а длина тени от вертикального столба высотой 2 м равна 6,1 м (рис. *10*).

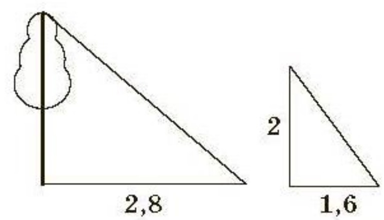


Рис. 10

Т 32 На рисунке *11* изображён колодец с «журавлём». Короткое плечо имеет 2 м в длину, а длинное плечо — 8 м.
а) На сколько метров опустится конец длинного плеча, если конец короткого плеча поднялся на 1,5 м?
б) На сколько метров опустится конец короткого плеча, если конец длинного плеча поднимется на 4 м?

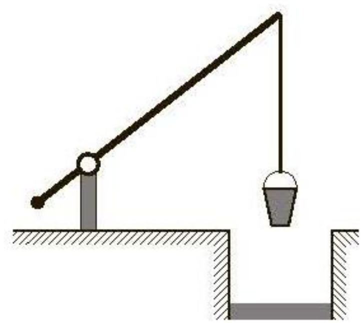


Рис. 11

В конце каждой главы представлена рубрика «Подведём итоги», направленная на систематизацию и обощение материала главы

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

- Какие прямые называются параллельными? Как читают запись $a \parallel b$?
- Какие отрезки называются параллельными? А лучи?
- Являются ли два отрезка параллельными, если они не имеют общих точек?
- Верно ли, что из точки, не принадлежащей данной прямой, можно провести только один луч, параллельный данной прямой?
- Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то каково взаимное расположение этой прямой и второй из параллельных прямых?
- Какие пары углов образуются при пересечении двух прямых третьей?
- Сформулируйте признаки параллельности двух прямых и докажите их.
- Сформулируйте аксиому параллельности прямых.
- Почему Н. И. Лобачевского называют Коперником в геометр
- Сколько можно провести отрезков, параллельных данной пр точку, не принадлежащую этой прямой?
- Докажите, что если любая прямая, пересекающая прямую ет и прямую b, то прямые a и b параллельны.
- Каково взаимное расположение двух прямых, параллельн прямой?
- Каким свойством обладают накрест лежащие углы, образо пересечении двух параллельных прямых секущей? Докажите э
- Может ли сумма накрест лежащих углов при пересечении лельных прямых секущей быть равной 180°?
- Каким свойством обладают соответственные углы, образо пересечении двух параллельных прямых секущей? Докажите э
- Сформулируйте и докажите свойство односторонних углов, об двумя параллельными прямыми и секущей.
- Могут ли оба односторонних угла при пересечении двух па прямых секущей быть тупыми?
- Могут ли быть равными односторонние углы при пересечен раллельных прямых секущей?
- Что называют расстоянием между параллельными прямыми
- Каким свойством обладают углы с соответственно паралле ронами? Докажите это свойство.
- Каким свойством обладают углы с соответственно перпенди сторонами?

ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ:

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

- Объясните, как определяют синус и косинус угла α, где $0° < \alpha < 180°$.
- Что такое тангенс и котангенс угла?
- Какие задачи на решение треугольников можно решить с помощью тангенса (котангенса)?
- Как связаны между собой $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$?
- Как связаны между собой синус и косинус угла α с синусом и косинусом угла $180° - \alpha$?
- В каких пределах находится значение синуса угла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?

гла α, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
принимать α?
$\sin 180°$; $\cos 180°$?
кете решить с помощью
щью теоремы косинусов?
й теоремой Пифагора?
еоремы косинусов?
инусов?
угол между ними. Как
ка?
кете решить с помощью
ощью теоремы синусов?

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

- Докажите утверждение о том, что высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, разделяет треугольник на подобные треугольники.
- Сформулируйте и докажите утверждения о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике.
- Что называют средним геометрическим двух отрезков?
- Что называют средним арифметическим двух отрезков?
- Докажите, что катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.
- Докажите, что высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.
- Каково соотношение между средним геометрическим и средним арифметическим двух отрезков? Докажите его.
- Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.
- Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Пифагора.
- Докажите, что гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника в $\sqrt{2}$ раз больше его катета.
- Приведите примеры прямоугольных треугольников, длины сторон которых измеряются целыми числами.
- Докажите, что любая наклонная больше перпендикуляра, проведённого из данной точки к данной прямой.
- Что называется синусом, косинусом, тангенсом, котангенсом острого угла прямоугольного треугольника?
- Выразите катет прямоугольного треугольника через: а) гипотенузу и противолежащий острый угол; б) гипотенузу и прилежащий острый угол; в) другой катет и противолежащий острый угол.
- Какое равенство называют основным тригонометрическим тождеством?
- Какие ещё тригонометрические тождества вам известны?
- Чему равны значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45°, 60°? Ответ обоснуйте.
- Что означает фраза «Решить прямоугольный треугольник»?

В конце учебников представлена рубрика «Это вы можете», направленная на систематизацию и обобщение изученного материала, формирование ключевых компетенций

ЭТО ВЫ МОЖЕТЕ

Весь год вы изучали геометрию, учились доказывать теоремы, решать задачи, строить диалоги, работая сообща. Вы уже многое знаете и умеете. Мы предлагаем вам придумать свои теоремы о свойствах и признаках изученных фигур. А также придумать задачи, где будут применяться эти теоремы. Работу эту целесообразно выполнять командой. Желаем успехов!

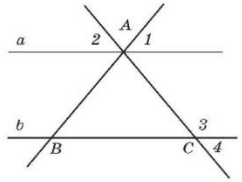
1 1) Назовите три признака равенства треугольников.
знакам можно определить, что два треугольника рав
можно больше вариантов.
2) В четырёхугольнике $ABCD$: $AB = CD$, $BC = AD$. До
четырёхугольнике диагонали делятся точкой пересечен
3) Придумайте задачи, в которых применяются п
признаки равенства треугольников.

2 1) По каким признакам можно определить, что д
треугольника равны? Укажите как можно больше вари
2) В остроугольных равнобедренных треугольниках
ными основаниями AC и MO равны высоты BH и NK.
треугольника ABC равен 110°. Найдите угол, образова
угла MNO со стороной NO.
3) Придумайте задачи, в которых используются указанные вами признаки равенства равнобедренных треугольников.

3 1) По каким признакам можно определить, что два прямоугольных треугольника равны? Укажите как можно больше вариантов.
2) В равнобедренном треугольнике ABC провели медиану BM, продолжили её на отрезок MD, равный отрезку BM, и провели отрезки AD и DC. Градусная мера угла ADM при этом оказалась равной 42°. Чему равен внешний угол треугольника MBC при вершине B?
3) Придумайте задачи, в которых используются указанные вами признаки равенства прямоугольных треугольников.

4 1) У равнобедренного треугольника углы при основании равны. Какими ещё свойствами обладает равнобедренный треугольник? Укажите как можно больше вариантов.
2) Через вершину B равнобедренного треугольника ABC проведена прямая BM, параллельная основанию AC. Внешний угол BCD треугольника ABC равен 116°. Чему равен угол ABM? Рассмотрите все возможные варианты.
3) Придумайте задачи, в которых используются указанные вами свойства равнобедренного треугольника.

5 1) Если два угла в треугольнике равны, то этот треугольник — равнобедренный. По каким ещё признакам можно определить, что треугольник — равнобедренный? Укажите как можно больше вариантов.
2) На рисунке *1*: $\angle 2 + \angle 3 = 180°$, $\angle 1 = \angle 4 = 50°$. Докажите, что $BC > AB$.
3) Придумайте задачи, в которых используются указанные вами признаки рав-



пересечения делятся пополам. $\angle BCD = 120°$. Диагональ AC равна 7 см. Чему равен периметр четырёхугольника $ABCD$?
3) Придумайте задачи, в которых используются указанные вами свойства прямоугольного треугольника.

8 1) Два отрезка равны, если равны их длины. В каких ещё случаях можно утверждать, что два отрезка равны? Укажите как можно больше вариантов.
2) В треугольниках ABC и DEF проведены равные между собой медианы AM и DN. Кроме того, известно, что $\angle B = \angle E$, $\angle AMB = \angle DNE$. Докажите, что отрезки AC и DF равны.
3) Придумайте задачи, в которых используются указанные вами признаки равенства двух отрезков.

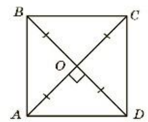
9 1) Два угла равны, если равны их градусные меры. В каких еще случаях можно утверждать, что два угла равны? Укажите как можно больше вариантов.
2) В остроугольных треугольниках ABC и MNP проведены высоты BD и NO, соответственно образующие со сторонами BC и NP углы в 45°. Известно, что $MN = AB$, $DC = OP$, внешний угол при вершине A треугольника ABC равен 123°. Найдите угол MNP.
3) Придумайте задачи, в которых используются указанные вами признаки равенства двух углов.

В начале учебников 8 и 9 классов представлен весь ранее изученный теоретический материал

Квадрат и его свойства.

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется **квадратом**.

Диагонали квадрата равны, перпендикулярны и делят его углы пополам (рис. *46*).



$ABCD$ — квадрат. $AC = BD$, $AC \perp BD$, $\angle BOA = \angle BOC$.

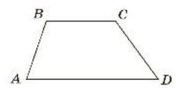
Рис. 46

Трапеция.

Четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие — нет, называется **трапецией** (рис. *47*).

Трапеция называется **прямоугольной**, если один из её углов прямой.

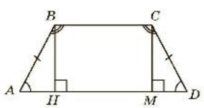
Трапеция называется **равнобедренной**, если её боковые стороны равны.



$BC \parallel AD$, $AB \nparallel CD$. Четырёхугольник $ABCD$ — трапеция.

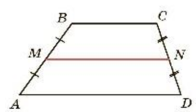
Рис. 47

В равнобедренной трапеции равны:
— углы при каждом основании;
— диагонали (рис. *48*).



$AB = CD$, $ABCD$ — равнобедренная трапеция. $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$, $AC = BD$.

Рис. 48



MN — средняя линия трапеции $ABCD$.

Рис. 49

Средняя линия трапеции.

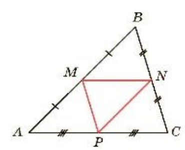
Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется **средней линией трапеции** (рис. *49*).

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Средняя линия треугольника.

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется **средней линией треугольника** (рис. *50*).

Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна её половине.



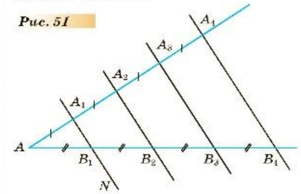
MN, PN, PM — средние линии треугольника ABC.

Рис. 50

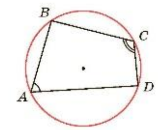
Теорема Фалеса.

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне (рис. *51*).

Рис. 51



Если $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \ldots$ и $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 \ldots$, то $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 \ldots$.



Четырёхугольник $ABCD$ — вписанный. $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$.

Рис. 52

Вписанные и описанные четырёхугольники.

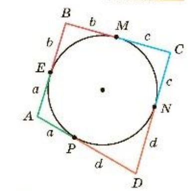
В любом вписанном четырёхугольнике сумма противолежащих углов равна 180° (рис. *52*).

Около любого прямоугольника можно описать окружность.

Около любой равнобедренной трапеции можно описать окружность.

В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны (рис. *53*).

В любой ромб можно вписать окружность.



$AB + CD = BC + AD$.

Рис. 53

ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

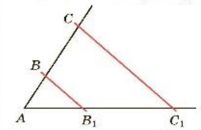
Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки (рис. *54*).

Подобные треугольники.

Два треугольника называются **подобными**, если углы одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника, а соответственные стороны пропорциональны (рис. *55*).

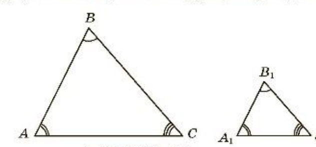
Равные треугольники также считаются подобными с коэффициентом подобия, равным 1.

Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.



Если $BB_1 \parallel CC_1$, то $\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C_1}$.

Рис. 54



$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Рис. 55

Представлен список проектов и дополнительной литературы

ПРОЕКТЫ, КОТОРЫЕ МЫ РЕКОМЕНДУЕМ

1. «Всё вокруг — геометрия».
Цель этого проекта — доказать, что геометрия — это часть окружающего нас мира.
Для этого каждый раз, изучая новую геометрическую фигуру, находите её примеры в окружающей обстановке, делайте фото или описание. В конце учебного года представьте в качестве доказательства приготовленные вами материалы.

2. Жёсткость треугольника.
Цель этого проекта — показать применение жёсткости треугольника в обычной жизни, архитектуре и технике.

3. Параллельный и перпендикулярный мир.
Цель этого проекта — доказать, что окружающий нас мир пронизан параллельными и перпендикулярными прямыми.

4. Геометрия — древнейшая наука.
Цель — изучить зарождение геометрии как науки.
Рекомендуемая литература:
1. *Перельман Я. И.* Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М.; Л.: ГГТИ, 1950 или на сайте **http://ilib.mirrir1.mccme.ru**
2. *Глейзер Г. И.* История математики в школе: 7—8 кл. — М.: Просвещение, 1982.
3. Энциклопедия для детей. Т. 11: Математика. — М.: Аванта+, 2003.
4. История элементарной геометрии: **http://isgeom.narod.ru/index.html/**
5. Электронная библиотека книг по математике: **http://math.ru/lib/**

5. Евклид и его книга «Начала».
Цель работы — проанализировать и осознать значимость труда Евклида для современной геометрии.
Рекомендуемая литература:
1. «Начала» Евклида. Кн. 1—4 / Пер. с греч. и ком. Д. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М. Я. Выгодского и И. Н. Веселовского. — М.; Л.: ГГТИ, 1948 или на сайте **http://ilib.mirrir1.mccme.ru**
2. *Перельман Я. И.* Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М.; Л.: ГГТИ, 1950 или на сайте **http://ilib.mirrir1.mccme.ru**
3. *Глейзер Г. И.* История математики в школе: 7—8 кл. / Г. И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1982.
4. Энциклопедия для детей. Т. 11: Математика. — М.: Аванта+, 2003.
5. История элементарной геометрии: **http://isgeom.narod.ru/index.html/**
6. Электронная библиотека книг по математике: **http://math.ru/lib/**
7. Евклид. Начала: **http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/geometry/nachala.htm/**

6. Николай Иванович Лобачевский и рождение неевклидовой геометрии.
Цель проекта — познакомиться с биографией Н. И. Лобачевского и его вкладом в развитие неевклидовой геометрии.

Рекомендуемая литература:
1. *Перельман Я. И.* Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М.; Л.: ГГТИ, 1950 или на сайте **http://ilib.mirrir1.mccme.ru**
2. *Глейзер Г. И.* История математики в школе: 7–8 кл. / Г. И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1982.
3. Энциклопедия для детей. Т. 11: Математика. — М.: Аванта+, 2003.
4. *Колесников М. С.* Лобачевский / М. С. Колесников. — М.: Молодая гвардия, 1965.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волошинов А. В.* Математика и искусство / А. В. Волошинов. — М.: Просвещение, 2000.
2. *Гарднер М.* Математические новеллы / М. Гарднер. — М.: Мир, 2000.
3. *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения / М. Гарднер. — М.: Мир, 1999.
4. *Глейзер Г. И.* История математики в школе / Г. И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1964 или на сайте **http://ilib.mirrir1.mccme.ru**
5. *Левитин К. Е.* Геометрическая рапсодия / К. Е. Левитин. — М.: Знание, 1976, или на сайте **http://ilib.mirrir1.mccme.ru**, или М.: Камерон, 2004.
6. «Начала» Евклида. Кн. 1—4 / Пер. с греч. и ком. Д. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М. Я. Выгодского и И. Н. Веселовского. — М.; Л.: ГГТИ, 1948 или на сайте **http://ilib.mirrir1.mccme.ru**
7. *Перельман Я. И.* Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М.; Л.: ГГТИ, 1950 или на сайте **http://ilib.mirrir1.mccme.ru**
8. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии / В.В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2007.
9. *Шарыгин И. Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия / И. Ф. Шарыгин. — М.: Наука, 1982 или на сайте **http://ilib.mirrir1.mccme.ru**
10. Энциклопедия для детей. Т. 11: Математика / Глав. ред. М. Д. Аксёнова. — М.: Аванта+, 2003.

Система заданий тетради-тренажёра способствует не только эффективному усвоению предметного учебного материала, но и формированию функциональной грамотности

Содержит рубрики

- Работаем с текстом
- Работаем с моделями
- Анализируем и рассуждаем
- Применяем геометрию
- Выполняем тест

Рубрика тетради-тренажёра «Работаем с текстом»

РАБОТАЕМ С ТЕКСТОМ

п. 4.1

1 Прочитайте в п. 4.1 учебника теорему о сумме углов треугольника.

1. Запишите: условие теоремы: ____________________

заключение теоремы: ____________________

Какой приём использовался при доказательстве теоремы? ____________________

____

Какую ранее изученную теорему использовали в доказательстве данной теоремы?

____

2. Сколько острых углов имеет любой треугольник? ______
Почему в треугольнике не может быть двух прямых или двух тупых углов?

____

____

Представьте рисунки, иллюстрирующие ваш ответ.

3. Может ли в равнобедренном треугольнике угол при основании быть тупым? ________ прямым? ________ Может ли в равнобедренном треугольнике угол, противоположный основанию, быть тупым? ________ прямым? ________
Вставьте в предложения пропущенные слова.

В равнобедренном треугольнике углы при его основании всегда ____________________,
угол при вершине, противоположной основанию, может быть ____________________.

2 1. Можно ли утверждать, что если сторона и два любых угла одного треугольника равны стороне и двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны? ____________________

2. Если да, то можно ли назвать данное утверждение признаком равенства треугольников?

3 Прочитайте определение внешнего угла треугольника и ответьте на вопросы, выполнив соответствующий рисунок.

1. Как получить внешний угол треугольника? ____________________

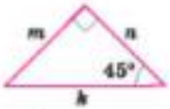
2. Сколько имеется внешних углов треугольника у одной его вершины? Что можно сказать про эти углы? ____________________

____

12 Дополните утверждение, чтобы оно оказалось верным.

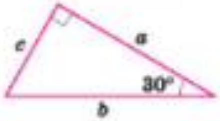
а) В прямоугольном треугольнике острые углы могут быть равны
1. 28° и 72° 2. 37° и 53° 3. 65° и 35°

б) Для сторон данного треугольника справедливо равенство
1. $m = k$
2. $k = 2n$
3. $n = m$

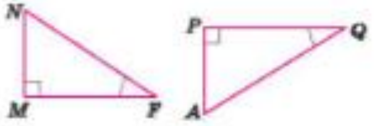


в) Для сторон данного треугольника справедливо равенство

1. $c = \frac{1}{2}a$ 2. $c = \frac{1}{2}b$ 3. $a = \frac{1}{2}b$



г) Для доказательства равенства данных треугольников достаточно доказать, что
1. $\angle N = \angle A$
2. $MN = AP$
3. $MF = AQ$



Рубрика «Работаем с текстом»

5 Прочитайте в п. 4.2 учебника теорему о соотношении между сторонами и углами треугольника и ответьте на вопросы.

1. Сколько утверждений в теореме? ____________________

2. Рассмотрите утверждение 1 и запишите:

условие теоремы: ____________________

____

заключение теоремы: ____________________

3. Какие теоремы применялись при доказательстве утверждения 1? ____________________

____

4. Рассмотрите утверждение 2 теоремы и запишите:

условие теоремы: ____________________

заключение теоремы: ____________________

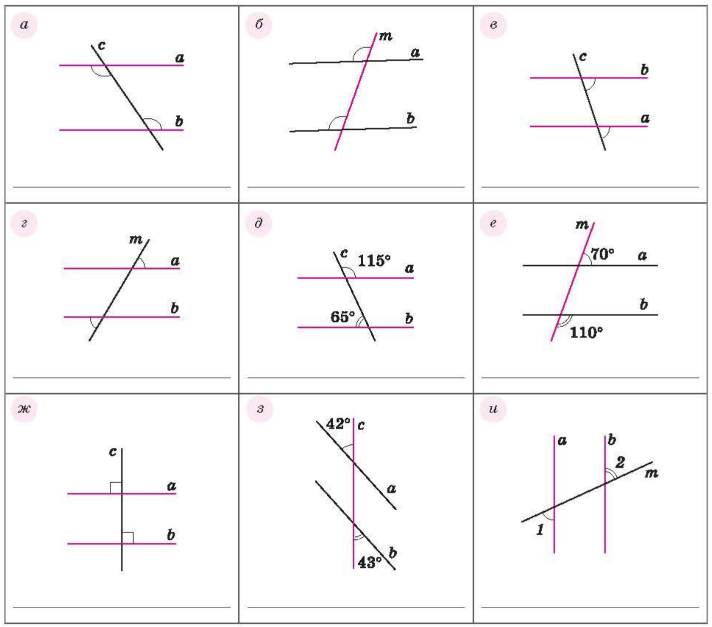
Какой метод использовался при доказательстве этого утверждения?

____

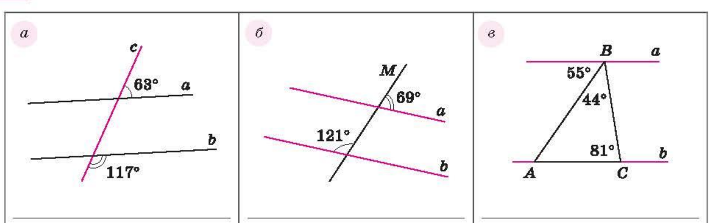
5. В треугольнике $\angle M = 35°$, $\angle P = 33°$. Тогда из сторон PK и MK меньшая ____

Рубрика тетради-тренажёра «Работаем с моделями»

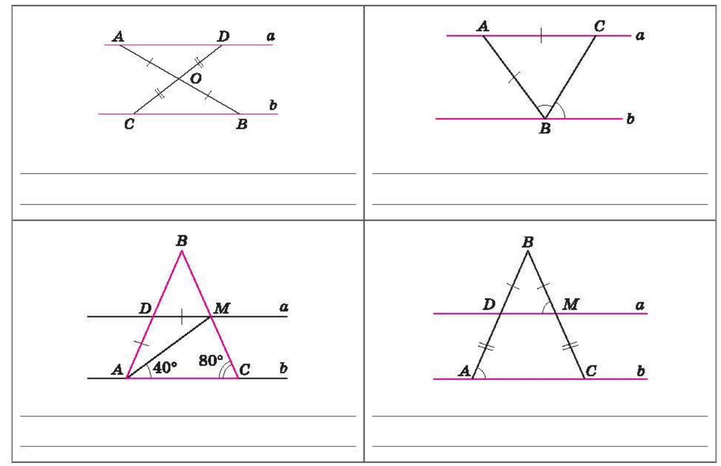
20 В каком случае можно утверждать, что прямые a и b параллельны? Докажите своё утверждение.



21 Пересекаются ли прямые a и b?



22 В каждом случае по данным рисунка выясните, параллельны ли прямые a и b.

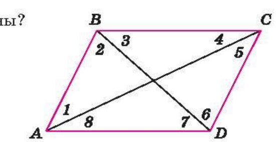


23 а) В каком случае прямые AB и CD параллельны?

1. Если $\angle 3 = \angle 7$
2. Если $\angle 8 = \angle 4$
3. Если $\angle 2 = \angle 6$

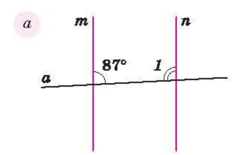
б) В каком случае прямые BC и AD параллельны?

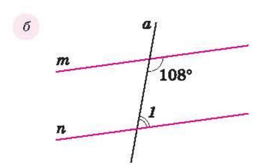
1. Если $\angle 3 = \angle 7$
2. Если $\angle 2 = \angle 6$
3. Если $\angle 5 = \angle 1$



24 Рассмотрите рисунки и продолжите предложения.

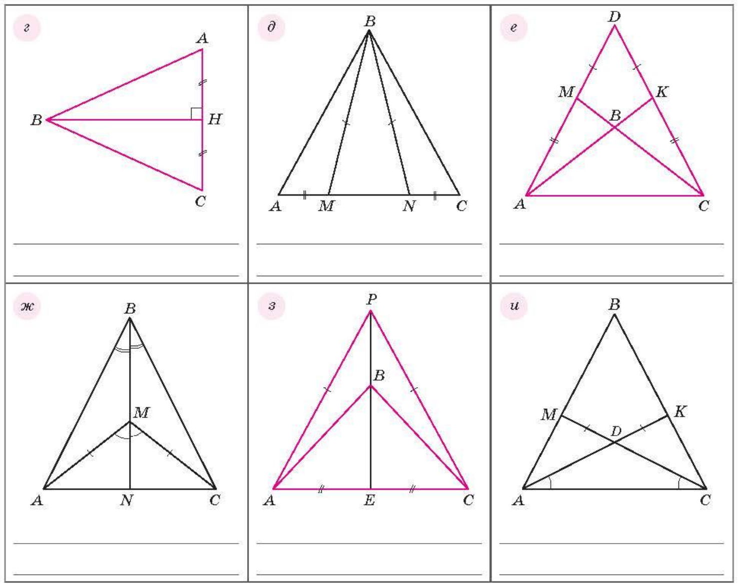
а) Для того чтобы можно было утверждать, что прямые m и n параллельны, угол 1 должен быть равен ______





б) Для того чтобы можно было утверждать, что прямые m и n пересекаются, угол 1 не должен быть равен ______

Рубрика тетради-тренажёра «Анализируем и рассуждаем»



АНАЛИЗИРУЕМ И РАССУЖДАЕМ

п. 2.1

43 1. Медиана AM разбивает треугольник ABC на два треугольника BAM и CAM. Выполните рисунок и запишите формулу периметра для каждого треугольника:

P_{ABC} = ____________________

P_{BAM} = ____________________

P_{CAM} = ____________________

____

Сравните сумму периметров треугольников BAM и CAM с периметром треугольника ABC. На какую величину они отличаются? ____________________

2. Найдите периметр треугольника ABC, если периметры треугольников BAM и CAM равны 16 см и 18 см, а медиана AM равна 5 см.

Дано: ____________________

Найти: P_{ABC}.

Решение. ____________________

Ответ: __________

3. Найдите медиану AM треугольника ABC, если известно, что периметр треугольника ABC равен 20, а периметр треугольника ABM равен 16.

Дано: ____________________

Найти: AM.

Решение. ____________________

Ответ: __________

п. 2.3

44 В треугольниках ABC и DEF: $\angle C = \angle F$, $AB = DE$, $AC = DF$. Выполните рисунок. Можно ли установить равенство треугольников?

Если да, то докажите это равенство, если нет, то объясните почему.

____

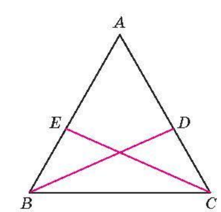
45 1. Известно, что $AB = AC$, $AE = AD$. Найдите BD, если $CE = 15{,}2$.

Дано: ____________________

Найти: ____________________

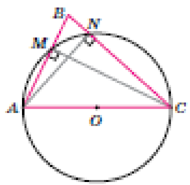
Решение. ____________________

Ответ: __________



Рубрика «Анализируем и рассуждаем»

1. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Докажите, что отрезки AN и CM являются высотами треугольника ABC.



Дано: ______

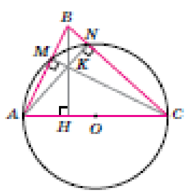
Доказать: ______

Доказательство. ______

2. Сформулируйте и докажите обратную задачу.

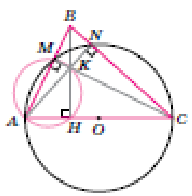
Текст: ______

Доказательство. ______



3. На рисунке точка K — точка пересечения высот AN, BH и CM треугольника ABC. Докажите, что точки A, M, N и C лежат на одной окружности. Укажите радиус и центр этой окружности.

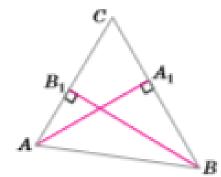
4. Определите ещё четвёрки точек, принадлежащих одной окружности. Определите центр такой окружности и её радиус.



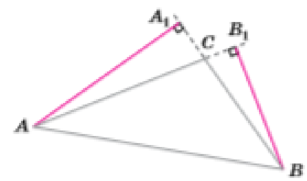
5. Докажите, что точки A, M, K и H лежат на одной окружности.

6. Есть ли ещё четвёрки точек, содержащих точку K и принадлежащих одной окружности? Если есть, определите центр такой окружности и укажите её радиус.

7. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.



8. В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что углы A_1B_1C и ABC равны.



9. В треугольнике ABC с тупым углом ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Какие углы в треугольниках A_1BC_1 и ABC равны?

Задания высокого уровня

Рубрика тетради-тренажёра «Применяем геометрию»

47 1. В четырёхугольнике $ABCD$: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Диагональ AC составляет со сторонами углы 25° и 35°. Найдите углы четырёхугольника.

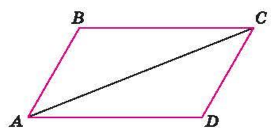
Дано: ______________________

____

Найти: ______________________

Решение. ______________________

____



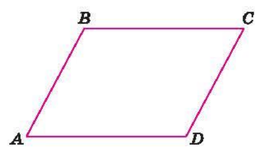
2. В четырёхугольнике $ABCD$: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. $\angle A = 50°$. Найдите остальные углы четырёхугольника.

Дано: ______________________

Найти: ______________________

Решение. ______________________

____



48 Параллельные прямые a и b пересечены секущей c. Докажите, что биссектрисы равных односторонних углов перпендикулярны.

Дано: ______________________

____

Доказать: ______________________

Доказательство. ______________________

____

____

ПРИМЕНЯЕМ ГЕОМЕТРИЮ

1 Составьте инструкцию, как изготовить рамку для фотографии, если размеры фотографии 10×15 см, а ширина багета 2 см.

1. Материал: ______________________
2. Инструменты: ______________________
3. Порядок работы: ______________________

____

____

2 В салон самолета можно взять багаж, размеры которого не превышают $22 \times 40 \times 55$ см. Составьте инструкцию, как измерить размеры дорожной сумки.

____

____

____

____

3 Составьте инструкцию, как с помощью линейки и транспортира построить четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

____

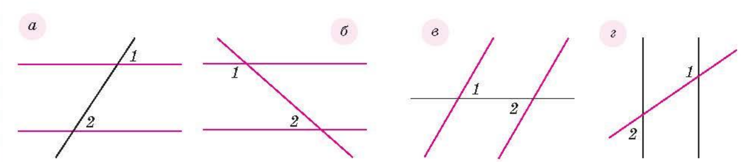
____

____

____

ВЫПОЛНЯЕМ ТЕСТ

1. Известно, что прямые a и b параллельны. Отметьте верное утверждение.
   1. Прямые a и b не пересекаются
   2. Прямые a и b не имеют общих точек
   3. Прямые a и b имеют только одну общую точку
2. Сколько прямых, параллельных данной прямой, проходит через точку, не принадлежащую данной прямой?
   1. Только одна 2. Не более одной 3. Более одной
3. Известно, что прямые a и c перпендикулярны прямой m. Тогда прямые a и c:
   1. Пересекаются 2. Параллельны 3. Невозможно определить
4. Укажите название углов *1* и *2*.

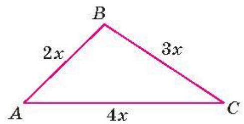


а) 1. односторонние 2. накрест лежащие 3. соответственные
б) 1. односторонние 2. накрест лежащие 3. соответственные
в) 1. односторонние 2. накрест лежащие 3. соответственные
г) 1. односторонние 2. накрест лежащие 3. соответственные

Рубрика тетради-тренажёра «Выполняем тест» направлена в том числе и на формирование оценочной самостоятельности

ВЫПОЛНЯЕМ ТЕСТ

1. Чему равна наименьшая сторона треугольника, если его периметр равен 27?



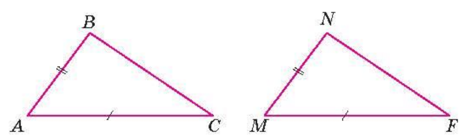
Ответ: ________________

2. Основание равнобедренного треугольника равно 7 см, а периметр равен 19 см. Чему равна боковая сторона треугольника?

1. 5 см 2. 6 см 3. 7 см 4. 12 см

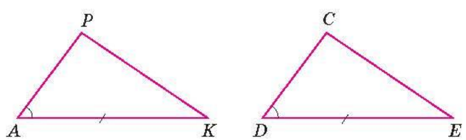
3. Из равенства треугольников ABC и MNF следует, что:

1. $\angle B = \angle M$
2. $\angle B = \angle N$
3. $\angle B = \angle F$

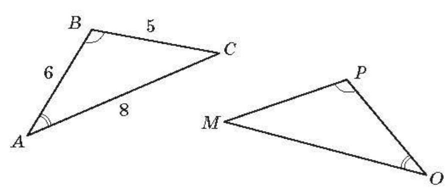


4. Какое из представленных ниже равенств нужно установить для доказательства равенства треугольников APK и CED?

1. $AP = DE$
2. $AP = CE$
3. $AP = CD$



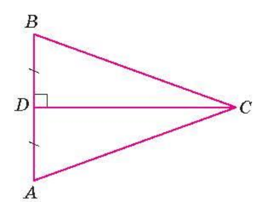
5. На рисунке $\triangle ABC = \triangle MPO$. Чему равна сторона OP?



Ответ: ________________

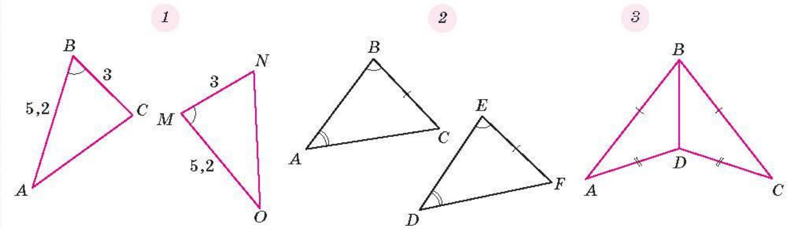
6. По какому признаку равенства треугольников равны треугольники на рисунке?

1. По первому признаку равенства треугольников
2. По второму признаку равенства треугольников
3. По третьему признаку равенства треугольников
4. Невозможно установить равенство



Ответ: ________________

7. Запишите номера рисунков, где изображены равные треугольники.



Ответ: ________________

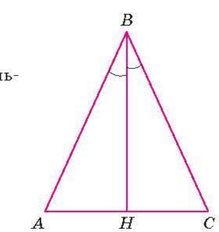
8. Выберите верные утверждения и запишите их номера.

1. Если треугольники равны, то равны все соответствующие элементы треугольников.
2. Периметр равностороннего треугольника в три раза больше его стороны.
3. Если в треугольнике периметр в три раза больше одной из его сторон, то этот треугольник равносторонний.
4. В равностороннем треугольнике сумма длин медиан равна сумме длин его высот.
5. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая из вершины треугольника, противоположной основанию, разбивает его на два равных треугольника.
6. Если биссектриса AM треугольника ABC разбивает его на два равных треугольника, то $AB = BC$.
7. Равносторонний треугольник является равнобедренным.
8. Для доказательства равенства треугольников достаточно установить равенство трёх пар элементов в этих треугольниках.

Ответ: ________________

9. Выберите верное равенство, если известно, что треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC.

1. $\angle ABC = \angle ACB$
2. $\angle BAC = \angle BCH$
3. $\angle AHB = \angle CHB$



Ответ: ________________

10. В треугольнике MPC известно, что $\angle M = \angle C$, биссектриса PE делит сторону MC пополам, $ME = 9{,}6$ см. Чему равна сторона MC?

Ответ: ________________

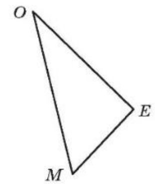
11. В треугольнике ABC: $AB = BC$, BM — медиана, $\angle ABC = 44°$. Тогда

$\angle ABM =$ __________ $\angle AMB =$ __________

Проверочные работы тетради-экзаменатора направлены на проверку усвоения предметного материала и уровня сформированности ключевых компетенций

Тесты «Проверь себя» к каждой главе

Тест № 2. Треугольники

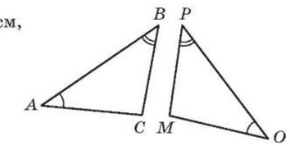


1. Запишите:

а) угол, противолежащий стороне ME: ____________;

б) стороны, прилежащие углу E: ____________________;

в) сторону, противолежащую углу O: ____________



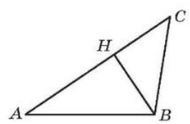
2. На рисунке $\Delta ABC = \Delta MPO$, $AB = 4$ см, $BC = 2{,}5$ см, $AC = 3$ см. Чему равна сторона MO?

Ответ: ____________________

3. Отрезок AM — медиана треугольника ABC. Какое равенство верно?

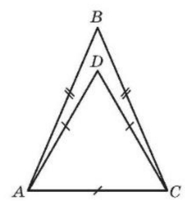
1. $AB = AC$ 2. $BM = \frac{1}{2}MC$ 3. $CM = \frac{1}{2}BC$

Ответ: ____________________



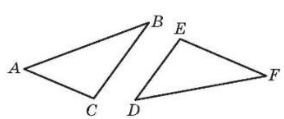
4. В каком случае отрезок BH будет являться высотой треугольника ABC?

1. Если $\angle ABC = 90°$
2. Если $\angle ABH = \angle BAH$
3. Если $\angle BHC = \angle AHB$



5. Периметр треугольника ADC равен 27 см, а периметр треугольника ABC равен 35 см. Найдите стороны треугольника ABC.

Ответ: ____________________



6. В треугольниках ABC и DEF известно, что $AC = DE$, $\angle C = \angle E$. Какое равенство нужно добавить, чтобы можно было утверждать, что треугольники равны:

а) по первому признаку равенства треугольников?

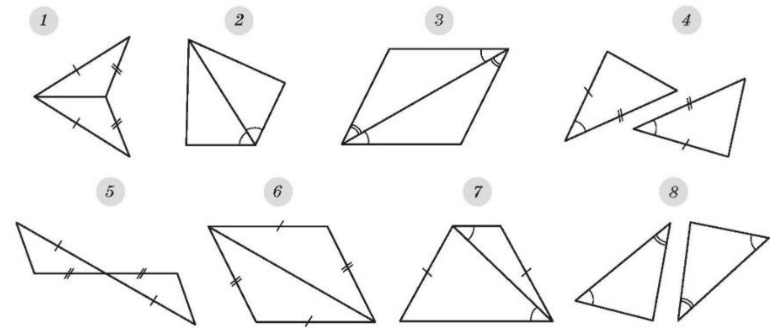
б) по второму признаку равенства треугольников?

Ответ: а) ____________________; б) ____________________

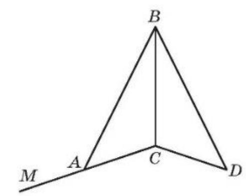
7. В треугольнике MPC стороны PC и MP равны. Какие углы треугольника равны?

Ответ: ____________________

8. Укажите номера рисунков, где изображены равные треугольники.

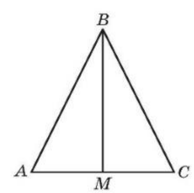


Ответ: ________________________________



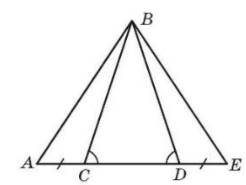
9. Известно, что треугольники ABC и BCD равны, угол MAB равен $130°$. Чему равен угол BDC?

Ответ: ____________________



10. Известно, что BM является медианой и высотой треугольника ABC. По какому признаку равны треугольники ABM и CBM?

Ответ: ____________________



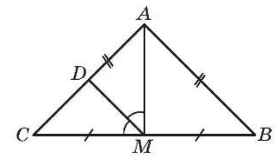
11. Известно, что $AC = DE$, $\angle BCD = \angle BDC$.

а) Какие треугольники равны?

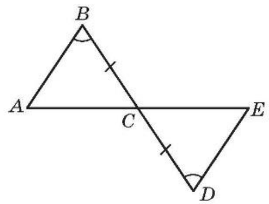
б) Есть ли на рисунке равнобедренные треугольники? Если да, то укажите их.

Ответ: а) ______________; б) ______________

12. Известно, что $AB = AC$, AM — медиана, MD — биссектриса треугольника AMC. Чему равен угол AMD?



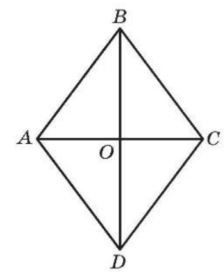
Ответ: ______________________



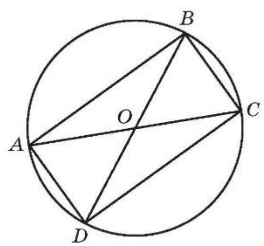
13. На рисунке $\angle ABC = \angle CDE$, $BC = CD$. В каком отношении точка C делит отрезок AE?

Ответ: __________________

14. Известно, что $AB = BC$, $AO = OC$, $\angle ABO = \angle ADO$, $AD = 10$, $BO = 8$, $AC = 12$. Чему равен периметр треугольника DOC?



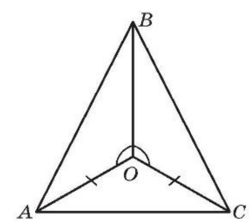
Ответ: ______________________



15. а) Есть ли на рисунке равнобедренные треугольники? Если да, то укажите их.
б) Укажите как можно больше равных треугольников, изображённых на рисунке.

Ответ: а) ________________; б) ________________

16. Есть ли на рисунке перпендикулярные отрезки? Если да, то укажите их.



Ответ: ______________________

17. Запишите номера верных утверждений.
1. Равносторонний треугольник является равнобедренным.
2. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая к его основанию, делит его на два треугольника с равными периметрами.
3. Если углы двух треугольников равны, то равны и сами треугольники.
4. Если медиана и высота треугольника равны, то такой треугольник равнобедренный.
5. Если основание и боковая сторона одного равнобедренного треугольника равны основанию и боковой стороне другого равнобедренного треугольника, то такие треугольники равны.

Ответ: ______________________

Проверочные работы в 4 вариантах

ПРОВЕРОЧНАЯ РАБОТА № 2

Вариант 1

1 1. Начертите две прямые, пересекающиеся в точк
мой равные отрезки MA и MB, на другой равные о
отрезки OB и AP.
2. Докажите, что $OB = AP$.
3. Укажите угол, равный углу BOP.

Дано: ______

Доказат

Доказательство. ______

Ответ: ______

2 Основание AB равнобедренного треугольника A
больше основания на 4 см. Чему равен периметр тре

Дано: ______

Доказат

Доказательство. ______

Ответ: ______

3 На чертеже точка O — центр окружности. Докажите, что

Дано: ______

Доказать: ______

Доказательство. ______

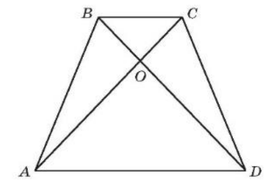
4 В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$. На высоте CH
сторонах AC и BC точки M и N соответственно так, что $MC =$
$\angle COM = \angle NOC$.

Дано: ______

Доказать: ______

Доказательство. ______

5 Рассмотрите чертёж. Известно, что $BO = OC$, $\angle ABD = \angle ACD$.



1. Докажите AB, что $CD = 4{,}8$.
2. Докажите, что треугольник AOD — равнобедренный.
3. Равенство каких треугольников можно доказать? По какому признаку равенства треугольников равны эти треугольники?

Доказательство. ______

6 Выберите неверные утверждения и в ответ запишите их номера.

1. Если сторона одного равностороннего треугольника равна стороне другого равностороннего треугольника, то такие треугольники равны.
2. Если равны периметры треугольников, то равны и сами треугольники.
3. Треугольник является равнобедренным, если его медиана перпендикулярна стороне, к которой проведена.
4. Если высота треугольника совпадает с его стороной, то такой треугольник прямоугольный.

Ответ: ______

ЗАПОЛНИТЕ ТАБЛИЦУ ОТВЕТОВ

Задание	1	2	3	4	5			6
					1	2	3	
Ответ								

Отметка

Вариант 3

1 Начертите две прямые, пересекающиеся в точке C. Отложи
равные отрезки CA и CB, на другой — отрезки MC и KC т
и $KC = 3CB$. Проведите отрезки AK и BM. Докажите, что AK

Дано: ____________

____

Доказать: ____________

Доказательство. ____________

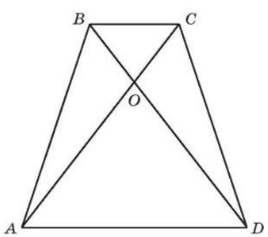
____

____

____

2 Рассмотрите чертёж. Известно, что $BO = OC$, $\angle ABD = \angle AC$

1. Докажите, что треугольники ABC и BCD равны.
2. Равенство каких ещё треугольников можно доказать? По к
венства треугольников они равны?



Дано: ____________

____

Доказать: ____________

Доказательство. ____________

____

____

3 Две окружности с центра
что отрезок, соединяющий це

Дано: ____________

____

____

Доказать: ____________

Доказательство. ____________

____

____

____

4 На стороне AC треугольн
$\angle BED = \angle BDE$.

1. Докажите, что треугольни
равнобедренный.
2. Укажите равные треугольн

Дано: ____________

____

Доказать: ____________

Доказательство. ____________

____

____

____

____

5 Выберите неверные утверждения и запишите их номера.

1. Если биссектриса треугольника перпендикулярна стороне, к которой проведена, то этот треугольник равнобедренный.
2. Медианы равнобедренного треугольника, проведённые к боковым сторонам, делят углы при основании треугольника пополам.
3. Суммы длин всех медиан в равных треугольниках равны.
4. Существует треугольник, у которого все высоты пересекаются в его вершине.

Ответ: ____________

6 В треугольнике ABC биссектриса AM разделила сторону BC пополам. Известно, что $BC = AC = 12$. На продолжении луча AM за треугольник ABC взята точка O такая, что $BO = 11$ см. Найдите периметр треугольника BOC.

Дано: ____________

____

Доказать: ____________

Доказательство. ____________

____

____

ЗАПОЛНИТЕ ТАБЛИЦУ ОТВЕТОВ

Задание	1	2		3	4		5	6
		1	2		1	2		
Ответ								

Отметка

СФЕРЫ

УМКс «Геометрия 7-9»

Реализует системно-деятельностный подход: виды деятельности учащихся запрограммированы системой упражнений.

Формирует учебную самостоятельность.

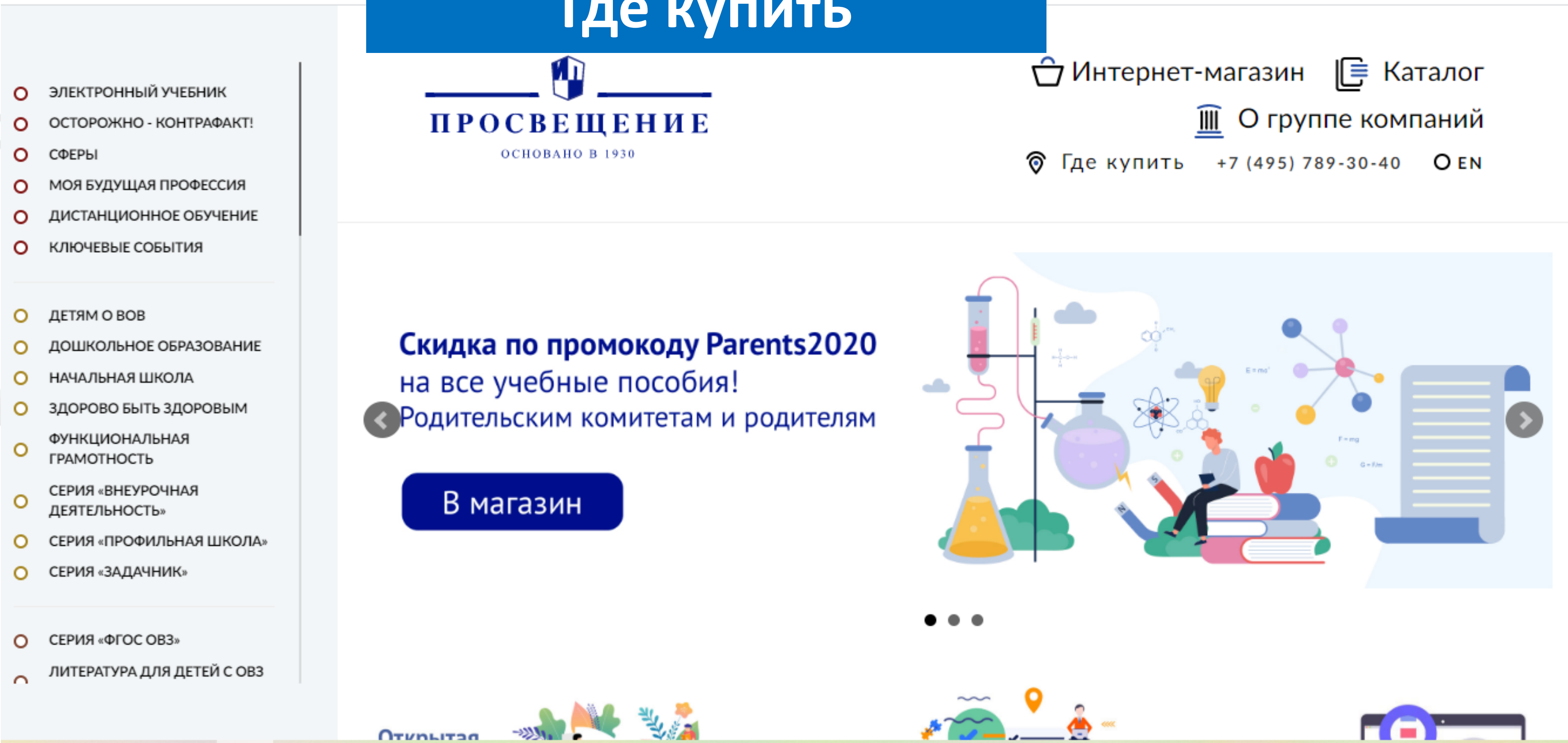
Обеспечивает комфортность процесса обучения: учащимся интересно учиться, учителю комфортно работать.

Повышается мотивация учащихся к изучению предмета.

Повышается качество и уровень компетенций учащихся.

Эффективно формируется функциональная грамотность.

Где купить



https://shop.prosv.ru/katalog?FilterByArrtibuteId=13!2995&utm_campaign=vebinary_17_21_avgusta_Prosv&utm_medium=email&utm_source=Sendsay#/orderby=5&sFilters=4!2304;2!1721;13!2995;13!2995

https://shop.prosv.ru/katalog?FilterByArrtibuteId=13!2995&utm_campaign=vebinary_17_21_avgusta_Prosv&utm_medium=email&utm_source=Sendsay#/orderby=5&sFilters=4!2304;2!1721;13!2995;13!2995

Сафонова Н. В., Ковалева Г. И., Голубева С.А.

Геометрия. Тетрадь-тренажёр. 7 класс

195,00 ₽

СООБЩИТЬ О ПОСТУПЛЕНИИ

Берсенев А.А., Сафонова Н.В.

Геометрия. 7 класс.

461,00 ₽

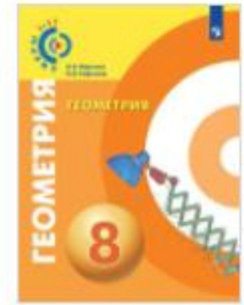
В КОРЗИНУ

Коллектив авторов

Геометрия. 7 класс. Электронная форма учебника

150,00 ₽

В КОРЗИНУ



Берсенев А.А., Сафонова Н.В.

Геометрия. 8 класс.

461,00 ₽

В КОРЗИНУ

Коллектив авторов

Геометрия. 8 класс

Берсенев А.А., Сафонова Н.В.

Геометрия. 9 класс

Берсенев А.А., Сафонова Н.В.

Геометрия. 9 класс

коллектив автор

Геометрия. 9 класс

Сафонова Наталья Васильевна

8 953 150 90 10

nvsafonova@mail.ru