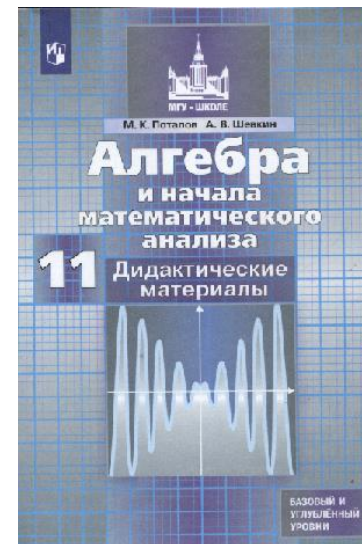


Нестандартные способы решения уравнений и неравенств (10-11 классы). Часть 1

Шевкин Александр Владимирович,
Заслуженный учитель РФ, лауреат премии и
грантов мэрии Москвы в области образования,
к.п.н., с.н.с., стаж работы в школе 44 года, один из
авторов учебников математики серии «МГУ-
школе», С.М. Никольский и др., Просвещение.
avshevkin@mail.ru www.shevkin.ru



Уравнения, неравенства и их системы

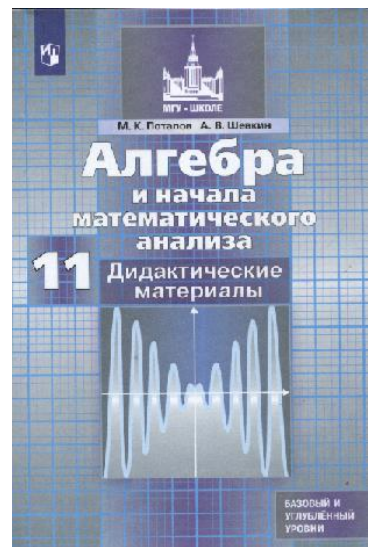
Уважаемые коллеги!

Сегодня речь пойдёт о способах решения уравнений, неравенств и их систем, которые осваивают в старших классах в небольшом объёме при обучении по общеобразовательной программе и более подробно — по программе углублённого изучения математики. В основе изложения материала — содержание второй главы учебника «Алгебра и начала анализа» для 10-11 классов (С.М. Никольский и др.) и задания из ДМ-11 к нему, плюс задания из сборников для подготовки к ЕГЭ и других источников. Это хороший ориентир в подготовке к ЕГЭ, к поступлению в вузы с повышенными требованиями к математической подготовке школьников.

Вступление

Сначала вспомним основные моменты изученного в 10 классе. В разделе «Материалы для подготовки к самостоятельным работам» книги «Дидактические материалы» для 11 класса есть несколько простых работ, на материале можно повторить изученную теорию. Посмотрим задания, решения которых разобраны в книжке.

Кстати, такие разделы для подготовки к СР есть в каждой книге дидактических материалов с 5 по 11 класс. Это наш ответ «Чемберлену» — сайтам типа «ГДЗ.РУ», которые часто дают решения, никак не связанные с методами, изложенными в учебниках. Особенно в младших классах.



29. Равносильные преобразования уравнений

Перечислим основные преобразования уравнений с одним неизвестным x , приводящие к уравнению, равносильному исходному.

1. Перенос члена уравнения (с противоположным знаком) из одной части уравнения в другую.
2. Умножение (деление) обеих частей уравнения на неравное нулю число.
3. Применение тождеств, т. е. равенств, справедливых для каждого $x \in \mathbf{R}$.
4. Возведение уравнения в нечётную степень.
5. Извлечение из обеих частей уравнения корня нечётной степени.

29. Равносильные преобразования уравнений

6. Логарифмирование показательного уравнения, т. е. замена уравнения $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a > 0, a \neq 1$) уравнением $f(x) = g(x)$.

Отметим, что обычно, применяя преобразования 1-3, не пишут, что полученное уравнение равносильно исходному, а пишут: «Перепишем уравнение в виде...»

Решите уравнение (1-4):

1. $\sqrt[3]{2x^2 - 24x - x^3} = 2 - x$. Ответ. $-1; -2$.

2. $(2x - 3)^7 = (x + 3)^7$. Ответ. 6.

3. $9^{2x^2 - 3x} = 9^{x+6}$. Ответ. $-1; 3$.

4. $2^{x+5} = 3^x$. Ответ. $\frac{5}{\log_2 3 - 1}$. (Или $5\log_{1,5} 2$.)

30. Равносильные преобразования неравенств

Перечислим основные преобразования неравенств с одним неизвестным x , приводящие к неравенству **того же знака**, равносильному исходному.

1. Перенос члена неравенства (с противоположным знаком) из одной части неравенства в другую.
2. Умножение (деление) обеих частей неравенства на положительное число.
3. Применение тождеств.
4. Возведение неравенства в нечётную степень.
5. Извлечение из обеих частей неравенства корня нечётной степени.

30. Равносильные преобразования неравенств

6. Логарифмирование показательного неравенства по основанию a ($a > 1$), т. е. замена неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ неравенством $f(x) > g(x)$.

Отметим также преобразования, приводящие к неравенству **противоположного знака**, равносильному исходному.

7. Умножение (деление) обеих частей неравенства на отрицательное число.

8. Логарифмирование показательного неравенства по основанию a ($0 < a < 1$), т. е. замена неравенства $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ неравенством $f(x) < g(x)$.

Отметим, что обычно, применяя преобразования 1-3, не пишут, что полученное неравенство равносильно исходному, а пишут: «Перепишем неравенство в виде...»

30. Равносильные преобразования неравенств

Решите неравенства (1-4):

1. $\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 4x - 5} < x - 2.$

Ответ. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$

2. $(x + 1)^{15} < (x^2 - 2x - 3)^{15}.$

Ответ. $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty).$

3. $\left(\frac{2}{7}\right)^{3-x} < \left(\frac{2}{7}\right)^{1-3x}.$

Ответ. $(-1; +\infty).$

4. $11^{\cos 2x} > 11^{1-2\cos^2 x}.$

Ответ. $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}.$

31. Уравнения-следствия

При переходе к уравнению-следствию возможно появление корней, не являющихся корнями исходного уравнения (посторонних для уравнения-следствия). При таком способе решения уравнения обязательной частью решения является проверка: являются ли найденные числа корнями уравнения-следствия.

Пусть k — данное натуральное число, a — данное число, такое, что $a > 0$, $a \neq 1$. Справедливы следующие утверждения:

1. Следствием уравнения $f(x) = g(x)$ является уравнение $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}$.

31. Уравнения-следствия

2. Следствием уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ является уравнение $f(x) = g(x)$.

3. Следствием уравнения $f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x)$ является уравнение $f(x) = g(x)$.

Решите уравнение (1-5):

Пример 1. $\sqrt{x-1} = x-3$.

Ответ. 5.

Пример 2. $\sqrt[10]{x^2 - 4x - 5} = \sqrt[10]{2x^2 - 7x - 9}$.

Ответ. -1.

31. Уравнения-следствия

Отметим, что возведение в квадрат обеих частей уравнения является одним из способов избавления уравнения от знака модуля.

3. $\sin x = |\sin x| \cos x.$

Ответ. $\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

4. $\lg (x^4 + 2x^2 - 4) = \lg (x^4 + 6x - 8).$

Ответ. 2.

5. $x^2 - 6x + \sqrt[6]{x-3} = \sqrt[6]{x-3} - 8.$

Ответ. 4.

32. Уравнения-следствия (продолжение)

Справедливы следующие утверждения:

4. Следствием уравнения $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ является уравнение $f(x) = 0$.

Пусть k — данное натуральное число, a — данное число, такое, что $a > 0$, $a \neq 1$. Рассмотрим формулы:

$$1) \sqrt[2k]{f(x)} \sqrt[2k]{g(x)} = \sqrt[2k]{f(x)g(x)};$$

$$2) \frac{\sqrt[2k]{f(x)}}{\sqrt[2k]{g(x)}} = \sqrt[2k]{\frac{f(x)}{g(x)}};$$

$$3) a^{\log_a f(x)} = f(x);$$

$$4) 2k \log_a f(x) = \log_a (f(x))^{2k};$$

$$5) \log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a (f(x)g(x));$$

32. Уравнения-следствия (продолжение)

$$6) \log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a \frac{f(x)}{g(x)};$$

$$7) \frac{1}{\log_{f(x)} a} = \log_a f(x);$$

$$8) \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \sin 2x;$$

$$9) \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \cos 2x;$$

$$10) \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} 2x.$$

Справедливо следующее утверждение:

5. Если при решении уравнения применить любую из этих формул так, что левая часть формулы будет заменена правой, то получится уравнение-следствие исходного уравнения.

32. Уравнения-следствия (продолжение)

Замечание 1. Если применить любую из этих формул так, что правая часть формулы будет заменена левой, то можно потерять корни исходного уравнения. Поэтому такие преобразования в ходе решения уравнений недопустимы.

Замечание 2. Список формул 1-10 можно расширить.

Пример задачи из сборника для подготовки к ЕГЭ.

5.1. Решите уравнение $\frac{1}{9x + 2} = \frac{1}{8x - 4}$.

Здесь уравнение $9x + 2 = 8x - 4$ равносильно исходному. А переход от уравнения $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x(3-x)}$ к Уравнению-следствию $x(x-1) = x(3-x)$ без проверки полученных корней приведёт к ошибке.



32. Уравнения-следствия (продолжение)

Решите уравнение (1-5):

1. $\frac{x^2 + 2x}{x + 3} = \frac{x + 6}{x + 3}.$

Ответ. 2.

2. $2^{\log_2(x - 1)} = x^2 + 2x - 7.$

Ответ. 2.

3. $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \cos^2 x.$

Ответ. $\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

4. $\log_3(2x - 3) + \log_3(x - 12) = 2 \log_3(x - 6).$

Ответ. 15.

5. $\sqrt{2x + 5} + \sqrt{x + 6} = \sqrt{6x + 13}.$

Ответ. 58.

32. Уравнения-следствия (продолжение)

6. Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$\frac{a-3-ax}{ax+1} = 3.$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{4ax-a+6}{ax+1} = 0.$$

Освобождаясь в этом уравнении от знаменателя, получаем уравнение-следствие:

$$4ax - a + 6 = 0.$$

При $a = 0$ оно не имеет корней. При каждом $a \neq 0$ уравнение-следствие имеет корень $x_0 = \frac{a-6}{4a}$.

32. Уравнения-следствия (продолжение)

6. Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$\frac{a-3-ax}{ax+1} = 3.$$

Найдём значения a , при которых x_0 обращает в нуль знаменатель дроби:

$$\frac{a-6}{4} + 1 = 0.$$

Решив полученное уравнение, найдём, значение $a = 2$.

Ответ. При $a = 0$ и при $a = 2$ нет корней; при каждом a , таком, что $a \neq 0$ и $a \neq 2$ уравнение имеет единственный корень $\frac{a-6}{4a}$.

Замечание. В книге решение описано подробнее.

33. Решение уравнений с помощью систем

Пусть k — данное натуральное число, a — данное число, такое, что $a > 0$, $a \neq 1$. Справедливы следующие утверждения:

1. Уравнение $\sqrt[2k]{f(x)} = g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^{2k} \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

2. Уравнение $\sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)}$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

В этой системе одно (любое) из неравенств можно опустить.

33. Решение уравнений с помощью систем

3. Уравнение $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

В этой системе одно (любое) из неравенств можно опустить.

4. Уравнение $f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ x \in D(\varphi). \end{cases}$$

где $D(\varphi)$ — область существования функции $\varphi(x)$.

Далее приведём примеры перехода к системе и ответс для самоконтроля (решения есть в ДМ11).

33. Решение уравнений с помощью систем

1. Решите уравнение $\sqrt{10 - 14 \sin x} = 2 \cos x$.

По утверждению 1 уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 10 - 14 \sin x = 4 \cos^2 x \\ \cos x \geq 0. \end{cases}$$

Ответ. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

2. Решите уравнение $\sqrt[4]{2x^2 - 1} = \sqrt[4]{6x - 3}$.

По утверждению 2 уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 = 6x - 3 \\ 6x - 3 \geq 0. \end{cases}$$

Ответ. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

33. Решение уравнений с помощью систем

3. Решите уравнение $\lg \cos 2x = \lg \sin x$.

По утверждению 3 уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 2x = \sin x \\ \sin x > 0. \end{cases}$$

Ответ. $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

4. Решите уравнение $4x^2 - 8x + \lg \sin x = 1 + \lg \sin x$.

По утверждению 4 уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4x^2 - 8x - 1 = 0 \\ \sin x > 0. \end{cases}$$

Ответ. $\frac{2+\sqrt{5}}{2}$.

34. Решение уравнений с помощью систем (продолжение)

Справедливы следующие утверждения:

5. Множество решений уравнения $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$ есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ x \in D(f_2) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f_2(x) = 0 \\ x \in D(f_1), \end{cases}$$

где $D(f_1)$ — область существования функции $f_1(x)$, а $D(f_2)$ — область существования функции $f_2(x)$.

6. Уравнение $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$$

34. Решение уравнений с помощью систем (продолжение)

1. Решите уравнение $\lg x \cdot \sqrt{\sin x} = 0$.

По утверждению 5 множество решений этого уравнения есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} \lg x = 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin x = 0 \\ x > 0. \end{cases}$$

Ответ. $1; \pi k, k \in \mathbb{N}$.

2. Решите уравнение $\frac{\cos 2\pi x}{x-5} = \frac{1}{x-5}$.

По утверждению 6 это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 2\pi x = 1 \\ x - 5 \neq 0. \end{cases}$$

Ответ. $k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 5$.

34. Решение уравнений с помощью систем (продолжение)

3. Решите уравнение $\frac{x^2}{\sqrt{2+x-x^2}} = \frac{3-2x}{\sqrt{2+x-x^2}}$.

По утверждению 6 это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ \sqrt{2+x-x^2} \neq 0. \end{cases}$$

Ответ. 1.

4. Решите уравнение $\log_3 \frac{-x^2+3x}{x-1} = \log_3 \frac{x^3+x}{x-1}$.

По утверждению 3 это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{-x^2+3x}{x-1} = \frac{x^3+x}{x-1} \\ x-1 \neq 0 \\ \frac{x^3+x}{x-1} > 0. \end{cases}$$

Ответ. -2.

34. Решение уравнений с помощью систем (продолжение)

5*. Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - 6x - 2a} = x - 2.$$

По утверждению 1 это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 6x - 2a = (x - 2)^2 \\ x - 2 \geq 0. \end{cases}$$

Ответ. $-2 - a$ при $a \leq -4$, нет решений при $a > -4$.

35.* Уравнения вида $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$

Справедливо следующее утверждение:

1. Пусть область существования функции $f(x)$ есть промежуток J и пусть эта функция строго монотонна (возрастает или убывает) на этом промежутке. Тогда уравнение $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$ равносильно системе

$$\begin{cases} \alpha(x) = \beta(x) \\ \alpha(x) \in J \\ \beta(x) \in J. \end{cases}$$

В этой системе одно (любое) из условий $\alpha(x) \in J$ или $\beta(x) \in J$ можно опустить.

Частными случаями этого утверждения являются утверждения из 2 и 3 из п. 33 ($\sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)}$ и $\log_a f(x) = \log_a g(x)$).

35.* Уравнения вида $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$

1. Решите уравнение

$$\arcsin(x^2 - 80,5) = \arcsin(x - 8,5). \quad (1)$$

Так как функция $f(u) = \arcsin(u)$ имеет область существования — промежуток $J = [-1; 1]$ и возрастает на нём, по утверждению 1 уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 80,5 = x - 8,5 \\ -1 \leq x - 8,5 \leq 1. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнение системы (2) имеет два корня $x_1 = 9$ и $x_2 = -8$, из которых лишь число x_1 удовлетворяет двойному неравенству системы (2), поэтому система (2) и равносильное ей уравнение (1) имеют единственное решение x_1 .

Ответ. 9.

35.* Уравнения вида $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$

2. Решите уравнение

$$\log_{0,2}(x^2 - 2) + \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2} = \log_{0,2}(2x + 1) + \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \quad (3)$$

Область существования функции $f(u) = \log_{0,2} u + \left(\frac{1}{3}\right)^u$ есть промежуток $J = (0; +\infty)$. Так как функция $f(u)$ убывает на этом промежутке (как сумма убывающих на этом промежутке функций), то по утверждению 1 уравнение (3) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 2 = 2x + 1 \\ 2x + 1 > 0 \dots \end{cases}$$

Ответ. 3.

35.* Уравнения вида $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$

Из утверждения 1 вытекает, что следующее утверждение:

2. Пусть область существования функции $f(u)$ есть $\mathbf{R}$ и пусть эта функция строго монотонна на $\mathbf{R}$, тогда равносильны уравнения $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$ и $\alpha(x) = \beta(x)$.

Частными случаями этого утверждения является утверждение 6 из п. 29 ($a^{f(x)} = a^{g(x)}$).

3. Решите уравнение

$$\operatorname{arcctg}(x^2 - 5) = \operatorname{arcctg}(5x + 9).$$

Так как функция $f(u) = \operatorname{arcctg}(u)$ имеет область существования $\mathbf{R}$ и убывает на нём, по утверждению 2...

$$x^2 - 5 = 5x + 9 \dots$$

Ответ. $-2; 7$.

35.* Уравнения вида $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$

4. Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x} - (\sin x)^{2007} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sin^2 x} - (\sin x)^{4014}. \quad (5)$$

Так как функция $f(u) = \left(\frac{1}{3}\right)^u + (-u)^{2007}$ убывает на $\mathbf{R}$ (как сумма убывающих на $\mathbf{R}$ функций), то по утверждению 2 уравнение (5) равносильно уравнению

$$\sin x = \sin^2 x \dots$$

Ответ. $\pi k, k \in \mathbf{Z}; \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$

36. Решение неравенств с помощью систем

Пусть k — данное натуральное число, a — данное число, такое, что $a > 0$, $a \neq 1$. Справедливы следующие утверждения:

1. Неравенство $\sqrt[2k]{f(x)} < g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < (g(x))^{2k} \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

2. Множество решений неравенства $\sqrt[2k]{f(x)} > g(x)$ есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} f(x) > (g(x))^{2k} \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

36. Решение неравенств с помощью систем

3. Неравенство $\sqrt[2k]{f(x)} < \sqrt[2k]{g(x)}$ равносильно двойному неравенству $0 \leq f(x) < g(x)$.

4. Неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно двойному неравенству

$$f(x) > g(x) > 0 \text{ при } a > 1,$$

$$0 < f(x) < g(x) \text{ при } 0 < a < 1.$$

5. Неравенство $f(x) + \varphi(x) > g(x) + \varphi(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ x \in D(\varphi). \end{cases}$$

36. Решение неравенств с помощью систем

1. Решите неравенство $\sqrt{3x + 1} < 2x - 1$.

По утверждению 1 это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3x + 1 < (2x - 1)^2 \\ 3x + 1 \geq 0 \\ 2x - 1 > 0. \end{cases}$$

Ответ. $\left(\frac{7}{4}; +\infty\right)$.

2. Решите неравенство $2\sqrt{x + 7} > x + 1$.

По утверждению 2 множество решений этого неравенства есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} 4(x + 7) > (x + 1)^2 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + 7 \geq 0 \\ x + 1 < 0. \end{cases} \quad \text{Ответ. } [-7; 1 + 2\sqrt{7}).$$

36. Решение неравенств с помощью систем

3. Решите неравенство $\sqrt[4]{x^2 - 5} < \sqrt[4]{5x + 9}$.

По утверждению 3 это неравенство равносильно двойному неравенству $0 \leq x^2 - 5 < 5x + 9$, которое можно переписать в виде системы...

Ответ. $[\sqrt{5}; 7)$.

4. Решите неравенство $\log_{0,1}(x^3 - 2x^2 - 2x) > \log_{0,1}(x^3 + 4)$.

Так как $0 < 0,1 < 1$, то утверждению 4 это неравенство равносильно двойному неравенству $0 < x^3 - 2x^2 - 2x < x^3 + 4$, которое можно переписать в виде системы...

Ответ. $(-1; 0) \cup (-1 + \sqrt{3}; 2)$.

36. Решение неравенств с помощью систем

5. Решите неравенство $x^2 - 2x + \sqrt{\sin x} < 3x - 4 + \sqrt{\sin x}$.

По утверждению 5 это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 2x < 3x - 4 \\ \sin x \geq 0. \end{cases}$$

Ответ. $(1; \pi]$.

36. Решение неравенств с помощью систем

Пусть k — данное натуральное число, a — данное число, такое, что $a > 0$, $a \neq 1$. Справедливы следующие утверждения:

1. Неравенство $\sqrt[2k]{f(x)} < g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) < (g(x))^{2k} \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

2. Множество решений неравенства $\sqrt[2k]{f(x)} > g(x)$ есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} f(x) > (g(x))^{2k} \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Самоконтроль: графики функций

1. Решите неравенство $\sqrt{2-x} < \sqrt{x+3} + 1$.

Пример составлен специально для того, чтобы показать редкую возможность увидеть ответ на рисунке.

Изобразим графики функций $y = \sqrt{2-x}$ и $y = \sqrt{x+3} + 1$.

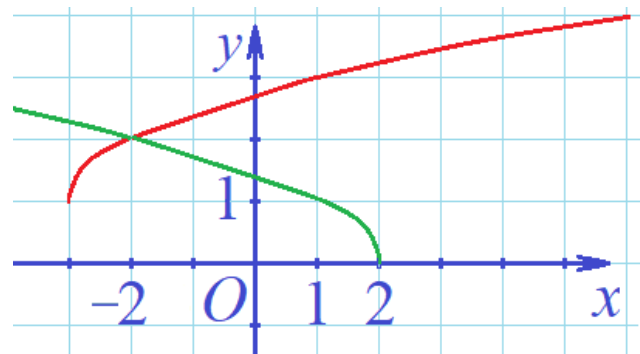
Стоит изменить условия и ответ не читается с графика.

Ответ. $(-2; 2]$.

2. Решите неравенство $\sqrt{1-x} > \sqrt{x} + 0,5$.

Ответ. $\left[0; \frac{4-\sqrt{7}}{8}\right)$.

График может подтвердить правдоподобие ответа.



37. Решение неравенств с помощью систем (продолжение)

Справедливы следующие утверждения:

6. Множество решений каждого из неравенств $f(x) \cdot g(x) > 0$ и $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

7. Множество решений каждого из неравенств $f(x) \cdot g(x) < 0$ и $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

37. Решение неравенств с помощью систем (продолжение)

1. Решите неравенство $\frac{\sin x}{\lg(x+1)} > 0$.

По утверждению 6 множество решений этого неравенства есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \lg(x+1) > 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \sin x < 0 \\ \lg(x+1) < 0. \end{cases}$$

Ответ. $(-1; 0) \cup (2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in \mathbf{Z}, k \geq 0$.

37. Решение неравенств с помощью систем (продолжение)

2. Решите неравенство $\sqrt[10]{x+1} < \sqrt[10]{\sqrt{1-2x}-x}$.

По утверждению 3 это неравенство равносильно двойному неравенству $0 \leq x+1 < \sqrt{1-2x}-x$, которое можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} \sqrt{1-2x} > 2x+1 \\ x \geq -1. \end{cases}$$

По утверждению 2 множество решений этой системы есть объединение множеств решений двух систем

$$\begin{cases} 1-2x > (2x+1)^2 \\ 2x+1 \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ 2x+1 < 0 \\ x \geq -1. \end{cases}$$

Ответ. $[-1; 0)$.

37. Решение неравенств с помощью систем (продолжение)

3. Для каждого значения параметра a решите неравенство $\sqrt{3-x} < \sqrt{x-a}$.

Для каждого значения параметра a это неравенство равносильно двойному неравенству $0 \leq 3-x < x-a$, которое можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x > \frac{a+3}{2} \end{cases}.$$

Ответ. $\left(\frac{a+3}{2}; 3\right]$ при $a < 3$; нет решений при $a \geq 3$.

38.* Неравенства вида $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$

Справедливо следующее утверждение:

1. Пусть область существования функции $f(u)$ есть промежуток J . Тогда:

а) если функция $f(u)$ возрастает на промежутке J , то неравенство $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$ равносильно системе

$$\begin{cases} \alpha(x) > \beta(x) \\ \alpha(x) \in J \\ \beta(x) \in J; \end{cases}$$

38.* Неравенства вида $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$

...б) если функция $f(u)$ убывает на промежутке J , то неравенство $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$ равносильно системе

$$\begin{cases} \alpha(x) < \beta(x) \\ \alpha(x) \in J \\ \beta(x) \in J. \end{cases}$$

Частными случаями этого утверждения являются утверждения из 3 и 4 из п. 36 ($\sqrt[2k]{f(x)} < \sqrt[2k]{g(x)}$ и $\log_a f(x) > \log_a g(x)$).

38.* Неравенства вида $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$

1. Решите неравенство

$$\arccos(x - 2) > \arccos(3 - x). \quad (1)$$

Область существования функции $f(u) = \arccos u$ есть промежуток $J = [-1; 1]$. На этом промежутке $f(u)$ убывает, поэтому по утверждению 1 неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x - 2 < 3 - x \\ -1 \leq x - 2 \leq 1 \\ -1 \leq 3 - x \leq 1. \end{cases}$$

Все решения системы, а значит, и равносильного ей неравенства (1) составляют промежуток $[2; 2,5)$.

Ответ. $[2; 2,5)$.

38.* Неравенства вида $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$

2. Решите неравенство

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{3x-2} + \log_7(3x-2) + 3^{\frac{3x-2}{4}} > \\ > \sqrt[4]{3-2x} + \log_7(3-2x) + 3^{\frac{3-2x}{4}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Область существования функции $f(u) = \sqrt[4]{u} + \log_7 u + 3^{\frac{u}{4}}$ есть промежуток $J = (0; +\infty)$. На этом промежутке $f(u)$ возрастает как сумма возрастающих на этом промежутке функций, поэтому по утверждению 1 неравенство (2) равносильно системе

$$\begin{cases} 3x-2 > 3-2x \\ 3x-2 > 0 \\ 3-2x > 0. \end{cases}$$

Ответ. (1; 1,5).

38.* Неравенства вида $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$

Из утверждения 1 вытекает, что следующее утверждение:

2. Пусть область существования функции $f(u)$ есть R , тогда:

а) если функция $f(u)$ возрастает на R , то равносильны неравенства

$$f(\alpha(x)) > f(\beta(x)) \text{ и } \alpha(x) > \beta(x);$$

б) если функция $f(u)$ убывает на R , то равносильны неравенства

$$f(\alpha(x)) > f(\beta(x)) \text{ и } \alpha(x) < \beta(x).$$

Частными случаями утверждения 2 являются утверждения 6 и 8 из п. 30 ($a^{f(x)} > a^{g(x)}$).

38.* Неравенства вида $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$

3. Решите уравнение

$$(\pi - 3)^{x-5} - \sqrt[3]{x-5} > (\pi - 3)^{\frac{x-9}{2}} - \sqrt[3]{\frac{x-9}{2}}. \quad (3)$$

Область существования функции $f(u) = (\pi - 3)^u - \sqrt[3]{u}$ есть $\mathbf{R}$, функция убывает на $\mathbf{R}$ как сумма убывающих функций, поэтому по утверждению 2 неравенство (3) равносильно неравенству

$$x - 5 < \frac{x - 9}{2}.$$

Ответ. $(-\infty; 1)$.

Продолжение следует.