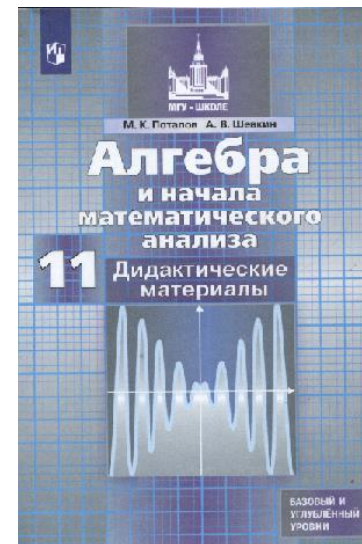


Нестандартные способы решения уравнений и неравенств (10-11 классы). Часть 2

Шевкин Александр Владимирович,
Заслуженный учитель РФ, лауреат премии и
грантов мэрии Москвы в области образования,
к.п.н., с.н.с., стаж работы в школе 44 года, один из
авторов учебников математики серии «МГУ-
школе», С.М. Никольский и др., Просвещение.
avshevkin@mail.ru www.shevkin.ru



39. Равносильность уравнений на множествах

Пусть k — данное натуральное число. Справедливы следующие утверждения:

1. Если в каждой точке множества M обе функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны, то на множестве M равносильны уравнения

$$f(x) = g(x) \quad \text{и} \quad (f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}.$$

2. Если в каждой точке множества M функция $\varphi(x)$ определена и отлична от нуля, то на множестве M равносильны уравнения

$$f(x) = g(x) \quad \text{и} \quad f(x) \varphi(x) = g(x) \varphi(x).$$

3. Если в каждой точке множества M определены обе части некоторой формулы (логарифмической, тригонометрической и т.п.), то, применив эту формулу при решении уравнения, получим уравнение, равносильное исходному на множестве M .

39. Равносильность уравнений на множествах

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x} = \sqrt[3]{2x - 1}. \quad (1)$$

Если x_0 — корень уравнения (1), то определено выражение $\sqrt{x_0}$ и $\sqrt{x_0} \geq 0$, тогда и $\sqrt[3]{2x_0 - 1} \geq 0$, т. е. $x_0 \geq 0,5$. Это означает, что все корни уравнения (1) содержатся в множестве $M = [0,5; +\infty)$.

В каждой точке множества M обе функции $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$ неотрицательны. Поэтому по утверждению 1 уравнение (1) равносильно на множестве M уравнению

$$(\sqrt{x})^6 = (\sqrt[3]{2x - 1})^6 \dots$$

Ответ. $1; \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

39. Равносильность уравнений на множествах

2. Решите уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} \pi x}{\lg\left(x + \frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{\lg\left(x + \frac{3}{4}\right)}. \quad (2)$$

Все корни уравнения (2) содержатся в множестве M тех x , для которых определён $\lg\left(x + \frac{3}{4}\right)$ и $\lg\left(x + \frac{3}{4}\right) \neq 0$, т. е.

$$M = \left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right).$$

В каждой точке множества M по утверждению 2 уравнение (2) равносильно на множестве M уравнению

$$\operatorname{tg} \pi x = 1 \dots$$

Ответ. $\frac{1}{4} + n, n \in \mathbb{N}.$

39. Равносильность уравнений на множествах

3. Решите уравнение

$$\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 = \frac{3}{x} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right). \quad (3)$$

Все корни уравнения (3) содержатся в множестве M — всех x , отличных от нуля: $M = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. В каждой точке множества M функция $\varphi(x) = x^2$ определена и отлична от нуля. Поэтому по утверждению 2 уравнение (3) равносильно на множестве M уравнению

$$x^2 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right) = \frac{3}{x} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) x^2,$$

которое можно переписать в виде

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 3 \left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0. \quad (4)$$

39. Равносильность уравнений на множествах

3. Решите уравнение

$$\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 = \frac{3}{x} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right). \quad (3)$$

...Введя новое неизвестное $t = x + \frac{1}{x}$, перепишем уравнение (4) в виде $t^2 - 3t - 4 = 0$.

Это уравнение имеет корни 4 и -1 , значит, только корни двух уравнений $x + \frac{1}{x} = 4$ и $x + \frac{1}{x} = -1$ будут корнями уравнения (4)...

Первое уравнение имеет корни $2 + \sqrt{3}$ и $2 - \sqrt{3}$, принадлежащие множеству M , второе уравнение корней не имеет...

Ответ. $2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}$.

39. Равносильность уравнений на множествах

4. Решите уравнение

$$5^{\log_5(x+1)} = x^3 - 2x^2 - 2x + 1.$$

Ответ. 0; 3.

5. Решите уравнение

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \cos x.$$

Ответ. $(-1)^m \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in \mathbb{Z}.$

40*. Равносильность уравнений на множествах (продолжение)

Справедливы следующие утверждения:

4. Если в каждой точке множества M обе функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны, то при $a > 0$ и $a \neq 1$ на множестве M равносильны уравнения

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad \text{и} \quad f(x) = g(x).$$

5. Если в каждой точке множества M функция $\varphi(x)$ определена, то на множестве M равносильны уравнения

$$f(x) + \varphi(x) = g(x) + \varphi(x) \quad \text{и} \quad f(x) = g(x).$$

При решении уравнений часто приходится применять несколько преобразований.

40*. Равносильность уравнений на множествах (продолжение)

1. Решите уравнение

$$\log_x(16x^2 - 1) = \log_x(x^6 - 1).$$

Ответ. 2.

2. Решите уравнение

$$\lg(3 - x) + 3\sqrt{\frac{x-1}{x-4}} - \sqrt{\frac{x-4}{x-1}} = \frac{5}{\sqrt{(x-4)(x-1)}} + \lg(3 - x).$$

Ответ. -3.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+5} = \sqrt{6x+6}$$

Ответ. $32 + 6\sqrt{30}$.

40*. Равносильность уравнений на множествах (продолжение)

4. Решите уравнение

$$\sin 2x - \cos x + \sqrt{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{6}$.

5. Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$\frac{ax}{x-3} + \frac{x}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}.$$

Ответ. Нет корней при $a = 1$, при $a = -1$, при $a = -3$;
единственный корень $\frac{6}{a+1}$ при $a \neq 1$, при $a \neq -1$, при $a \neq -3$.

41*. Равносильность уравнений на множествах

Пусть k — данное натуральное число. Справедливы следующие утверждения:

1. Если в каждой точке множества M обе функции $f(x)$ и $g(x)$ неотрицательны, то на множестве M равносильны неравенства $f(x) < g(x)$ и $(f(x))^{2k} < (g(x))^{2k}$.

2. Если в каждой точке множества M функция $\varphi(x)$ определена и положительна, то на множестве M равносильны неравенства $f(x) < g(x)$ и $f(x)\varphi(x) < g(x)\varphi(x)$.

3. Если в каждой точке множества M определены обе части некоторой формулы (логарифмической, тригонометрической и т.п.), то, применив эту формулу при решении неравенства, получим неравенство того же знака, равносильное исходному на множестве M .

41*. Равносильность уравнений на множествах

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x} < \sqrt[4]{2x + 3}. \quad (1)$$

Все решения неравенства (1) содержатся в множестве $M = [0; +\infty)$. В каждой точке множества M обе функции $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = \sqrt[4]{2x + 3}$ неотрицательны. Поэтому по утверждению 1 неравенство (1) равносильно на множестве M неравенству

$$(\sqrt{x})^4 < (\sqrt[4]{2x + 3})^4,$$

которое можно переписать в виде

$$x^2 - 2x - 3 < 0 \dots$$

Ответ. $[0; 3)$.

41*. Равносильность уравнений на множествах

2. Решите неравенство

$$\sqrt{2x+1} > \sqrt[3]{7x-1}. \quad (2)$$

Все решения неравенства (2) содержатся в множестве $M = [-0,5; +\infty)$.

1) Все x из M , для каждого из которых $7x - 1 < 0$, т. е. все $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{7}\right)$, являются решениями неравенства.

2) В каждой точке множества $M_1 = \left[\frac{1}{7}; +\infty\right)$ обе функции $f(x) = \sqrt{2x+1}$ и $g(x) = \sqrt[3]{7x-1}$ неотрицательны. Поэтому...

$$(\sqrt{2x+1})^6 > (\sqrt[3]{7x-1})^6 \dots$$

$$x(8x^2 - 37x + 20) > 0 \dots$$

$$\text{Ответ. } \left[-\frac{1}{2}; \frac{5}{8}\right) \cup (4; +\infty).$$

41*. Равносильность уравнений на множествах

3. Решите неравенство

$$\frac{x^2}{1 - \cos \pi x} < \frac{3 - 2x}{1 - \cos \pi x}. \quad (3)$$

Все решения неравенства (3) содержатся в множестве тех x , для которых $1 - \cos \pi x \neq 0$, т. е. содержатся в множестве M — всех $x \neq 2k$, $k \in \mathbf{Z}$. Для всех x из M , функция $1 - \cos \pi x$ положительна, поэтому по утверждению 2 неравенство (3) равносильно на M неравенству $x^2 < 3 - 2x$, все решения которого составляют промежуток $(-3; 1)$. Исключим из него числа $x = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$, не входящие в M . Получим множество решений неравенства (3): $(-3; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 1)$.

Ответ. $(-3; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 1)$.

41*. Равносильность уравнений на множествах

4. Решите неравенство

$$\frac{2 \sin x}{\sqrt{18-3x-x^2}} > \frac{1}{\sqrt{18-3x-x^2}}.$$

Ответ. $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right) \cup \left(-\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}\right).$

5. Решите неравенство

$$\log_2 x < \frac{1}{\log_x 2}.$$

Ответ. $(1; 2).$

6. Решите неравенство

$$\operatorname{tg} \pi x \operatorname{ctg} x < 2 \sin x.$$

Ответ. $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$

42*. Равносильность уравнений на множествах (продолжение)

Справедливы следующие утверждения:

4. Если в каждой точке множества M обе функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны, то на множестве M :

при $a > 1$ равносильны неравенства

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \quad \text{и} \quad f(x) < g(x);$$

при $0 < a < 1$ равносильны неравенства

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \quad \text{и} \quad f(x) > g(x).$$

5. Если в каждой точке множества M функция $\varphi(x)$ определена, то на множестве M равносильны неравенства

$$f(x) + \varphi(x) < g(x) + \varphi(x) \quad \text{и} \quad f(x) < g(x).$$

42*. Равносильность уравнений на множествах (продолжение)

1. Решите неравенство $\log_x(x + 3) > \log_x(2x + 1)$.

Ответ. (1; 2).

2. Решите неравенство

$$\log_2(x + 1) + \log_2(x + 4) + \sqrt{1 - x^2} < 2 + \sqrt{1 - x^2}.$$

Ответ. (-1; 0).

3. Найдите все решения неравенства $|x^2 - 5x - 2| < 2x - 2$, удовлетворяющие условию $x < 5$.

Ответ. (4; 5).

4. При каждом значении параметра a решите неравенство

$$\log_a(8 - x) < 2\log_a(x - 2).$$

Ответ. Нет решений при $a = 1$ и при $a < 0$; (4; 8) при $a > 1$; (2; 4) при $0 < a < 1$.

«Линеаризация» логарифмических неравенств

Для решения логарифмических неравенств с неизвестным в основании логарифма можно использовать ещё один приём. Его называют линеаризацией, так как в его основе лежит замена в неравенстве логарифмической функции линейной. Справедливо утверждение:

1. Знаки функций $y = \lg x$ и $y = x - 1$ совпадают на общей части их областей определения.

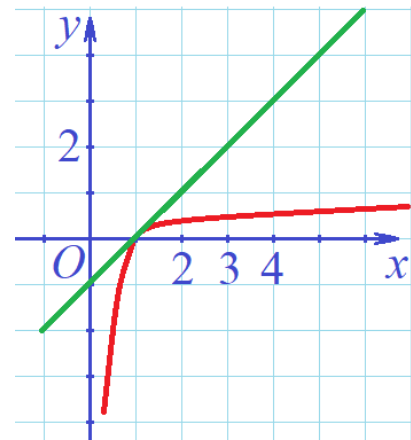
Например, для решения неравенства

$$\lg x (x - 3)(x - 5) < 0 \quad (1)$$

на множестве $M = (0; +\infty)$ заменим неравенство

(1) равносильным ему на M неравенством:

$$(x - 1)(x - 3)(x - 5) < 0. \quad (2)$$



«Линеаризация» логарифмических неравенств

$$(x - 1)(x - 3)(x - 5) < 0. \quad (2)$$

На множестве M неравенство (2) имеет множество решений $(0; 1) \cup (3; 5)$. Все эти решения являются решениями неравенства (1) и других решений неравенство (1) не имеет.

Из утверждения 1 следует справедливость утверждения:

2. Знаки функций $y = \lg f(x)$ и $y = f(x) - 1$ совпадают на общей части их областей определения.

Заменяя $f(x)$ на t получим утверждение 1 для функций $y = \lg t$ и $y = t - 1$, которое верно.

Рассмотрим пример применения утверждения 2 при решении задания 15 из сборника для подготовки к ЕГЭ-2021.

«Линеаризация» логарифмических неравенств

1. Решите неравенство

$$\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0. \quad (3)$$

Все решения неравенства (3) принадлежат множеству M всех x , таких, что $2-x > 0$, $2-x \neq 1$, $x+2 > 0$, $x+3 > 0$, $x+3 \neq 1$, $3-x > 0$, т. е. принадлежат множеству $M = (-2; 1) \cup (1; 2)$.

Перепишем неравенство (3) в виде

$$\frac{\lg(x+2) \cdot \lg(3-x)}{\lg(2-x) \cdot \lg(x+3)} \leq 0. \quad (4)$$

1) Сначала решим уравнение:

$$\frac{\lg(x+2) \cdot \lg(3-x)}{\lg(2-x) \cdot \lg(x+3)} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) имеет единственный корень -1 , это число является решением неравенства (4).



«Линеаризация» логарифмических неравенств

1. Решите неравенство

$$\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \leq 0. \quad (3)$$

...2) Теперь на множестве $M_1 = (-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2)$ решим неравенство:

$$\frac{\lg(x+2) \cdot \lg(3-x)}{\lg(2-x) \cdot \lg(x+3)} < 0 \quad (6)$$

На множестве M_1 неравенство (6) равносильно неравенству

$$\frac{(x+1)(2-x)}{(1-x)(x+2)} < 0,$$

имеющему множество решений $(-2; -1) \cup (1; 2)$. Все эти решения принадлежат множеству M_1 .

3) Объединим все найденные решения: $(-2; -1] \cup (1; 2)$.

Ответ. $(-2; -1] \cup (1; 2)$.

43. Уравнения и неравенства с модулями

1. Решите уравнение

$$|x - 3| + |x + 3| = 8. \quad (1)$$

Решив уравнения $x - 3 = 0$ и $x + 3 = 0$, отметим на оси полученные корни 3 и -3. Получим три промежутка: $(-\infty; -3)$, $[-3; 3]$ и $(3; +\infty)$. Решим уравнение на каждом из них.

1) На интервале $(-\infty; -3)$ получим уравнение $-x + 3 - x - 3 = 8$, имеющее единственный корень -4 , принадлежащее этому интервалу, -4 — единственный корень уравнения (1) на этом интервале.



2) На отрезке $[-3; 3]$ уравнение (1) равносильно уравнению $-x + 3 + x + 3 = 8$, не имеющему корней...

43. Уравнения и неравенства с модулями

1. Решите уравнение

$$|x - 3| + |x + 3| = 8. \quad (1)$$

3) На интервале $(3; +\infty)$ уравнение (1) равносильно уравнению $x - 3 + x + 3 = 8$, имеющему единственный корень 4, он и является единственным корнем уравнения (1) на этом интервале.

Объединяя все найденные корни уравнения (1), получим, что оно имеет два корня -4 и 4 .

Ответ. $-4; 4$.



43. Уравнения и неравенства с модулями

2. Решите неравенство

$$|x + 1| + |2x + 4| < 7.$$

Ответ. $\left(-4; \frac{2}{3}\right)$.

3. Решите уравнение

$$|x^2 - 4| + |x^2 - 9| = 2x + 11.$$

Ответ. $-3; 4; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

4. Решите неравенство

$$|x^2 - 3x - 5| > |x^2 - 2x - 2|.$$

Ответ. $(-\infty; -3) \cup (-1; 3,5)$.

43. Уравнения и неравенства с модулями

Справедливо следующее утверждение:

Уравнение $|f(x)| + |g(x)| = f(x) + g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

5. Решите уравнение

$$|x^2 - x - 6| + |x^2 - 6x + 5| = 2x^2 - 7x - 1. \quad (2)$$

Уравнение (2) имеет вид $|f(x)| + |g(x)| = f(x) + g(x)$, оно равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 5 \geq 0. \end{cases}$$

Ответ. $(-\infty; -2] \cup [5; +\infty)$.

Иллюстрация из ЕГЭ (задание 18)

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5 \quad (3)$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$.

Уравнение (3) имеет хотя бы один корень, если $a \geq 2,5$ (*).

Перепишем уравнение (3) в виде

$$|x - a^2 + 4a - 2| + |-x + a^2 - 2a - 3| = 2a - 5. \quad (4)$$

Уравнение (4) имеет вид $|f(x)| + |g(x)| = f(x) + g(x)$, оно равносильно системе

$$\begin{cases} x - a^2 + 4a - 2 \geq 0 \\ -x + a^2 - 2a - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a^2 - 4a + 2 \\ x \leq a^2 - 2a - 3. \end{cases}$$

Обозначим: $\begin{cases} x \geq A \\ x \leq B. \end{cases}$



Иллюстрация из ЕГЭ (задание 18)

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|x - a^2 + 4a - 2| + |x - a^2 + 2a + 3| = 2a - 5 \quad (3)$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$.

... Уравнение (4) имеет хотя бы один корень, если $A \leq x \leq B$.

И должны одновременно выполняться два условия: $A \leq 23$ и $B \geq 5$.

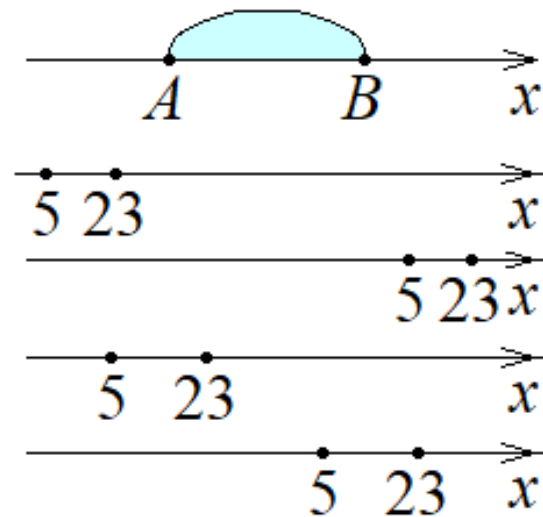
Решив систему

$$\begin{cases} a^2 - 4a + 2 \leq 23 \\ a^2 - 2a - 3 \geq 5, \end{cases}$$

получим $-3 \leq a \leq -2$ или $4 \leq a \leq 7$.

Условию (*) удовлетворяет .

Ответ. $4 \leq a \leq 7$.



44*. Уравнения вида $\varphi(\varphi(x)) = x$

Уравнения специального вида $\varphi(\varphi(x)) = x$ встречаются нечасто, однако на конкурсных экзаменах и олимпиадах прошлых лет их можно было встретить. Приведём пример такого уравнения: $\sqrt{\sqrt{x} + 2} + 2 = x$. Здесь $\varphi(x) = \sqrt{x} + 2$, а $\varphi(\varphi(x)) = \sqrt{\sqrt{x} + 2} + 2$. Оказывается, решение уравнения $\sqrt{\sqrt{x} + 2} + 2 = x$ можно свести к решению более простого уравнения $\sqrt{x} + 2 = x$.

Справедливо следующее утверждение:

Пусть функция $\varphi(x)$ возрастает на промежутке X и пусть $\varphi(x_0) \in X$ для любого $x_0 \in X$, тогда уравнения $\varphi(x) = x$ и $\varphi(\varphi(x)) = x$ равносильны на промежутке X .

44*. Уравнения вида $\varphi(\varphi(x)) = x$

Запишем решение уравнения

$$\sqrt{\sqrt{x} + 2} + 2 = x. \quad (1)$$

Если уравнение (1) имеет корень, то он принадлежит множеству $X = [2; +\infty)$. Функция $\varphi(x) = \sqrt{x} + 2$ возрастает на X , значения этой функции принадлежат X . Тогда уравнение (1) равносильно на X уравнению $\sqrt{x} + 2 = x$, имеющему единственный корень 4. Это единственный корень уравнения (1).

Ответ. 4.

Ещё один пример. Уравнение $\sin(\sin x) = x$. Функция $\sin x$ возрастает на промежутке $[-1; 1]$, $\varphi(x_0) \in X$ для любого $x_0 \in X$. Уравнение $\sin(\sin x) = x$ равносильно уравнению $\sin x = x$...

Ответ. 0.

44*. Уравнения вида $\varphi(\varphi(x)) = x$

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\sqrt{|x| - 1} + \frac{3}{4} + \frac{7}{4}} = x. \quad (2)$$

Здесь $X = \left[\frac{7}{4}; +\infty\right)$. Для $x \in X$ уравнение (2) перепишем в виде

$$\sqrt{\left(\sqrt{x - 1} + \frac{7}{4}\right) - 1 + \frac{7}{4}} = x. \quad (3)$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \sqrt{x - 1} + \frac{7}{4}$ на промежутке X .
Функция $\varphi(x)$ возрастает на X и $\varphi(x_0) \in X$ для любого $x_0 \in X$.
Уравнение (3) равносильно уравнению $\sqrt{x - 1} + \frac{7}{4} = x \dots$

Ответ. $\frac{13}{4}$.

44*. Уравнения вида $\varphi(\varphi(x)) = x$

2. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{x+6}+6} = x. \quad (4)$$

Функция $\varphi(x) = \sqrt[3]{x+6}$ возрастает на $\mathbf{R}$. Уравнение (4) равносильно уравнению

$$\sqrt[3]{x+6} = x,$$

имеющему единственный корень 2. Следовательно, и равносильное ему уравнение (4) имеет единственный корень 2.

Ответ. 2.

44*. Уравнения вида $\varphi(\varphi(x)) = x$

3. Решите уравнение

$$x^3 - 24 = \sqrt[3]{x + 24}. \quad (5)$$

Возведём уравнение (5) в третью степень и перенесём слагаемое 24 в левую часть уравнения:

$$(x^3 - 24)^3 - 24 = x. \quad (6)$$

Функция $\varphi(x) = x^3 - 24$ возрастает на $\mathbf{R}$, поэтому уравнение (6) равносильно уравнению

$$x^3 - 24 = x,$$

имеющему единственный корень 3. Следовательно, и равносильное ему уравнение (5) имеет единственный корень 3.

Ответ. 3.

44*. Уравнения вида $\varphi(\varphi(x)) = x$

4. Решите уравнение

$$7\sqrt[3]{7x-6} = x^3 + 6. \quad (7)$$

Перенесём слагаемое 6 в левую часть уравнения, затем извлечём кубический корень:

$$\sqrt[3]{7\sqrt[3]{7x-6} - 6} = x. \quad (8)$$

Функция $\varphi(x) = \sqrt[3]{7x-6}$ возрастает на $\mathbf{R}$, поэтому уравнение (8) равносильно уравнению

$$\sqrt[3]{7x-6} = x,$$

имеющему корни $-3, 1, 2$. Следовательно, и равносильное ему уравнение (7) имеет те же корни.

Ответ. $-3, 1, 2$.

45. Метод интервалов для непрерывных функций

1. Решите неравенство

$$2^{\sqrt{x^2-4}}(x-6)\log_3(10-x) < 0. \quad (1)$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 2^{\sqrt{x^2-4}}(x-6)\log_3(10-x)$.

Она определена на множестве все x , являющихся решениями системы

$$\begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \\ 10 - x > 0. \end{cases}$$

$D(f) = (-\infty; -2] \cup [2; 10)$. Проверим, удовлетворяют ли концы промежутков этого множества, то есть числа -2 и 2 неравенству (1). Оказывается оба эти числа являются решениями неравенства (1).

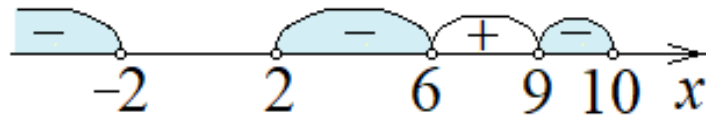
45. Метод интервалов для непрерывных функций

1. Решите неравенство

$$2^{\sqrt{x^2-4}}(x-6)\log_3(10-x) < 0. \quad (1)$$

2) Найдём нули функции $f(x)$, т. е. корни уравнения $f(x) = 0$. Это числа 6 и 9, они не являются решениями неравенства (1).

3) Определим знак функции $f(x)$ на каждом из интервалов: $(-\infty; -2)$, $(2; 6)$, $(6; 9)$ и $(9; 10)$.



Решениями неравенства $f(x) < 0$

являются все числа из интервалов $(-\infty; -2)$, $(2; 6)$, $(9; 10)$.

4) Объединим все решения: $(-\infty; -2] \cup [2; 6) \cup (9; 10)$.

Ответ. $(-\infty; -2] \cup [2; 6) \cup (9; 10)$.

45. Метод интервалов для непрерывных функций

2. Решите неравенство

$$2^{\sqrt{x^2-4}}(x-6)\log_3(10-x) \leq 0.$$

Если в том же неравенстве поменять знак строгого неравенства на знак нестрогого неравенства, то план решения будет тот же, только в ответе добавятся корни уравнения $f(x) = 0$.

Ответ. $(-\infty; -2] \cup [2; 6] \cup [9; 10)$.

46*. Использование свойств функций

1. Решите неравенство

$$(\sqrt{x^2 - 16} + 1) \log_3(x^2 - 7) - \left(\frac{3}{4} + \sqrt{16 - x^2} + 3\right) < 0.$$

Если неравенство имеет решение, то оно удовлетворяет условиям: $x^2 - 16 \geq 0$, $x^2 - 7 > 0$, $16 - x^2 \geq 0$. Этим условиям удовлетворяют лишь два числа 4 и -4 — первое является решением неравенства, а второе — нет.

Ответ. 4.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - 5x - 14} + |\log_{0,6}(x^2 - 14x + 50)| = 0.$$

Сумма двух неотрицательных функций равна 0, если...

Ответ. 7.

46*. Использование свойств функций

3. Решите неравенство

$$3 + x^2 - \pi x + \frac{\pi^2}{4} \leq 3 \sin x.$$

Перепишем неравенство в виде

$$3 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \leq 3 \sin x.$$

Так как $3 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \geq 3$, а $3 \sin x \leq 3$, то неравенство выполняется лишь при условиях $3 + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 3$, а $3 \sin x = 3$, то есть лишь при $x = \frac{\pi}{2}$.

Ответ. $\frac{\pi}{2}$.

46*. Использование свойств функций

4. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x-2} = 3 - \sqrt{x+1}.$$

Обе части неравенства определены для всех x из промежутка $M = [-1; +\infty)$. Функция $\sqrt[3]{x-2}$ возрастает на промежутке M , а функция $3 - \sqrt{x+1}$ — убывает на промежутке M . Поэтому если уравнение имеет корень, то он единственный.

Проверка показывает, что число 3 является корнем уравнения и других корней уравнение не имеет.

Ответ. 3.

Использование свойств функций (Ткачук В.В. [3])

1. Решите уравнение

$$3^{\frac{x+2}{3x-4}} - 7 = 2 \cdot 3^{\frac{5x-10}{3x-4}}. \quad (1)$$

Может показаться, что у автора здесь пропущена опечатка: надо или у первой дроби в показателе степени поставить "-", или у второй дроби в показателе степени поставить "+".

Но это только на первый взгляд. Получаемые уравнения пятой степени относительно нового неизвестного при любом из этих исправлений не дают "хороших" корней. Остаётся надежда на нестандартные методы. Рассмотрим функции, записанные в левой и в правой частях уравнения (1).

Использование свойств функций (Ткачук В.В. [3])

1. Решите уравнение

$$3^{\frac{x+2}{3x-4}} - 7 = 2 \cdot 3^{\frac{5x-10}{3x-4}}. \quad (1)$$

Рассмотрим функции, записанные в левой и в правой частях уравнения (1). Функция $f(x) = 3^{\frac{x+2}{3x-4}} - 7$ определена на каждом из двух интервалов $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$ и $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$, она имеет производную

$$f'(x) = 3^{\frac{x+2}{3x-4}} \cdot \ln 3 \cdot \left(\frac{x+2}{3x-4}\right)' = A \cdot \frac{-10}{(3x-4)^2} < 0,$$

где $A = 3^{\frac{x+2}{3x-4}} \cdot \ln 3 > 0$ в любой точке каждого из этих двух интервалов. Производная функции отрицательна на каждом из интервалов, следовательно, функция убывает на каждом из них.

Использование свойств функций (Ткачук В.В. [3])

1. Решите уравнение

$$3^{\frac{x+2}{3x-4}} - 7 = 2 \cdot 3^{\frac{5x-10}{3x-4}}. \quad (1)$$

...Функция $g(x) = 2 \cdot 3^{\frac{5x-10}{3x-4}}$ определена на каждом из тех же двух интервалов, она имеет производную

$$g'(x) = 2 \cdot 3^{\frac{5x-10}{3x-4}} \cdot \ln 3 \cdot \left(\frac{5x-10}{3x-4} \right)' = B \cdot \frac{10}{(3x-4)^2} > 0,$$

где $B = 2 \cdot 3^{\frac{5x-10}{3x-4}} \cdot \ln 3 > 0$ в любой точке каждого из двух интервалов. Производная функции положительна на каждом из интервалов, следовательно, функция возрастает на каждом из них.

Использование свойств функций (Ткачук В.В. [3])

1. Решите уравнение

$$3^{\frac{x+2}{3x-4}} - 7 = 2 \cdot 3^{\frac{5x-10}{3x-4}}. \quad (1)$$

...Это означает, что если на каком-то из двух интервалов графики функций имеют общую точку, то она единственная.

На интервале $\left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$ графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют общую точку, так как $f(2) = g(2) = 2$. Значит, уравнение (1) на этом интервале имеет единственный корень $x_1 = 2$.

На интервале $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$ всё не так очевидно.

Использование свойств функций (Ткачук В.В. [3])

1. Решите уравнение

$$3^{\frac{x+2}{3x-4}} - 7 = 2 \cdot 3^{\frac{5x-10}{3x-4}}. \quad (1)$$

...Если $x \rightarrow -\infty$, то $f(x) \rightarrow 3^{\frac{1}{3}} - 7$, Функция $f(x)$ убывает на интервале $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$, принимая отрицательные значения, а $g(x) \rightarrow 2 \cdot 3^{\frac{5}{3}}$, она возрастает на том же интервале, принимая положительные значения. Графики функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют общих точек, значит, уравнение (1) на этом интервале не имеет корней.

Итак, уравнение (1) имеет единственный корень $x_1 = 2$.

Ответ. 2.

Рассуждения с числовыми значениями. Идея метода

1. Решите уравнение

$$\sqrt{1 - (|x| - 2\pi)^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - (|x| - 2\pi)^2}} = 2 \sin \left(\frac{x}{4} \cdot \cos x \right). \quad (1)$$

Если существует x_0 — корень уравнения (1), то верно числовое равенство

$$\sqrt{1 - (|x_0| - 2\pi)^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - (|x_0| - 2\pi)^2}} = 2 \sin \left(\frac{x_0}{4} \cdot \cos x_0 \right). \quad (2)$$

Левая часть равенства (2) положительна и, в силу неравенства $a + \frac{1}{a} \geq 2$ для любого $a > 0$, верно числовое неравенство

$$\sqrt{1 - (|x_0| - 2\pi)^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - (|x_0| - 2\pi)^2}} \geq 2.$$

Рассуждения с числовыми значениями. Идея метода

1. Решите уравнение

$$\sqrt{1 - (|x| - 2\pi)^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - (|x| - 2\pi)^2}} = 2 \sin \left(\frac{x}{4} \cdot \cos x \right). \quad (1)$$

...Для правой части равенства (2) верно числовое неравенство

$$2 \sin \left(\frac{x_0}{4} \cdot \cos x_0 \right) \leq 2.$$

Это возможно лишь при условии $\sqrt{1 - (|x_0| - 2\pi)^2} = 1$, т. е. при условии $x_0 = \pm 2\pi$.

Проверка показывает, что из двух чисел 2π и -2π первое является корнем уравнения (1), а второе — нет.

Ответ. 2π .

Замечание. Проверка найденных чисел является обязательной частью решения, начатого фразой «Если существует x_0 ...».

Рассуждения с числовыми значениями. «Страшные снаружи...»

2. Решите уравнение

$$\sin \frac{(2021x - 2020)\pi}{2} - 1 = |\sqrt{2021x - 2020} - \sqrt{2021 - 2020x}|. \quad (1)$$

Если существует корень x_0 , то верно числовое равенство:

$$\sin \frac{(2021x_0 - 2020)\pi}{2} - 1 = |\sqrt{2021x_0 - 2020} - \sqrt{2021 - 2020x_0}|. \quad (2)$$

Так как все числовые выражения в равенстве (2) определены, то любое число x_0 является решением системы:

$$\begin{cases} 2021x - 2020 \geq 0, \\ 2021 - 2020x_0 \geq 0, \end{cases}$$

т. е. удовлетворяет двойному неравенству:

$$\frac{2020}{2021} \leq x_0 \leq \frac{2021}{2020}. \quad (3)$$



Рассуждения с числовыми значениями. «Страшные снаружи...»

2. Решите уравнение

$$\sin \frac{(2021x-2020)\pi}{2} - 1 = |\sqrt{2021x - 2020} - \sqrt{2021 - 2020x}|. \quad (1)$$

...Правая часть равенства (2) неотрицательна, следовательно, и левая часть неотрицательна, что возможно лишь при условии:

$$\sin \frac{(2021x_0-2020)\pi}{2} = 1,$$

откуда следует, что все числа x_0 находятся из равенства:

$$\frac{(2021x_0-2020)\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z},$$

т. е. по формуле $x_0 = 1 + \frac{4n}{2021}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Рассуждения с числовыми значениями. «Страшные снаружи...»

2. Решите уравнение

$$\sin \frac{(2021x-2020)\pi}{2} - 1 = |\sqrt{2021x - 2020} - \sqrt{2021 - 2020x}|. \quad (1)$$

...Подставив $1 + \frac{4n}{2021}$ вместо x_0 в двойное неравенство (3), получим двойное неравенство:

$$\frac{2020}{2021} \leq 1 + \frac{4n}{2021} \leq \frac{2021}{2020},$$

которое выполняется лишь для целого $n = 0$. Это означает, что если уравнение (1) имеет корень x_0 , то этот корень равен 1.

Проверкой убеждаемся, что $x_0 = 1$ действительно является корнем уравнения (1).

Ответ. 1.

Рассуждения с числовыми значениями. «Страшные снаружи...»

3. Решите уравнение

$$\sqrt{-x^2 + 10x - 24} - 1 = \left| \log_2(x - 3) - \sin \frac{(5x-24)\pi}{2} \right|. \quad (4)$$

Если существует корень x_0 , то верно числовое равенство:

$$\sqrt{1 - (x_0 - 5)^2} - 1 = \left| \log_2(x_0 - 3) - \sin \frac{(5x_0-24)\pi}{2} \right|. \quad (5)$$

Так как правая часть равенства (5) неотрицательна, то его левая часть тоже неотрицательна, что возможно лишь при $x_0 = 5$. При этом левая часть равенства (5) равна 0. Проверка показывает, что при $x_0 = 5$ правая часть равенства (5) равна 0.

Итак, $x_0 = 5$ — единственный корень уравнения (4).

Ответ. 5.

Из этого задания сделаем два задания на параметры.

Рассуждения с числовыми значениями. «Страшные снаружи...»

4. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{-x^2 + 10x - 24} - 1 = \left| \log_2(x - a) - \sin \frac{(5x-24)\pi}{2} \right| \quad (6)$$

имеет единственный корень.

Если существует корень x_0 , то верно числовое равенство:

$$\sqrt{1 - (x_0 - 5)^2} - 1 = \left| \log_2(x_0 - a) - \sin \frac{(5x_0-24)\pi}{2} \right|. \quad (7)$$

Рассуждая как в решении задания 3, получим, что левая часть равенства (7) неотрицательна лишь при $x_0 = 5$. При этом левая часть равенства (7) равна 0.

Рассуждения с числовыми значениями. «Страшные снаружи...»

3. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{-x^2 + 10x - 24} - 1 = \left| \log_2(x - a) - \sin \frac{(5x-24)\pi}{2} \right| \quad (6)$$

имеет единственный корень.

Так как $x_0 = 5$, то $\sin \frac{(5x_0-24)\pi}{2} = \sin \frac{(25-24)\pi}{2} = 1$ и равенство (7) верно лишь при $a = 3$. То есть уравнение (6) имеет единственный корень при $a = 3$.

Ответ. При $a = 3$.

Рассуждения с числовыми значениями. «Страшные снаружи...»

5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{-x^2 + 10x - 24} - 1 = \left| \log_2(x - 3) - \sin \frac{(5x - a)\pi}{2} \right| \quad (8)$$

имеет единственный корень.

Если существует корень x_0 , то верно числовое равенство:

$$\sqrt{1 - (x_0 - 5)^2} - 1 = \left| \log_2(x_0 - 3) - \sin \frac{(5x_0 - a)\pi}{2} \right|. \quad (9)$$

Рассуждая как в решении задания 3, получим, что левая часть равенства (9) неотрицательна лишь при $x_0 = 5$. При этом левая часть равенства (9) равна 0.

Рассуждения с числовыми значениями. «Страшные снаружи...»

5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{-x^2 + 10x - 24} - 1 = \left| \log_2(x - 3) - \sin \frac{(5x-a)\pi}{2} \right| \quad (8)$$

имеет единственный корень.

Так как $x_0 = 5$, то $\log_2(x_0 - 3) = \log_2(5 - 3) = 1$, и равенство (9) верно лишь при условии $\frac{(5x_0-a)\pi}{2} = \frac{(25-a)\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Откуда получим, что $a = 24 - 4k$, где $k \in \mathbb{Z}$. То есть уравнение (8) имеет единственный корень при $a = 24 - 4k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ. При $a = 24 - 4k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Задачи 2-5 по мотивам статьи: [Новогоднее уравнение и рассуждения с числовыми значениями](http://www.shevkin.ru) (www.shevkin.ru)

«Страшные снаружи...» (Ткачук В.В. [3])

1. Решите уравнение

$$\sin(\log_{\sqrt{x}} x^{\pi x}) + \sin \pi x + \cos \pi x + \cos(\log_x x^{2\pi x}) = 0.$$

Здесь $x > 0$, $x \neq 1$. $\log_{\sqrt{x}} x^{\pi x} = \log_x x^{2\pi x} = 2\pi x$, перепишем уравнение в виде:

$$\sin 2\pi x + \cos 2\pi x + \sin \pi x + \cos \pi x = 0, \quad | \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(2\pi x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$2\sin\left(\frac{3\pi x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) = 0.$$

$$\frac{3\pi x}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi k \quad \text{или}$$

$$x = \frac{4k-1}{6}, k \in \mathbf{Z}$$

$$\frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$x = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}.$$

«Страшные снаружи...» (Ткачук В.В. [3])

1. Решите уравнение

$$\sin(\log_{\sqrt{x}} x^{\pi x}) + \sin \pi x + \cos \pi x + \cos(\log_x x^{2\pi x}) = 0.$$

$$\dots \quad x = \frac{4k-1}{6}, k \in \mathbf{Z}; \qquad x = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}.$$

Учитывая условия $x > 0$, $x \neq 1$, имеем:

$k > 0$, при этом $\frac{4k-1}{6} \neq 1$, так как уравнение $\frac{4k-1}{6} = 1$ не имеет натурального корня; т. е. $k \in \mathbf{N}$;

$n > 0$, при этом $2n + 1 \neq 1$, т. е. $n \in \mathbf{N}$.

Ответ. $\frac{4k-1}{6}; 2n + 1, k \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}$.

Решите систему уравнений (Зив Б.Г., Гольдич В.А. [1])

$$2. \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$$

Так как $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y} = 1$, то $\sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}$, т. е.

исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x - y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(x + y) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x + y = \frac{\pi}{2} + \pi k, \end{cases}$$

$n \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}.$

Решите систему уравнений (Зив Б.Г., Гольдич В.А. [1])

$$2. \begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x + y = \frac{\pi}{2} + \pi k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{(2n+k)\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{6} + \frac{(k-2n)\pi}{2}, \end{cases} n \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}.$$

$$2) \begin{cases} x - y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x + y = \frac{\pi}{2} + \pi k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{(2n+k)\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{3} + \frac{(k-2n)\pi}{2}, \end{cases} n \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ составляем из пар $(x; y)$, полученный в случаях 1) и 2).

Решите уравнение (Ткачук В.В. [3])

$$3. \sqrt{2} \sin \left(\pi \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{5}{x} - x + 6} \right) + \sqrt{6} \cos \left(\pi x \cdot \sqrt{\frac{5}{x^2} + \frac{6}{x} - 1} \right) = \sqrt{8}.$$

Разделим уравнение на $\sqrt{8}$:

$$\frac{1}{2} \sin \left(\pi \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{5}{x} - x + 6} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left(\pi x \cdot \sqrt{\frac{5}{x^2} + \frac{6}{x} - 1} \right) = 1.$$

Если есть корень уравнения, то он положительный, значит, $x > 0$, внесём множители $\sqrt{x}$ и x под знак первого и второго корня соответственно:

$$\frac{1}{2} \sin(\pi \cdot \sqrt{-x^2 + 6x + 5}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\pi \cdot \sqrt{-x^2 + 6x + 5}) = 1.$$

Решите уравнение (Ткачук В.В. [3])

$$3. \sqrt{2} \sin \left(\pi \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{5}{x} - x + 6} \right) + \sqrt{6} \cos \left(\pi x \cdot \sqrt{\frac{5}{x^2} + \frac{6}{x} - 1} \right) = \sqrt{8}.$$

... Выполнив замену $\alpha = \pi \cdot \sqrt{-x^2 + 6x + 5}$, перепишем уравнение в виде:

$$\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) = 1;$$

$$\alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Решим уравнение:

$$\pi \cdot \sqrt{-x^2 + 6x + 5} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \mid : \pi$$

Решите уравнение (Ткачук В.В. [3])

$$3. \sqrt{2} \sin \left(\pi \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{5}{x} - x + 6} \right) + \sqrt{6} \cos \left(\pi x \cdot \sqrt{\frac{5}{x^2} + \frac{6}{x} - 1} \right) = \sqrt{8}.$$

$$\dots \sqrt{-x^2 + 6x + 5} = \frac{1}{6} + 2n, n \in \mathbf{Z}.$$

Так как функция $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x + 5}$, $x > 0$, определена на промежутке $(0; 3 + \sqrt{14}]$, достигает наибольшего значения $\sqrt{14}$ в точке $x_0 = 3$, то целое число n удовлетворяет двойному неравенству:

$$0 \leq \frac{1}{6} + 2n \leq \sqrt{14}.$$

Таким образом, или $n = 0$, или $n = 1$. Рассмотрим оба случая.

Решите уравнение (Ткачук В.В. [3])

$$3. \sqrt{2} \sin \left(\pi \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{5}{x} - x + 6} \right) + \sqrt{6} \cos \left(\pi x \cdot \sqrt{\frac{5}{x^2} + \frac{6}{x} - 1} \right) = \sqrt{8}.$$

$$\dots \sqrt{-x^2 + 6x + 5} = \frac{1}{6} + 2n, n \in \mathbf{Z}.$$

1) Если $n = 0$, то уравнение $\sqrt{-x^2 + 6x + 5} = \frac{1}{6}$ имеет только один положительный корень $x_1 = 3 + \frac{\sqrt{503}}{6}$, он меньше $3 + \sqrt{14}$.

2) Если $n = 1$, то уравнение $\sqrt{-x^2 + 6x + 5} = \frac{13}{6}$ имеет только один положительный корень $x_2 = 3 + \frac{\sqrt{335}}{6}$, он меньше $3 + \sqrt{14}$.

Числа x_1 и x_2 являются корнями исходного уравнения.

Ответ. $3 + \frac{\sqrt{335}}{6}; 3 + \frac{\sqrt{503}}{6}.$

Ответ в [3]: $\arccos(6 - \sqrt{33}).$

Решите неравенство (Ткачук В.В. [3])

$$4. (|x + 1| + |2x - 1|) \cdot \lg \left(\frac{\pi}{\sqrt{10}} \right)^{2x} \geq 0. \quad (1)$$

Про это громоздкое неравенство ученики могут думать: «Нас пугают, а мы не боимся». Главное не растеряться. В самом деле, $\frac{\pi}{\sqrt{10}} > 0$, поэтому неравенство (1) можно переписать в виде

$$(|x + 1| + |2x - 1|) \cdot x \cdot \lg \frac{\pi^2}{10} \geq 0. \quad (2)$$

Так как $0 < \frac{\pi^2}{10} < 1$, то $\lg \frac{\pi^2}{10} < 0$, поэтому неравенство (2) можно переписать в виде

$$(|x + 1| + |2x - 1|) \cdot x \leq 0.$$

Решите неравенство (Ткачук В.В. [3])

$$4. (|x + 1| + |2x - 1|) \cdot \lg \left(\frac{\pi}{\sqrt{10}} \right)^{2x} \geq 0. \quad (1)$$

$$\dots \quad (|x + 1| + |2x - 1|) \cdot 2x \leq 0.$$

Функция $(|x + 1| + |2x - 1|)$ положительная, так как модули не обращаются в нуль при одних и тех же значениях x .

Таким образом, неравенство (1) равносильно неравенству

$$x \leq 0,$$

оно имеет множество решений $(-\infty; 0]$.

Ответ. $(-\infty; 0]$.

Список используемой литературы

1. Зив Б.Г., Гольдич В.А. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 10-11 классов. – 4-е изд. – М.: Издательство МЦНМО : СПб. : «Петроглиф» : «Виктория-плюс», 2015.

2. Потапов М.К., Шевкин А.В. Алгебра и начала анализа. Дидактические материалы. 11 класс : учебное пособие для общеобразовательных организаций : базовый и углублённый уровни. – 13-е изд. – М.: Просвещение, 2020.

3. Ткачук В.В. Математика – абитуриенту. 20-е изд. – М.: Издательство МЦНМО, 2020.

Выражаю сердечную благодарность учителю математики **Назарову М.Г.** за помощь в подборе заданий для презентации.

Спасибо за внимание и понимание!

Электронная почта:

Шевкин Александр

Владимирович

avshevkin@mail.ru.

сайт www.shevkin.ru

Канал НАБЛЮДАТЕЛЬ

на Яндекс Дзен

