# Параметры
# в 10-11 классах


**Шевкин Александр Владимирович**,
Заслуженный учитель РФ, лауреат премии и грантов мэрии Москвы в области образования, **к. п. н., с. н. с.**, стаж работы в школе 44 года, один из авторов учебников математики **серии «МГУ-школе»**, С.М. Никольский и др., Просвещение (с 1999 г.)

avshevkin@mail.ru www.shevkin.ru

## Продолжаем разговор

Начало нашего разговора отражено в презентации и дополнениях к ней, которые использовались при проведении вебинара 01.12.2020. Презентации можно скачать.

Сегодня пойдём дальше, посмотрим, что можно делать с учащимися, используя задачи из ДМ-11 к нашему учебнику, моей книги «Задачи с параметрами» и других источников.

Демоверсия ЕГЭ 2021 и сборники заданий дают примеры задач, для решения которых достаточно знаний за 9 класс.

Рассмотрим такие примеры.


## Повторение известных идей решения задач с параметром

**18** Найдите все положительные значения $a$, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(|x|-5)^2+(y-4)^2=9,\\(x+2)^2+y^2=a^2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

ЕГЭ 2021. Демоверсия

Такие задания можно решать в порядке повторения, они опираются на простейшие представления о системе координат, уравнении окружности и модуле. Про модуль – идея даже проще, чем в «Сердечных задачах с параметром», которые мы разобрали в предыдущей презентации.

Первое уравнение системы не зависит от параметра, задаёт две окружности, второе уравнение задаёт одну окружность с фиксированным центром и радиусом $a$. Полное решение можно посмотреть в демоверсии, обсудим только его идею.

## Повторение известных идей решения задач с параметром

**18** Найдите все положительные значения $a$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x|-5)^2+(y-4)^2=9, \\ (x+2)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

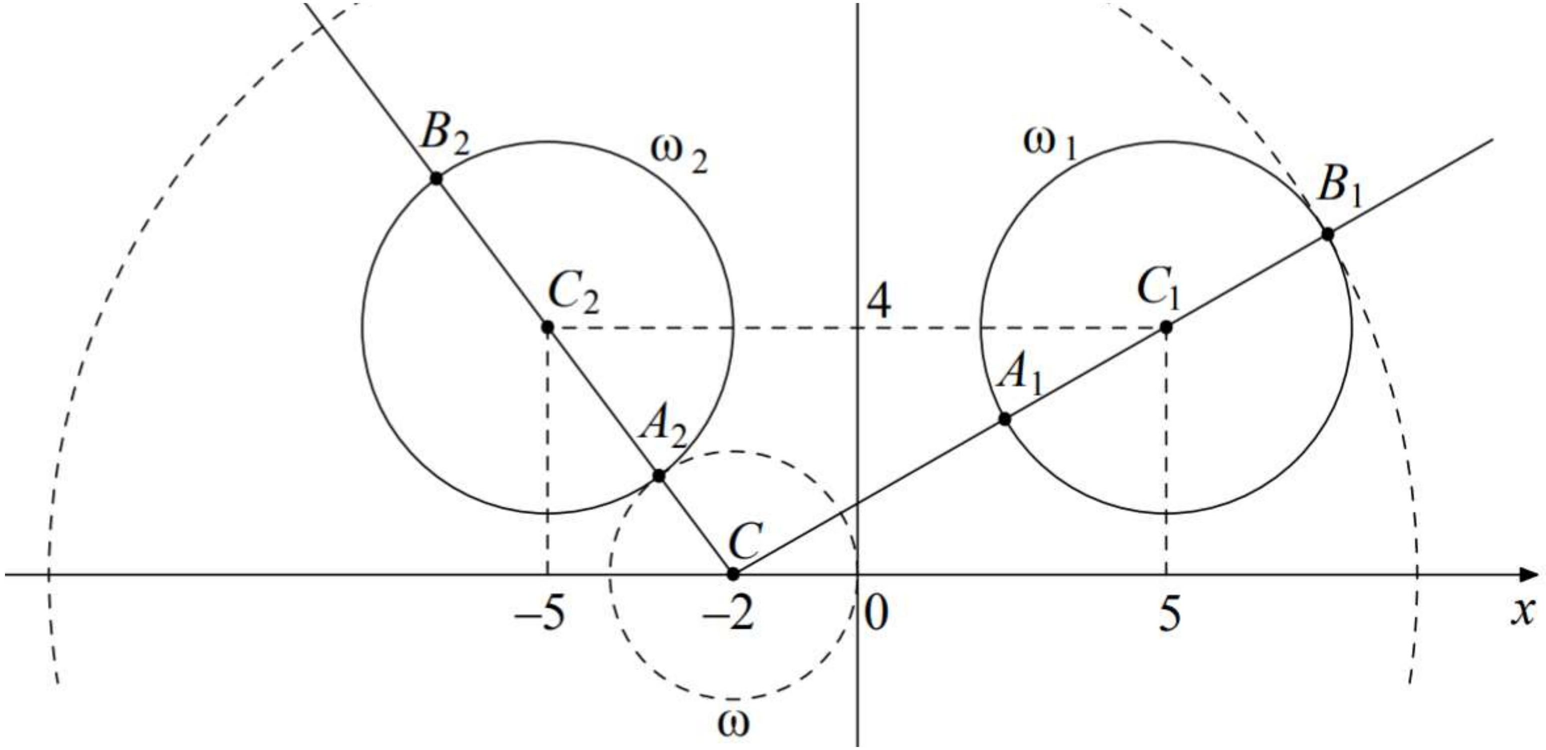
имеет единственное решение.

Система имеет решение лишь в случае касания окружности с центром $C$ в точках $B_1$ и $A_2$ с первыми двумя окружностями.

Дальше идут простые расчёты.

$a = \sqrt{65} + 3$ или $a = 2$.

На реальном экзамене могут быть и более сложные задания.



## Повторение известных идей решения задач с параметром

**1.** При каких значениях $a$ найдутся числа $x$ и $y$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2xy+a} = x+y+1\,. \qquad (1)$$

Если пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением уравнения (1), то справедливы два числовых неравенства

$$x_0+y_0+1 \geq 0. \qquad (2)$$

$$2x_0y_0+a \geq 0, \qquad (3)$$

Неравенство (2) означает, что точка $(x_0; y_0)$ в системе координат $xOy$ лежит на прямой $y=-x-1$ или выше этой прямой. Для всех таких пар чисел уравнение (1) равносильно уравнению

$$2xy+a=(x+y+1)^2. \qquad (4)$$

При этом неравенство (3) не требует проверки, так как если для пары чисел $(x_0; y_0)$ верно равенство (4), то верно неравенство (3).

## Повторение известных идей решения задач с параметром

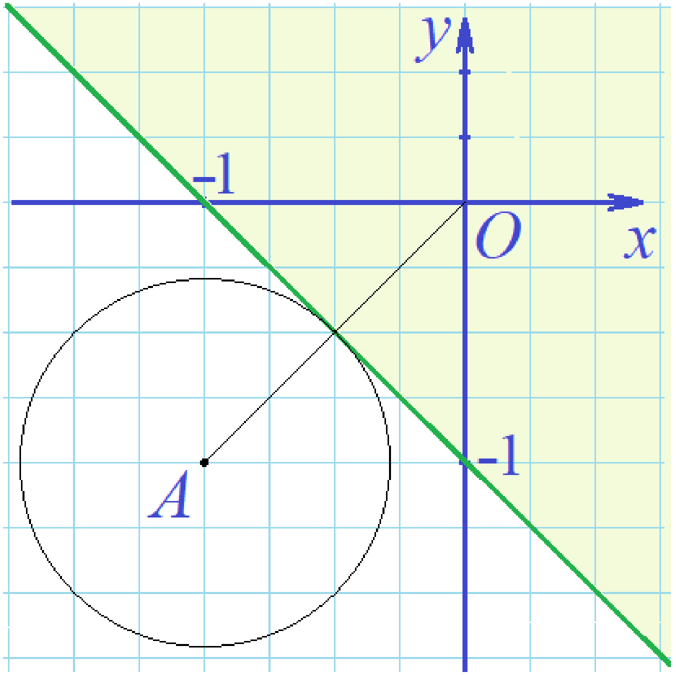
**1.** При каких значениях $a$ найдутся числа $x$ и $y$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2xy+a} = x+y+1\,. \qquad (1)$$

Перепишем уравнение (4) в виде:

$$2xy + a = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y,$$

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = a + 1. \qquad (5)$$




Итак, решениями уравнения (5) и равносильного ему на множестве всех пар $(x_0; y_0)$, для которых выполняется неравенство (2), уравнения (1) являются пары чисел $(x_0; y_0)$, изображаемые точками окружности с центром $(-1; -1)$ радиуса $\sqrt{a+1}$, $a \geq -1$.

Если радиус окружности $\sqrt{a+1}$ равен половине длины отрезка $AO$, то есть, если $\sqrt{a+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a = -0{,}5$, то решением является уравнения (1) пара чисел $(-0{,}5; -0{,}5)$.

## Повторение известных идей решения задач с параметром

**1.** При каких значениях *a* найдутся числа *x* и *y*, удовлетворяющие уравнению

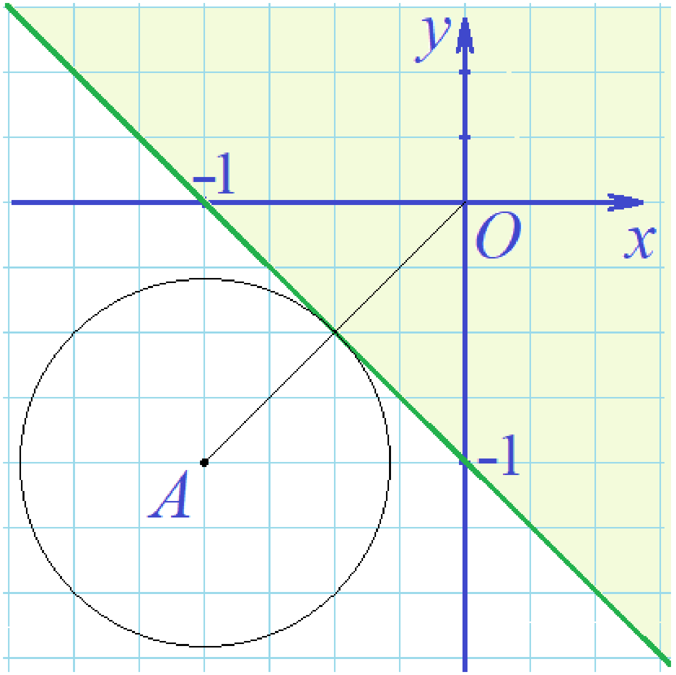
$$\sqrt{2xy + a} = x + y + 1 . \qquad (1)$$

Перепишем уравнение (4) в виде:

$$2xy + a = x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y ,$$

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = a + 1. \qquad (5)$$

Если радиус окружности $\sqrt{a+1}$ больше $\frac{\sqrt{2}}{2}$, решением уравнения (1) является любая пара чисел, изображаемая точками соответствующей части окружности, лежащими в закрашенной области.




**Ответ.** $a \geq -0{,}5$.


## Повторение известных идей решения задач с параметром

**2.** Найти все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$(2x^2 - 2x + 3a^2 + 2)^2 = 24a^2(x^2 - x + 1) \qquad (1)$$

имеет ровно один корень (вариант 25).

Выполнив замену неизвестного $t = x^2 - x + 1$, перепишем уравнение (1):

$$(2t + 3a^2)^2 - 24a^2t = 0.$$

После преобразования получим:

$$(2t - 3a^2)^2 = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) имеет единственный корень $t = 1{,}5a^2$.

Уравнение $x^2 - x + 1 = 1{,}5a^2$ имеет единственный корень, если $a^2 = \frac{1}{2}$, то есть если $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Итак, уравнение (1) имеет ровно один корень, если $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Ответ.** $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

## Повторение известных идей решения задач с параметром


**3.** Найти все значения $a$, при каждом из которых уравнение

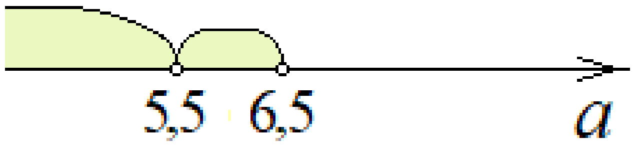
$$\log_{6,5-a}(x^2+3) = \log_{6,5-a}\big((a-8)x+2\big) \qquad (1)$$

имеет ровно два различных корня (вариант 20).

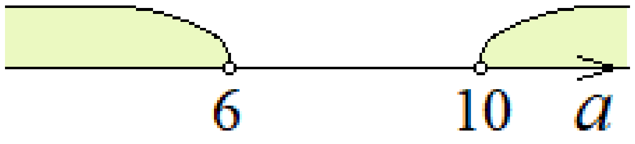
Для каждого $a$, такого, что

$$6{,}5 - a > 0 \text{ и } 6{,}5 - a \neq 1 \qquad (2)$$

уравнение (1) равносильно уравнению, обе части которого положительны:




$$x^2 + 3 = (a-8)x + 2,$$
$$x^2 - (a-8)x + 1 = 0.$$




Уравнение имеет два различных корня лишь при условии

$$D = (a-8)^2 - 4 = (a-6)(a-10) > 0.$$

Все решения этого неравенства, удовлетворяющие условиям (2), составляют множество $(-\infty; 5{,}5) \cup (5{,}5; 6)$. Для каждого а из этого множества уравнение (1) имеет ровно два различных корня.

**Ответ.** $(-\infty; 5{,}5) \cup (5{,}5; 6)$.

## 5*. Задачи с параметром. Использование чётности функций

**Пример 1.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение

$$x^4 - 3ax^2 - 9a + 3a^2 = 0 \qquad (1)$$

имеет ровно три корня.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^4 - 3x^2 - 9a + 3a^2$. Для каждого значения $a$ она определена на множестве $\boldsymbol{R}$. Эта функция чётная, так как для любого $x$ из её области определения справедливо равенство $f(-x) = f(x)$.

Поэтому если число $x_0$ — корень уравнения (1), то число $-x_0$ — тоже корень этого уравнения. Уравнение (1) имеет ровно три корня, тогда и только тогда, когда оно имеет корень $x_0 = 0$ и ещё два отличных от нуля корня, отличающихся знаками. Найдём все значения $a$, при каждом из которых число нуль является корнем уравнения (1).

Подставив $x = 0$ в уравнение (1), получим, что это возможно только в двух случаях: при $a = 0$ и при $a = 3$. Итак, при $a = 0$ и при $a = 3$ уравнение (1) имеет корень $x_0 = 0$.

## 5*. Задачи с параметром. Использование чётности функций

**Пример 1.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение

$$x^4 - 3ax^2 - 9a + 3a^2 = 0 \qquad (1)$$

имеет ровно три корня.

… При $a = 0$ уравнение (1) имеет вид $x^4 = 0$. Это уравнение имеет только один корень $x_0 = 0$.

При $a = 3$ уравнение (1) имеет вид $x^4 - 9x^2 = 0$. Это уравнение имеет ровно три корня: $x_0 = 0$, $x_1 = 3$ и $x_2 = -3$.

Следовательно, только при $a = 3$ уравнение (1) имеет ровно три корня.

**Ответ.** $a = 3$.

## 5*. Задачи с параметром. Использование чётности функций

**Пример 2.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение

$$\frac{ax-1}{x+2a}+\frac{ax+1}{x-2a}=1 \qquad (2)$$

имеет ровно один корень.

При $a = 0$ уравнение (2) не имеет корней. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{ax-1}{x+2a}+\frac{ax+1}{x-2a}$. Для каждого значения $a \neq 0$ она определена на множестве всех $x$, кроме $x = 2a$ и $x = -2a$. Эта функция чётная, так как для любого $x$ из её области определения справедливо равенство

$$f(-x)=\frac{-ax-1}{-x+2a}+\frac{-ax+1}{-x-2a}=\frac{ax+1}{x-2a}+\frac{ax-1}{x+2a}=f(x).$$

Поэтому если число $x_0$ — корень уравнения (2), то и число $-x_0$ — тоже корень этого уравнения. Уравнение (2) имеет ровно один корень тогда и только тогда, когда этот корень равен нулю и нет других корней. Найдём все значения $a$, при каждом из которых число 0 является корнем уравнения (2). Подставив $x = 0$ в это уравнение, получим, что $a = -1$.

## 5*. Задачи с параметром. Использование чётности функций

**Пример 2.** Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

$$\frac{ax-1}{x+2a}+\frac{ax+1}{x-2a}=1 \qquad (2)$$

имеет ровно один корень.

… Итак, при $a = –1$ уравнение (2) имеет корень $x_0 = 0$. Проверим, не имеет ли оно других корней при $a = –1$.

Решив уравнение $\frac{-x-1}{x-2}+\frac{-x+1}{x+2}=1$, убедимся, что при $a = –1$ уравнение (2) действительно имеет единственный корень ($x = 0$).

**Ответ.** $a = –1$.

## 5*. Задачи с параметром. Использование чётности функций

**Пример 3.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - (3a + 1)|x| + 2a^2 + 2a = 0 \qquad (3)$$

имеет ровно четыре корня.

Функция $f(x) = x^2 - (3a + 1)|x| + 2a^2 + 2a$ определена для каждого значения $a$. Она чётная, так как $f(-x) = f(x)$ для любого действительного значения $x$. Поэтому уравнение (3) имеет ровно четыре корня, тогда и только тогда, когда уравнение

$$t^2 - (3a + 1)t + 2a^2 + 2a = 0 \qquad (4)$$

имеет два различных положительных корня $t_1$ и $t_2$ (в этом случае уравнение (3) будет иметь четыре корня: $x_1$, $x_2$, $-x_1$ и $-x_2$).

Уравнение (4) имеет два различных положительных корня $t_1$ и $t_2$ тогда и только тогда, когда выполнены три условия: дискриминант $D$ уравнения (4) положителен и сумма $t_1 + t_2$, и произведение $t_1 t_2$ корней уравнения (4) положительны.

## 5*. Задачи с параметром. Использование чётности функций

**Пример 3.** Найти все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - (3a + 1)|x| + 2a^2 + 2a = 0 \qquad (3)$$

имеет ровно четыре корня.

… Эти три условия означают, что искомые значения — это только те $a$, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (3a+1)^2 - 4(2a^2+2a) > 0 \\ 3a + 1 > 0 \\ 2a^2 + 2a > 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Решениями системы неравенств (5) являются все $a$ из множества: $(0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Значит, для каждого из этих значений $a$ уравнение (3) имеет ровно четыре корня.

**Ответ.** $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

## 5*. Задачи с параметром. Использование чётности функций

**Пример 4.** Найти, все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение

$$5 \cdot 25^{|x|} - (1 + 25a) \cdot 5^{|x|} + 5a = 0 \qquad (6)$$

имеет ровно два корня.

Функция $f(x) = 5 \cdot 25^{|x|} - (1 + 25a) \cdot 5^{|x|} + 5a$ определена на множестве $\boldsymbol{R}$ для каждого значения $a$. Она чётная, так как $f(-x) = f(x)$ для любого действительного значения $x$.

Поэтому если число $x_0$ — корень уравнения (6), то число $-x_0$ — тоже корень этого уравнения. Обозначим $t = 5^{|x|}$. Тогда уравнение (6) перепишется в виде

$$5t^2 - (1 + 25a)t + 5a = 0. \qquad (7)$$

Уравнение (7) имеет два корня: $t_1 = 0{,}2$ и $t_2 = 5a$.

Уравнение $5^{|x|} = 0{,}2$ корней не имеет. Уравнение $5^{|x|} = 5a$ имеет два различных корня тогда и только тогда, когда $5a > 1$, т. е. при каждом $a > 0{,}2$.

Следовательно, уравнение (6) имеет ровно два корня только при каждом $a > 0{,}2$.

**Ответ.** $a > 0{,}2$.

## ЕГЭ-2021. Использование чётности функций


**18.1.** Найдите все положительные значения параметра $a$, при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \leq \frac{a + x^2 + 2\log_5(a^2 - 4a + 5)}{30\sqrt{17x^4 + 5x^2} + a + 1 + \log_{\frac{2}{5}}(a^2 - 4a + 5)} \qquad (1)$$

состоит из одной точки [лучше: одного числа]. Найдите это решение.

Функция $f(x) = \dfrac{a + x^2 + 2\log_5(a^2 - 4a + 5)}{30\sqrt{17x^4 + 5x^2} + a + 1 + \log_{\frac{2}{5}}(a^2 - 4a + 5)}$ определена на множестве $\boldsymbol{R}$ для каждого значения $a$. Она чётная, т. к. $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$.

Поэтому если число $x_0$ — решение неравенства (1), то число $-x_0$ — тоже решение этого неравенства. Поэтому неравенство (1) имеет единственное решение лишь в случае, если это решение $x = 0$. Найдём все положительные значения параметра $a$, при каждом из которых верно неравенство $\dfrac{a + 2\log_5(a^2 - 4a + 5)}{a + 1 + \log_{\frac{2}{5}}(a^2 - 4a + 5)} \geq 1$.

Перепишем его в виде

## ЕГЭ-2021. Использование чётности функций

**18.1.** Найдите все положительные значения параметра $a$, при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \le \frac{a + x^2 + 2\log_5(a^2 - 4a + 5)}{30\sqrt{17x^4 + 5x^2} + a + 1 + \log_{\frac{2}{5}}(a^2 - 4a + 5)} \qquad (1)$$

состоит из одной точки [лучше: одного числа]. Найдите это решение.

…

$$\frac{\left(\log_5(a^2 - 4a + 5) - 1\right)^2}{a + 1 + \log_{\frac{2}{5}}(a^2 - 4a + 5)} \le 0. \qquad (2)$$

Так как $a > 0$, то неравенство (2) выполняется лишь при условии

$$a^2 - 4a + 5 = 5,$$

то есть если $a = 4$.

При $a = 4$ неравенство (1) имеет вид: $1 \le \frac{x^2 + 6}{30\sqrt{17x^4 + 5x^2} + 6}$, оно действительно имеет единственное решение $x = 0$.

**Ответ.** $x = 0$ при $a = 4$.

## ЕГЭ-2021. Множество значений функции

**18.2.** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых множество значений функции $y = \frac{\sin x + a}{\cos 2x - 2}$ содержит число 2.

Требуется найти все значения параметра $a$, для каждого из которых уравнение

$$\frac{\sin x + a}{\cos 2x - 2} = 2 \qquad (1)$$

имеет хотя бы один корень. Обозначим $t = \sin x$, $-1 \le t \le 1$. Учитывая, что знаменатель дроби не обращается в нуль, перепишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{t + a}{-2t^2 - 1} = 2,$$

$$4t^2 + t + a + 2 = 0. \qquad (2)$$

Рассмотрим функцию $a\ (t) = -4t^2 - t - 2$, её график в системе координат $tOa$ — парабола с вершиной $-\frac{1}{8}$, ветви которой направлены вниз.

## ЕГЭ-2021. Множество значений функции

**18.2.** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых множество значений функции $y = \frac{\sin x + a}{\cos 2x - 2}$ содержит число 2.

…Найдём все значения $a$, каждому из которых соответствует хотя бы одно число $t$ из отрезка [–1; 1], такое, что пара чисел ($t$; $a$) обращает уравнение (2) в верное числовое равенство. Другими словами, найдём множество значений функции $a\ (t)$ на отрезке [–1; 1].

$a\ (-1) = -5$, $a\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{31}{16}$, $a\ (1) = -7$, значит, $-7 \le a \le -\frac{31}{16}$.

Итак, для каждого значения параметра $a$, такого, что $-7 \le a \le -\frac{31}{16}$, множество значений функции $y = \frac{\sin x + a}{\cos 2x - 2}$ содержит число 2.

**Ответ.** $-7 \le a \le -\frac{31}{16}$.

## ЕГЭ-2021. Множество значений функции

**18.3.** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых множество значений функции $y = \dfrac{\sqrt{a} - 2\cos x + 1}{\sin^2 x + a + 2\sqrt{a} + 1}$ содержит отрезок [2; 3].

Обозначим $t = \cos x$, $-1 \le t \le 1$, $b = \sqrt{a} + 1$. Найдём все значения $b \ge 1$, при каждом из которых значения функции $f(t) = \dfrac{b - 2t}{-t^2 + b^2 + 1}$ на промежутке $-1 \le t \le 1$ содержат отрезок [2; 3]. Так как $-t^2 \ge -1$, а $b^2 + 1 \ge 2$, то при любом значении $b$ функция $f(t)$ определена и непрерывна в каждой точке отрезка [–1; 1] и

$$f'(t) = \frac{-2\left((t - 0{,}5b)^2 + 0{,}75b^2 + 1\right)}{(-t^2 + b^2 + 1)^2} < 0$$

в каждой точке отрезка [–1; 1]. Следовательно, функция $f(t)$ убывает на [–1; 1].

Чтобы отрезок [2; 3] входил в множество значений функции $f(t)$, должны выполняться два неравенства: $f(-1) \ge 3$ и $f(1) \le 2$.

## ЕГЭ-2021. Множество значений функции

**18.3.** Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых множество значений функции $y = \dfrac{\sqrt{a} - 2\cos x + 1}{\sin^2 x + a + 2\sqrt{a} + 1}$ содержит отрезок [2; 3].

…Решив систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{b+2}{b^2} \geq 3 \\ \dfrac{b-2}{b^2} \leq 2, \end{cases}$$

получим $-\frac{2}{3} \leq b \leq 1$. Но так как $b \geq 1$, то условиям задачи удовлетворяет лишь $b = 1$. Это означает, что условиям задачи удовлетворяет лишь $a = 0$.

**Ответ.** 0.

## ЕГЭ-2021. Уравнение окружности [4]

**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{4-y^2} = \sqrt{4-a^2x^2} \\ x^2+y^2 = 4x+2y \end{cases} \qquad (1)$$

имеет ровно два различных решения.

Сначала отметим, что при условии $|y| \le 2$ (*) система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} y = \pm ax \\ (x-2)^2+(y-1)^2 = 5. \end{cases} \qquad (2)$$

В системе координат $xOy$:

- все решения первого уравнения системы (2) изображаются точками $(x; y)$ пары прямых $y = ax$ и $y = -ax$, если $a \ne 0$, или одной прямой $y = 0$ (пара совпавших прямых), если $a = 0$;
- все решения второго уравнения системы (2) изображаются точками $(x; y)$ окружности с центром $A$ (2; 1) и радиусом $\sqrt{5}$.

## ЕГЭ-2021. Уравнение окружности [4]

**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

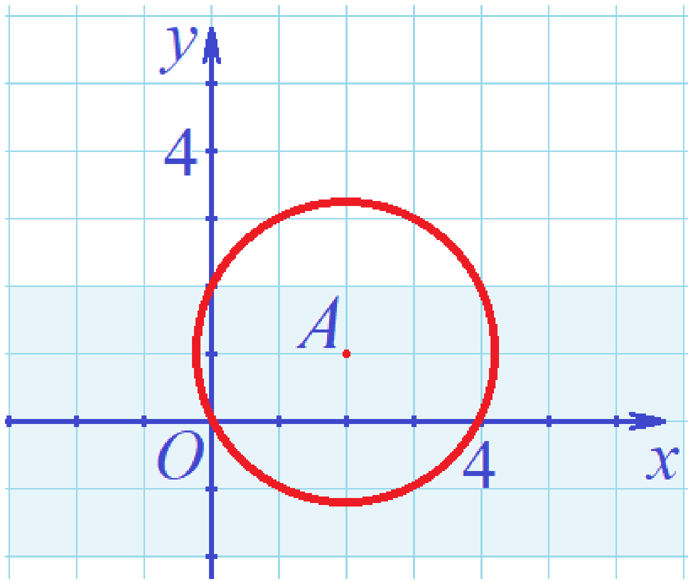
$$\begin{cases} \sqrt{4-y^2} = \sqrt{4-a^2x^2} \\ x^2+y^2 = 4x+2y \end{cases} \qquad (1)$$

имеет ровно два различных решения.

…Система (2) и равносильная ей при условии (*) система (1) имеют ровно два решения, если пара прямых пересекает окружность в двух различных точках, удовлетворяющих условию (*).

Изобразим в системе координат $xOy$ окружность с центром $A$ (2; 1) и радиусом $\sqrt{5}$, выделим для наглядности серую полосу точек, для которых выполнено условие (*).

Если $a = 0$, то пара совпадающих прямых пересекает окружность в двух точках, удовлетворяющих условию (*): (0; 0) и (4; 0). При $a = 0$ система (1) имеет два различных решения.



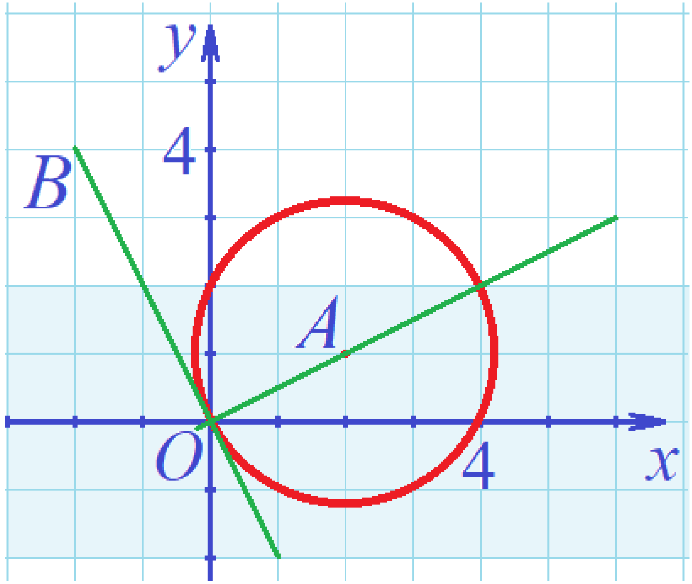
## ЕГЭ-2021. Уравнение окружности [4]

**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{4-y^2} = \sqrt{4-a^2x^2} \\ x^2+y^2 = 4x+2y \end{cases} \qquad (1)$$

имеет ровно два различных решения.

… Прямая $BO$ ($y = -2x$) перпендикулярна прямой $AO$ ($y = 0{,}5x$), содержащей радиус окружности, поэтому $BO$ — единственная касательная к окружности, проходящая через точку $O$.



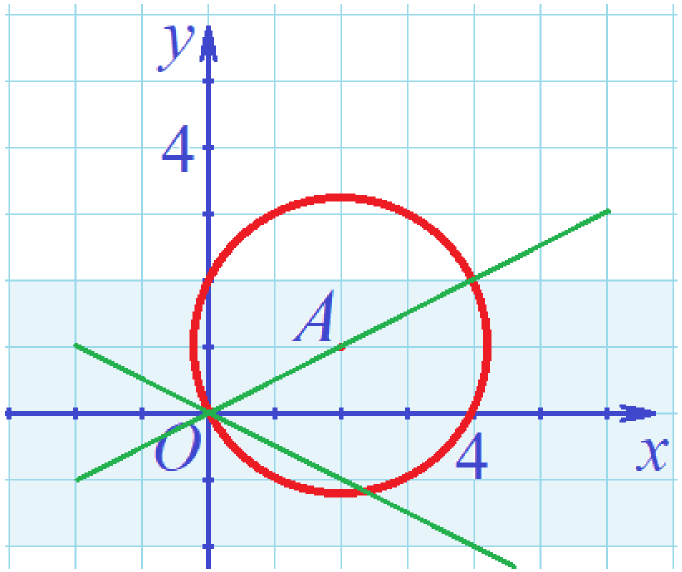
## ЕГЭ-2021. Уравнение окружности [4]

**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{4-y^2} = \sqrt{4-a^2x^2} \\ x^2 + y^2 = 4x + 2y \end{cases} \qquad (1)$$

имеет ровно два различных решения.

…Если $|a| \leq 0{,}5$, $a \neq 0$, то пара прямых пересекает окружность в трёх точках, и все они удовлетворяют условию (*). Такие значения $a$ не удовлетворяют условиям задачи, так как система имеет более двух решений.



## ЕГЭ-2021. Уравнение окружности [4]

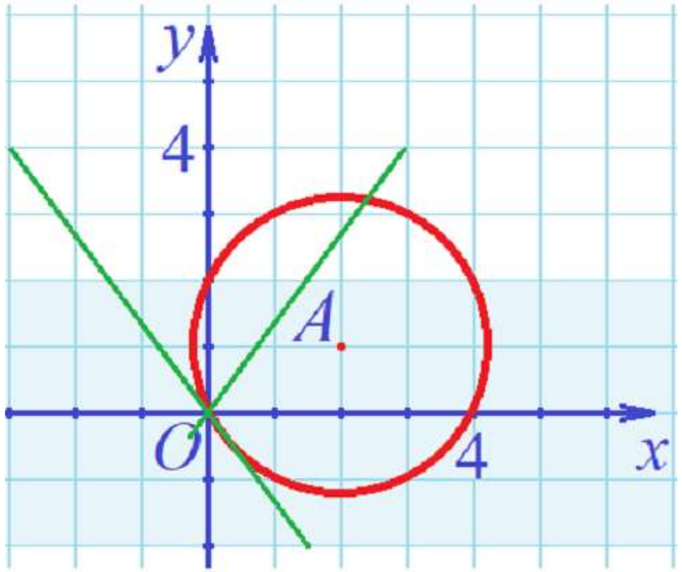
**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{4-y^2} = \sqrt{4-a^2x^2} \\ x^2+y^2 = 4x+2y \end{cases} \qquad (1)$$

имеет ровно два различных решения.

… Если $0{,}5 < |a| < 2$, то пара прямых пересекает окружность в трёх точках, две из которых удовлетворяют условию (*).

Система (1) имеет ровно два различных решения.



## ЕГЭ-2021. Уравнение окружности [4]

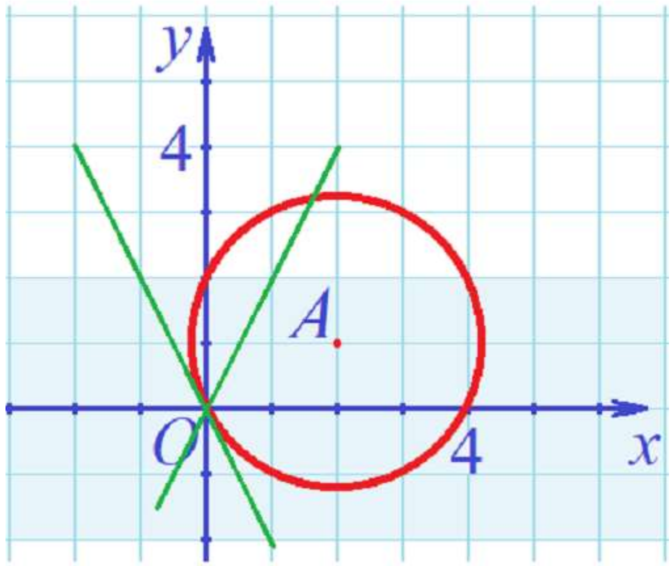
**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{4-y^2} = \sqrt{4-a^2x^2} \\ x^2+y^2 = 4x+2y \end{cases} \qquad (1)$$

имеет ровно два различных решения.

…Если $|a| = 2$, то пара прямых, одна из них касательная, пересекает окружность в двух точках, одна из которых не удовлетворяет условию (*).

Такие значения $a$ не удовлетворяют условиям задачи, так как система (1) имеет единственное решение.



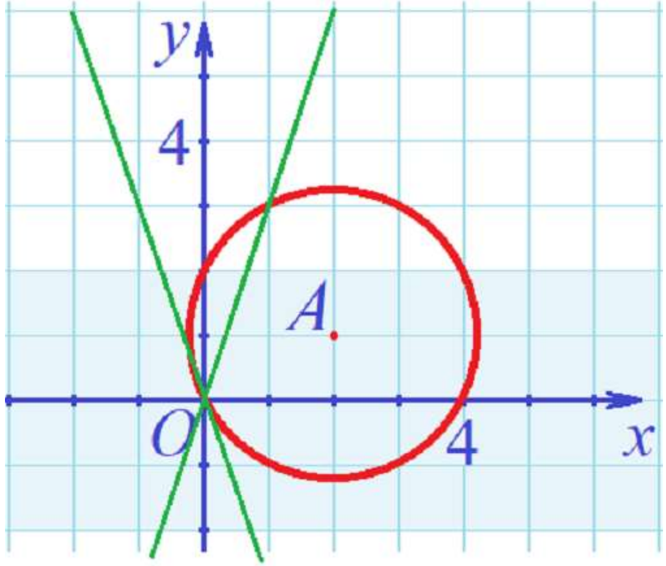
## ЕГЭ-2021. Уравнение окружности [4]

**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{4-y^2}=\sqrt{4-a^2x^2}\\ x^2+y^2=4x+2y\end{cases} \qquad (1)$$

имеет ровно два различных решения.

…Если $|a|>2$, то пара прямых пересекает окружность в трёх точках, две из которых удовлетворяют условию (*).




Система (1) имеет ровно два различных решения.

Итак, система (1) имеет ровно два различных решения при $a \in (-\infty;-2)\cup(-2;-0{,}5)\cup\{0\}\cup(0{,}5;2)\cup(2;+\infty)$.

**Ответ.** $a \in (-\infty;-2)\cup(-2;-0{,}5)\cup\{0\}\cup(0{,}5;2)\cup(2;+\infty)$.

## ЕГЭ-2021. Уравнение окружности [4]

**2.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 5^{\sqrt{a^2-x^2}} - 5^{\sqrt{a^2-y^2}} = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

имеет ровно два различных решения.

Отметим, что при условии $|x| \le |a|, |y| \le |a|$ (*) система (3) равносильна системе

$$\begin{cases} y = \pm x \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5. \end{cases} \qquad (4)$$

В системе координат $xOy$:

- все решения первого уравнения системы (4) изображаются точками ($x$; $y$) пары прямых $y = x$ и $y = -x$;
- все решения второго уравнения системы (4) изображаются точками ($x$; $y$) окружности с центром $A$ (–1; 2) и радиусом $\sqrt{5}$.

## ЕГЭ-2021. Уравнение окружности [4]

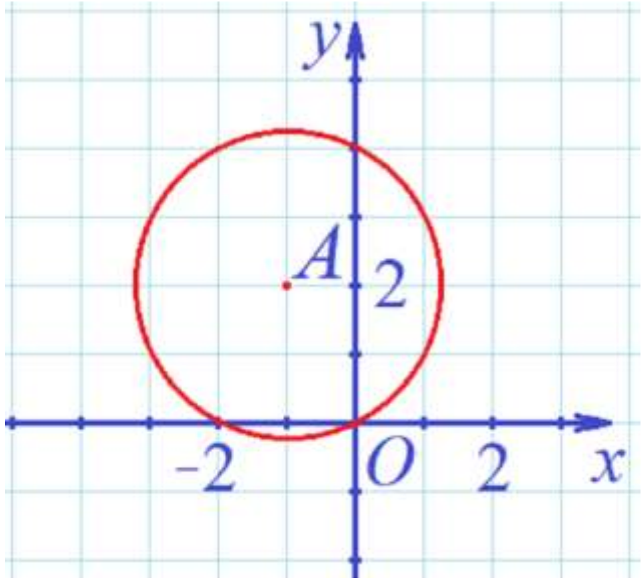
**2.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 5^{\sqrt{a^2-x^2}} - 5^{\sqrt{a^2-y^2}} = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

имеет ровно два различных решения.

… Система (4) и равносильная ей при условии (*) система (3) имеют ровно два решения, если пара прямых пересекает окружность в двух различных точках, удовлетворяющих условию (*).

Изобразим в системе координат $xOy$ окружность с центром $A$ (–1; 2) и радиусом $\sqrt{5}$.




Если $a$ = 0, то система (4) имеет единственное решение (0; 0). Это значение $a$ не удовлетворяет условиям задачи.

## ЕГЭ-2021. Уравнение окружности [4]

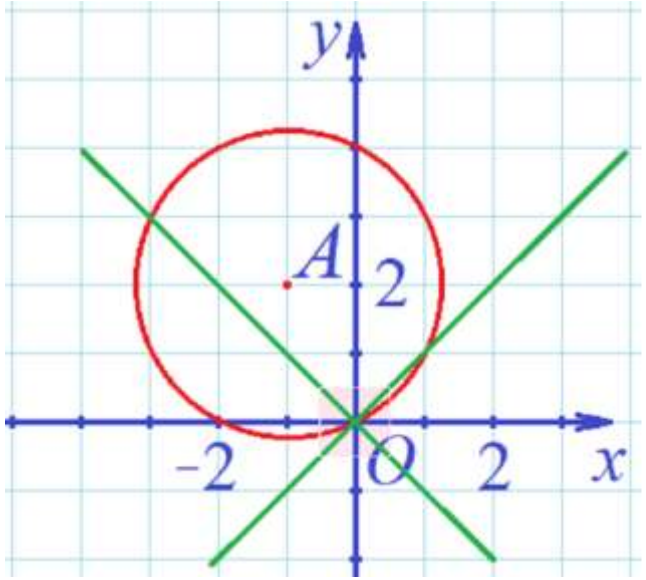
**2.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 5^{\sqrt{a^2-x^2}} - 5^{\sqrt{a^2-y^2}} = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

имеет ровно два различных решения.

… Если $|a| < 1$, $a \neq 0$, то пара прямых пересекает окружность в единственной точке, удовлетворяющей условию (*) — она попала в «окно возможностей»: $|x| \leq |a|$ и $|y| \leq |a|$.

Такие значения $a$ не удовлетворяют условиям задачи.



## ЕГЭ-2021. Уравнение окружности [4]

**2.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 5^{\sqrt{a^2-x^2}} - 5^{\sqrt{a^2-y^2}} = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

имеет ровно два различных решения.

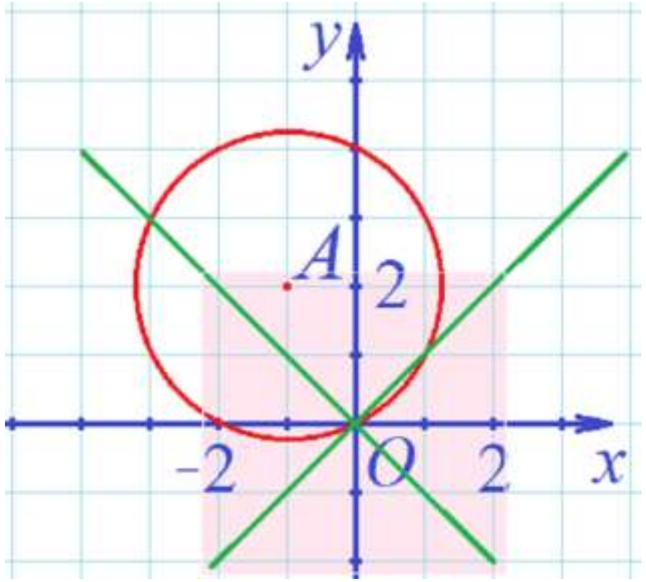
… Если $1 \leq |a| < 3$, то пара прямых пересекает окружность в двух точках, удовлетворяющих условию (*).

В этом случае система (1) имеет два различных решения.

Если же $|a| \geq 3$, то пара прямых пересекает окружность в трёх точках, удовлетворяющих условию (*). Такие значения $a$ не удовлетворяют условиям задачи.

Итак, система (3) имеет два различных решения при $a \in (-3; -1] \cup [1; 3)$.

**Ответ.** $a \in (-3; -1] \cup [1; 3)$.



## «Метод областей»

**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых неравенство

$$(x^2 - 2x + a - 3)(a + 1 - |x - 4|) \le 0 \qquad (1)$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[-2; 4]$.

1) Первый множитель равен 0, если $a = -x^2 + 2x + 3$. Рассмотрим функцию $A\,(x) = -(x-1)^2 + 4$. Изобразим график функции в системе координат $xOa$ (рис. 1). График разделил плоскость на две области. В верхней области $A\,(x) > 0$, в нижней $A\,(x) < 0$.

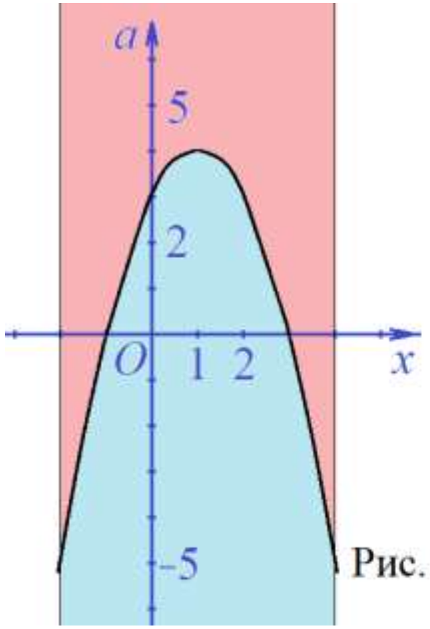


Рис. 1

## «Метод областей»

**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых неравенство

$$(x^2 - 2x + a - 3)(a + 1 - |x - 4|) \leq 0 \qquad (1)$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[-2; 4]$.

2) Второй множитель равен 0, если $a = |x - 4| - 1$. Рассмотрим функцию $B(x) = |x - 4| - 1$. Изобразим график функции в системе координат $xOa$ (рис. 2). График разделил плоскость на две области. В верхней области $B(x) > 0$, в нижней $B(x) < 0$.

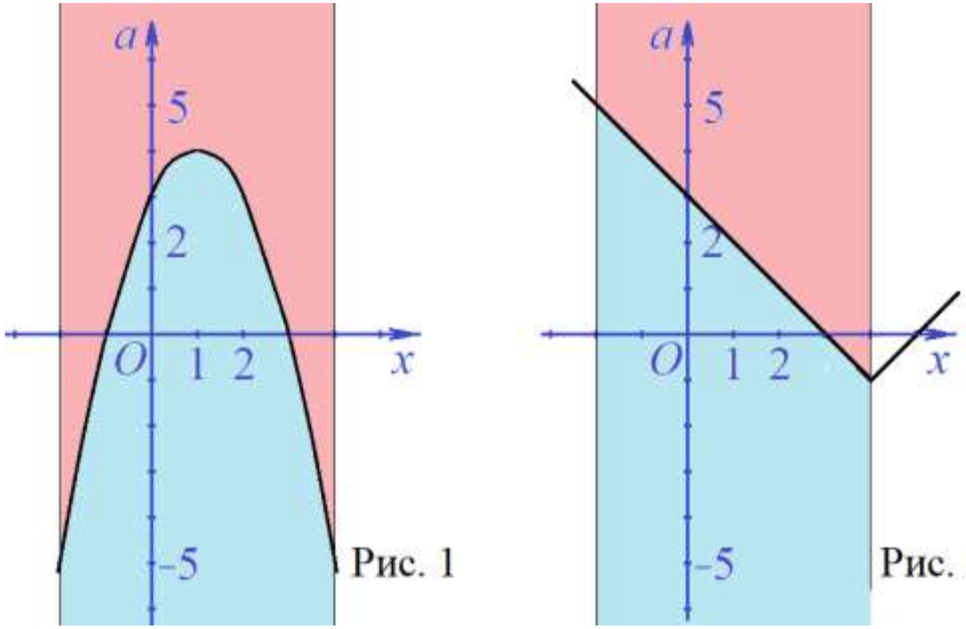



Рис. 1 Рис. 2

## «Метод областей»

**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых неравенство

$$(x^2 - 2x + a - 3)(a + 1 - |x - 4|) \leq 0 \qquad (1)$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[-2; 4]$.

3) Изобразим графики функций в одной системе координат. Голубым цветом выделены области, для точек $(x; a)$ которых выполняется неравенство (1).

При $a \in [-5; 5]$ неравенство (1) имеет хотя бы одно решение на отрезке $[-2; 4]$.

**Ответ.** $a \in [-5; 5]$.

**2.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых неравенство (1) имеет:

а) ровно одно решение;

б) ровно два решения

на отрезке $[-2; 4]$.

**Ответ.** а) 5; б) $-5$.

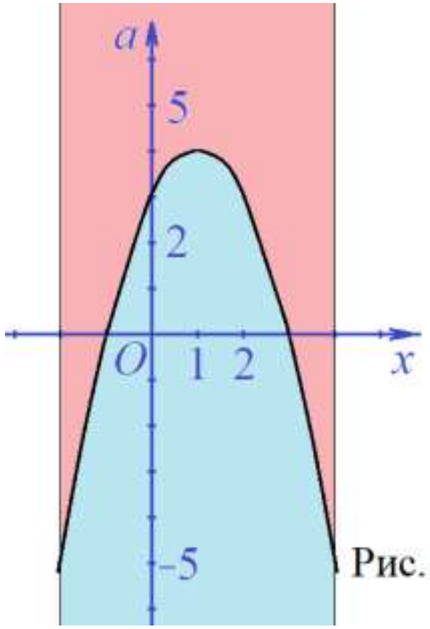


Рис. 1

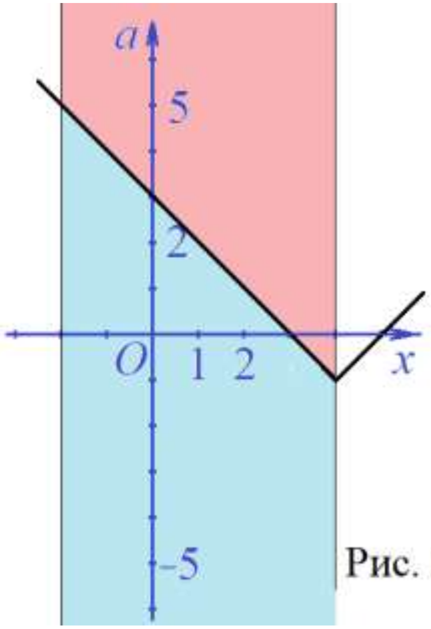


Рис. 2

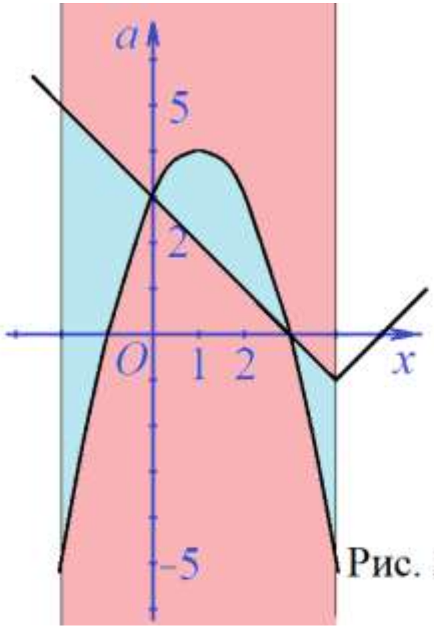


Рис. 3

## Графический метод против «метода областей» [2], [5]

**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$|\log_5 x^2 - a| - |\log_5 x + 2a| = (\log_5 x)^2 \qquad (1)$$

имеет ровно четыре решения.

Любое решение уравнения (1) удовлетворяет условию $x > 0$. Так как функция $\log_5 x$ —возрастающая, то каждому значению $x > 0$ соответствует единственное значение $t = \log_5 x$, при этом разным значениям $x$ соответствуют разные значения $t$. Поэтому уравнение (1) имеет ровно 4 решения (лучше бы говорить «корня»), если уравнение

$$|2t - a| - |t + 2a| = t^2 \qquad (2)$$

имеет ровно четыре корня. Модули обращаются в нуль в точках $t_1 = 0{,}5a$ и $t_2 = -2a$. Возможны три случая:
$t_1 = t_2$, $t_1 > t_2$ и $t_1 < t_2$ — при $a = 0$, $a > 0$ и $a < 0$ соответственно.


## Графический метод против «метода областей» [2], [5]

**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$|\log_5 x^2 - a| - |\log_5 x + 2a| = (\log_5 x)^2 \qquad (1)$$

имеет ровно четыре решения.

$$|2t - a| - |t + 2a| = t^2 \qquad (2)$$

1) Если $a = 0$, то уравнение (2) имеет вид: $|t| = t^2$, у него ровно 3 корня: –1, 0, 1. Это значение $a$ не удовлетворяет условиям задачи.

2) Если $a > 0$, то $0{,}5a > -2a$. При любом значении $a$ на каждом из промежутков $(-\infty;\ -2a)$, $[-2a;\ 0{,}5a]$ и $(0{,}5a;+\infty)$ функция $f(t) = |2t - a| - |t + 2a|$ имеет графиком часть прямой: на первом промежутке $y = -t + 3a$, на втором $y = -3t - a$, на третьем $y = t - 3a$. Чтобы не запутаться с раскрытием модулей, можно сделать рисунок 1. Первый модуль раскрываем со знаком «–» на первых двух промежутках, со знаком «+» — на третьем; второй модуль раскрываем со знаком «–» на первом промежутке, со знаком «+» — на втором и третьем.

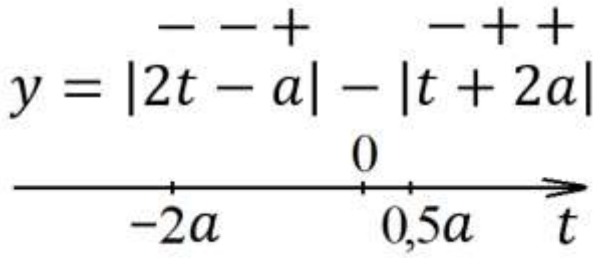



Рис. 1

## Графический метод против «метода областей» [2], [5]

**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$|\log_5 x^2 - a| - |\log_5 x + 2a| = (\log_5 x)^2 \qquad (1)$$

имеет ровно четыре решения.

$$|2t - a| - |t + 2a| = t^2 \qquad (2)$$

Учитывая угловые коэффициенты прямых –1, –3 и 1 (на промежутках) и что точка 0,5$a$ расположена ближе к вершине параболы, чем точка –2$a$, четыре точки пересечения параболы с графиком функции $y = f(t)$ можно получить, если прямая $y = t - 3a$ пересекает параболу в двух точках. Это возможно лишь тогда, когда уравнение $t^2 = t - 3a$ имеет два корня, т. е. когда уравнение $t^2 - t + 3a = 0$ имеет положительный дискриминант, т. е. при $0 < a < \frac{1}{12}$. При этом правое звено ломаной пересекает параболу в двух точках, среднее звено — в одной точке, так как $f(0{,}5a) < 0$, а $f(-2a) > (-2a)^2 > 0$, левое звено — в четвёртой точке. Следовательно, при $0 < a < \frac{1}{12}$ уравнение (1) имеет ровно четыре корня.

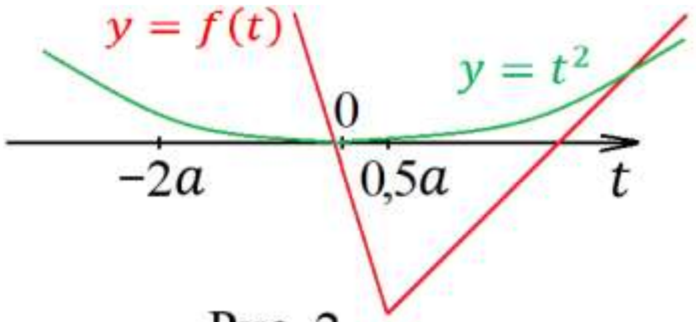


Рис. 2

## Графический метод против «метода областей» [2], [5]

**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$|\log_5 x^2 - a| - |\log_5 x + 2a| = (\log_5 x)^2 \qquad (1)$$

имеет ровно четыре решения.

$$|2t - a| - |t + 2a| = t^2 \qquad (2)$$

3) Если $a < 0$, то $0{,}5a < -2a$. При любом значении $a$ на каждом из промежутков $(-\infty;\ 0{,}5a)$, $[0{,}5a;\ -2a]$ и $(-2a; +\infty)$ функция $f(t) = |2t - a| - |t + 2a|$ имеет графиком часть прямой: на первом промежутке $y = -t + 3a$, на втором $y = 3t + a$, на третьем $y = t - 3a$ (см. рис. 3).

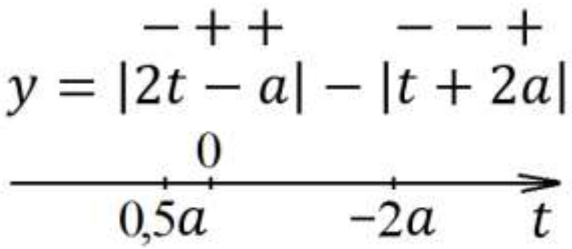


Рис. 3

## Графический метод против «метода областей» [2], [5]

**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$|\log_5 x^2 - a| - |\log_5 x + 2a| = (\log_5 x)^2 \qquad (1)$$

имеет ровно четыре решения.

$$|2t - a| - |t + 2a| = t^2 \qquad (2)$$

Учитывая угловые коэффициенты прямых –1, 3 и 1 (на промежутках) и что точка 0,5$a$ расположена ближе к вершине параболы, чем точка –2$a$, четыре точки пересечения параболы с графиком функции $y = f(t)$ можно получить, если прямая $y = -t + 3a$ пересекает параболу в двух точках. Это возможно лишь тогда, когда уравнение $t^2 = -t + 3a$ имеет два корня, т. е. при $-\frac{1}{12} < a < 0$.

При этом три звена ломаной также пересекают параболу в четырёх точках. Следовательно, при $-\frac{1}{12} < a < 0$ уравнение (1) имеет ровно четыре корня.

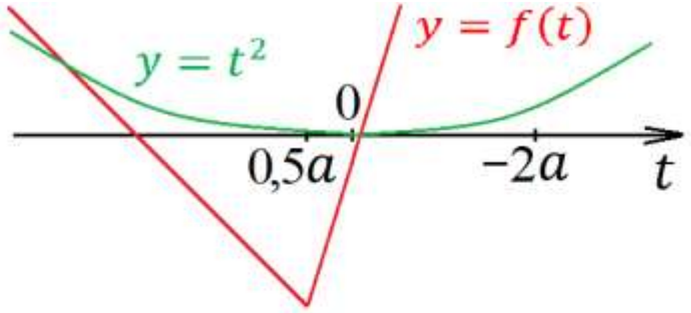


Рис. 4

**Ответ.** $\left(-\frac{1}{12};\ 0\right) \cup \left(0;\ \frac{1}{12}\right)$.

## Графический метод против «метода областей» [2], [5]

**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$|\log_5 x^2 - a| - |\log_5 x + 2a| = (\log_5 x)^2 \qquad (1)$$

имеет ровно четыре решения.

*Замечание.* Симметричность ответа подсказывает, что решение задачи можно упростить. Если рассматривать уравнение $|2t - a| - |t + 2a| = t^2$ как уравнение с двумя неизвестными $t$ и $a$, то можно заметить вместе с любым решением $(t_0; a_0)$ это уравнение имеет и решение $(-t_0; -a_0)$, так как из истинности равенства

$$|2t_0 - a_0| - |t_0 + 2a_0| = t_0^2$$

следует истинности равенства

$$|-2t_0 + a_0| - |-t_0 - 2a_0| = (-t)_0^2.$$

Это означает, что если уравнение (1) имеет ровно четыре решения для каждого $a$, такого, что $0 < a < \frac{1}{12}$, то оно имеет ровно четыре решения для каждого $a$, такого, что $-\frac{1}{12} < a < 0$.

## Графический метод против «метода областей» [2], [5]

**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$|\log_5 x^2 - a| - |\log_5 x + 2a| = (\log_5 x)^2 \qquad (1)$$

имеет ровно четыре решения.

$$|2t - a| - |t + 2a| = t^2 \qquad (2)$$

Это не новая задача, её решение «методом $xOa$» я привёл в книге [5], задача 64. Выполнив ту же замену неизвестного $t = \log_5 x$, перепишем уравнение (1) в виде (2).

Так как каждому значению $t$ соответствует единственный корень уравнения $t = \log_5 x$, то осталось найти все значения $a$, при каждом из которых уравнение (2) имеет четыре корня.

## Графический метод против «метода областей» [2], [5]

**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$|\log_5 x^2 - a| - |\log_5 x + 2a| = (\log_5 x)^2 \qquad (1)$$

имеет ровно четыре решения.

$$|2t - a| - |t + 2a| = t^2 \qquad (2)$$

В координатной плоскости $tOa$ построим прямые $a = 2t$ и $a = -\frac{t}{2}$, они разбивают координатную плоскость на 4 области: I, II, III, IV (рис. 5).

В области I $|2t - a| = 2t - a$, $|t + 2a| = t + 2a$, поэтому уравнение (2) имеет вид $a = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3}t$.

В области II $|2t - a| = 2t - a$, $|t + 2a| = -t - 2a$, поэтому уравнение (2) имеет вид $a = t^2 - 3t$.

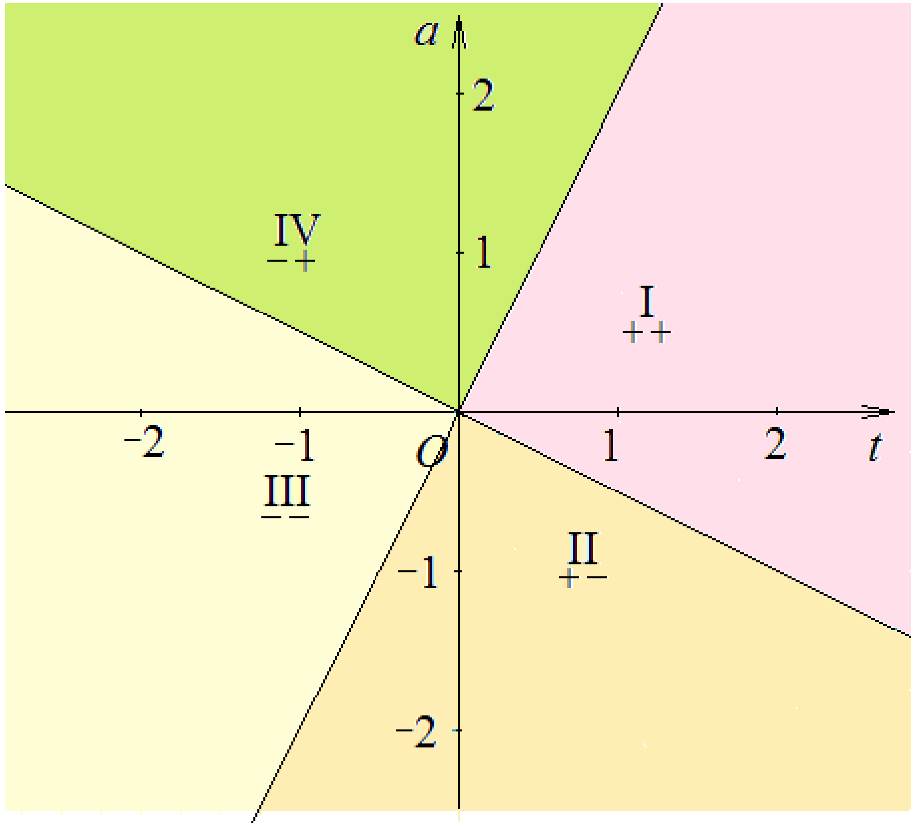



Рис. 5

## Графический метод против «метода областей» [2], [5]

**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$|\log_5 x^2 - a| - |\log_5 x + 2a| = (\log_5 x)^2 \qquad (1)$$

имеет ровно четыре решения.

$$|2t - a| - |t + 2a| = t^2 \qquad (2)$$

В области III $|2t - a| = -2t + a$, $|t + 2a| = -t - 2a$, поэтому уравнение (2) имеет вид $a = \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3}t$.

В области IV $|2t - a| = -2t + a$, $|t + 2a| = t + 2a$, поэтому уравнение (2) имеет вид $a = -t^2 - 3t$.

Построив в областях I – IV части парабол с вершинами $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{12}\right)$, $\left(\frac{3}{2}; -\frac{9}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{12}\right)$, $\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$ соответственно, получим «восьмёрку» — множество всех точек $(t; a)$, координаты которых обращают уравнение (2) в верное числовое равенство (рис. 6).

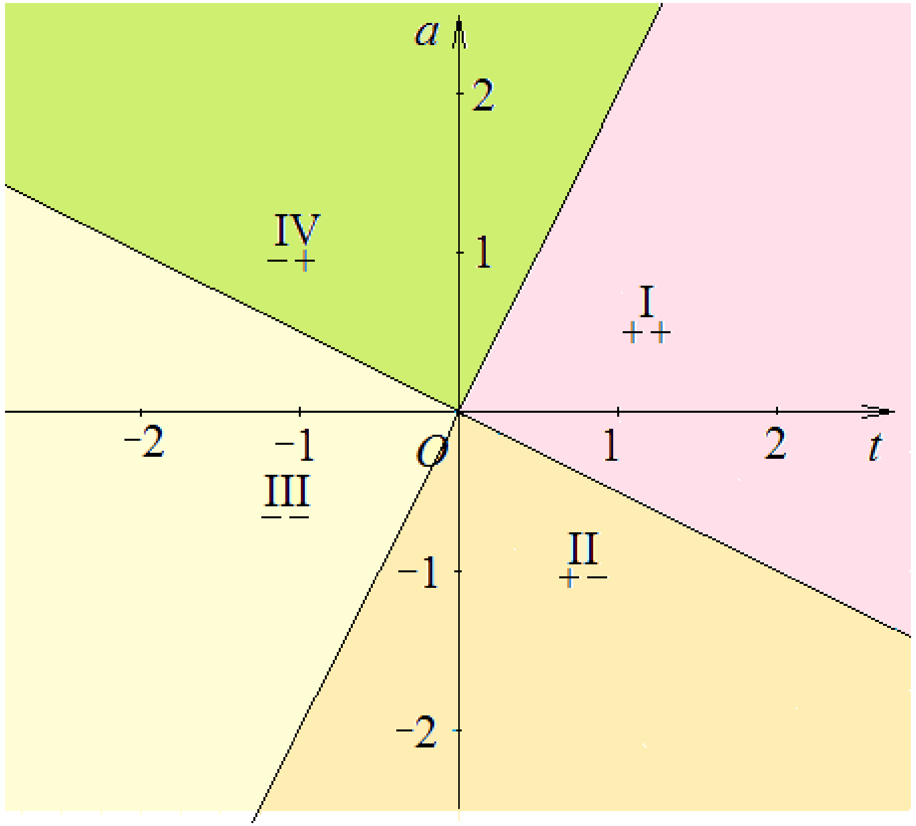


Рис. 5

## Графический метод против «метода областей» [2], [5]

**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$|\log_5 x^2 - a| - |\log_5 x + 2a| = (\log_5 x)^2 \qquad (1)$$

имеет ровно четыре решения.

$$|2t - a| - |t + 2a| = t^2 \qquad (2)$$

Уравнение (2), а значит, и уравнение (1) имеют

- ровно четыре корня, если $a \in \left(-\frac{1}{12}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{12}\right)$,
- ровно три корня, если $a = 0$ или $a = \pm\frac{1}{12}$,
- единственный корень, если $a = \pm\frac{9}{4}$,
- ровно два корня, если $-\frac{9}{4} < a < -\frac{1}{12}$ или $\frac{1}{12} < a < \frac{9}{4}$,
- 0 корней, если $a < -\frac{9}{4}$ или $a > \frac{9}{4}$.

**Ответ.** $\left(-\frac{1}{12}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{12}\right)$.

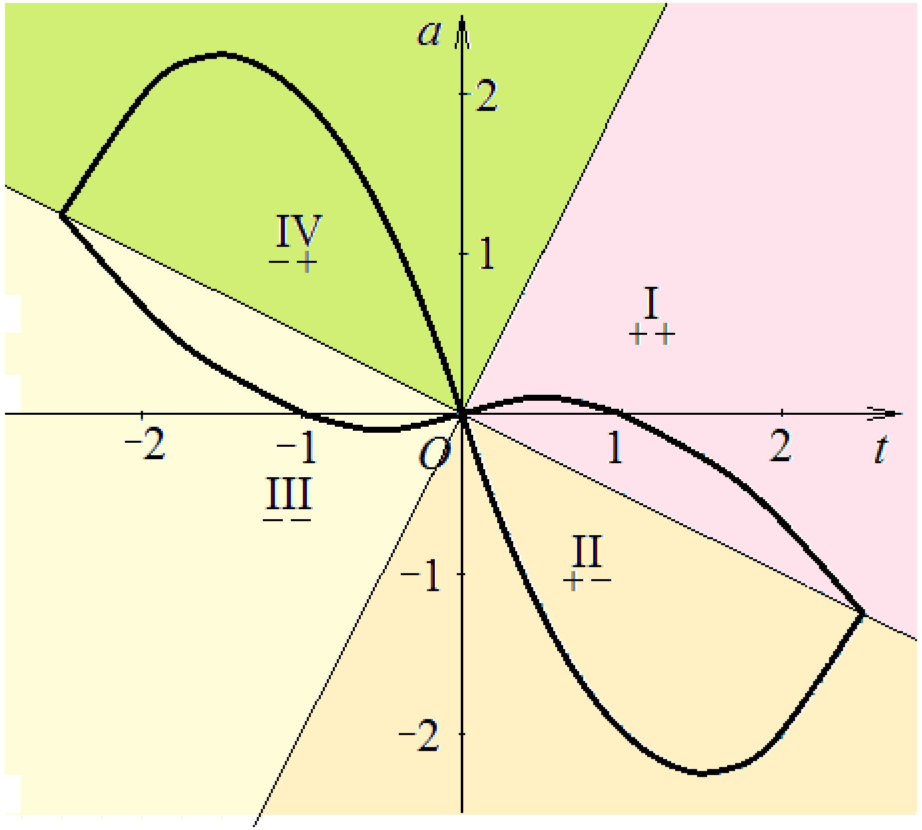


Рис. 6

## Графический метод против «метода областей» [2], [5]

**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$|\log_5 x^2 - a| - |\log_5 x + 2a| = (\log_5 x)^2 \qquad (1)$$

имеет ровно четыре решения.

Из замечания, приведённого выше, следует, что при решении этой задачи достаточно было построить параболы в областях I и II, затем построить им симметричные относительно начала координат параболы в областях III и IV.

В решении примера 3 мы применим приём рассуждения, описанный в замечании.

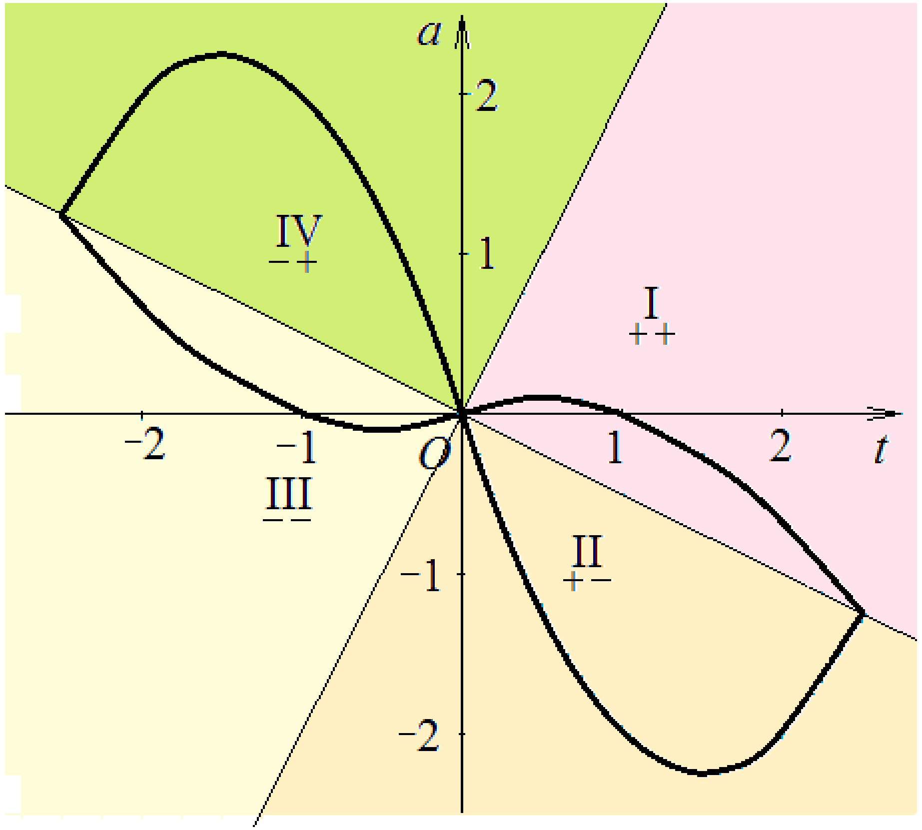



Рис. 6

## Графический метод против «метода областей» [2], [5]

**2.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$|\log_5 x^2 - a| - |\log_5 x + 2a| = (\log_5 x)^2 \qquad (1)$$

хотя бы один корень, меньший 2.

Выполнив ту же замену неизвестного $t = \log_{0,5} x$, перепишем уравнение (1) в виде

$$|2t - a| - |t + 2a| = t^2 \qquad (2)$$

Чтобы уравнение (1) имело корень, меньший 2 ($0 < x < 2$), должно выполняться условие: $t = \log_{0,5} x > \log_{0,5} 2 = -1$. Далее повторится решение предыдущей задачи, только теперь требуется найти все значения параметра $a$, при каждом из которых для корня уравнения (2) выполняется неравенство $t > -1$.

Искомые значения параметра составляют промежуток $-\frac{9}{4} \le a < 2$.

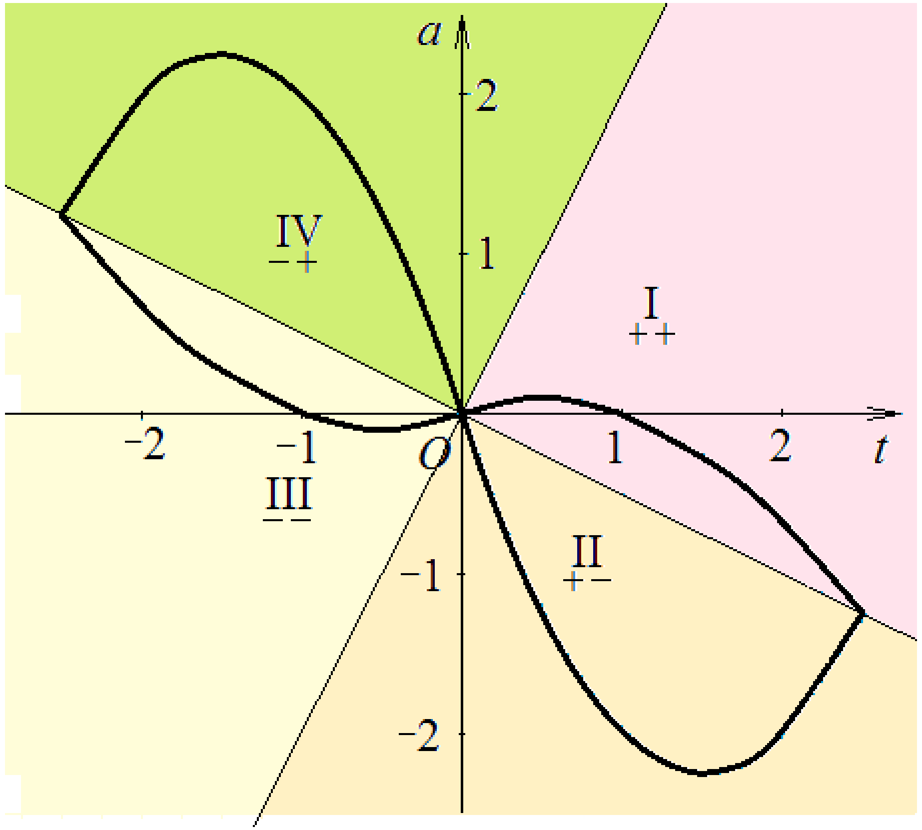



Рис. 6

## Ещё раз «метод областей»

**3.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + a^2 = |2x - a| + |2x + a| \qquad (1)$$

имеет ровно четыре корня.

Если рассматривать уравнение (1) как уравнение с двумя неизвестными $x$ и $a$, то можно заметить вместе с любым решением $(x_0; a_0)$ это уравнение имеет и решение $(-x_0; -a_0)$, так как из истинности равенства

$$x_0^2 + a_0^2 = |2x_0 - a_0| + |2t_0 + a_0|$$

следует истинности равенства

$$(-x)_0^2 + (-a)_0^2 = |-2x_0 + a_0| + |-2t_0 - a_0|.$$

В координатной плоскости $xOa$ построим прямые $a = 2x$ и $a = -2x$, они разбивают координатную плоскость на 4 области: I, II, III, IV.

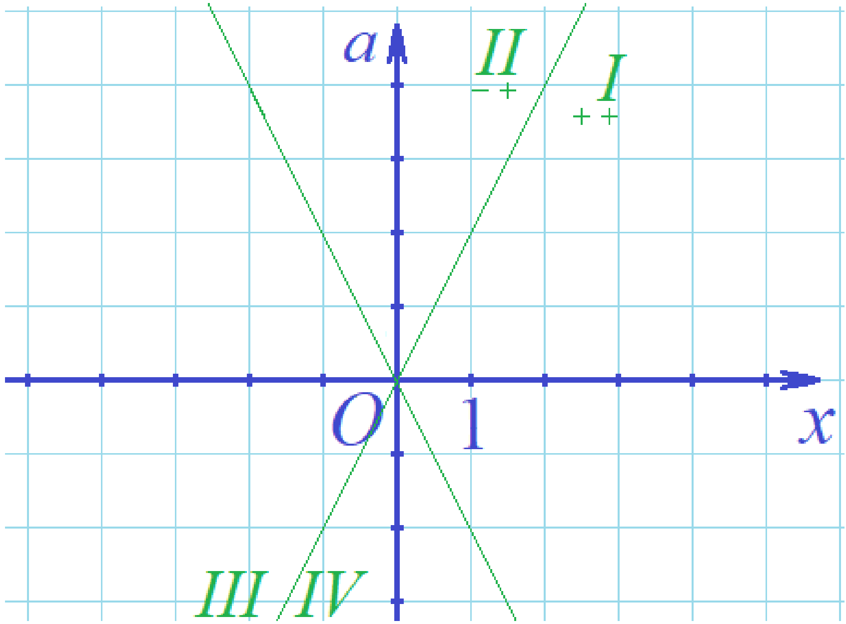
## Ещё раз «метод областей»

**3.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + a^2 = |2x - a| + |2x + a| + 1 \qquad (1)$$

имеет ровно четыре корня.

…В области *I* уравнение (1) имеет вид $x^2 + a^2 = 2x - a + 2x + a + 1$, его перепишем в виде $(x-2)^2 + a^2 = 5$. Строим часть окружности с центром (2; 0), радиусом $\sqrt{5}$ в области *I*.



## Ещё раз «метод областей»

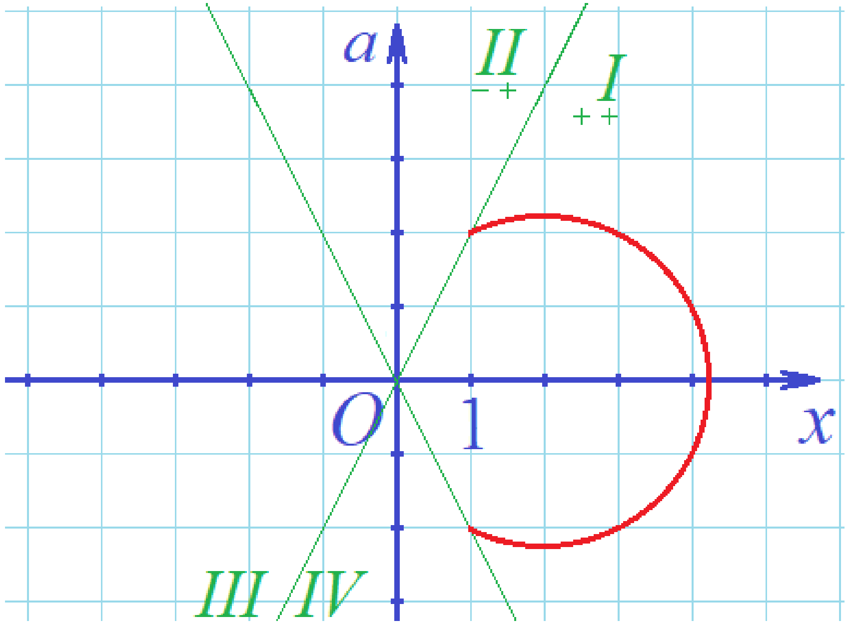
**3.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + a^2 = |2x - a| + |2x + a| + 1 \qquad (1)$$

имеет ровно четыре корня.

…В области *I* уравнение (1) имеет вид $x^2 + a^2 = 2x - a + 2x + a + 1$, его перепишем в виде $(x-2)^2 + a^2 = 5$. Строим часть окружности с центром (2; 0), радиусом $\sqrt{5}$ в области *I*.

В области *II* уравнение (1) имеет вид $x^2 + a^2 = -2x + a + 2x + a + 1$, его перепишем в виде $x^2 + (a-1)^2 = 2$. Строим часть окружности с центром (0; 1), радиусом $\sqrt{2}$ в области *II*.




.

## Ещё раз «метод областей»

**3.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

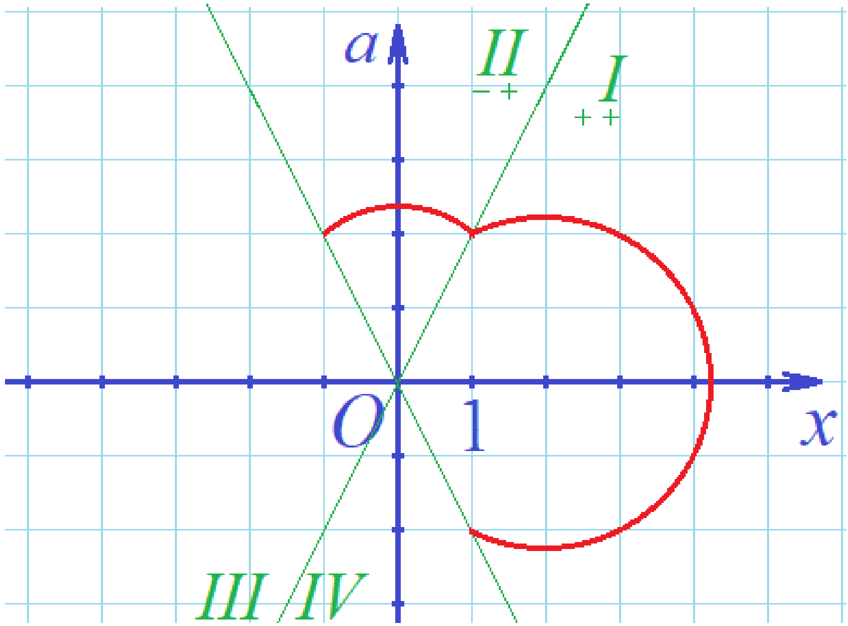
$$x^2 + a^2 = |2x - a| + |2x + a| + 1 \quad (1)$$

имеет ровно четыре корня.

…В области *I* уравнение (1) имеет вид $x^2 + a^2 = 2x - a + 2x + a + 1$, его перепишем в виде $(x-2)^2 + a^2 = 5$. Строим часть окружности с центром (2; 0), радиусом $\sqrt{5}$ в области *I*.

В области *II* уравнение (1) имеет вид $x^2 + a^2 = -2x + a + 2x + a + 1$, его перепишем в виде $x^2 + (a-1)^2 = 2$. Строим часть окружности с центром (0; 1), радиусом $\sqrt{2}$ в области *II*.

Так как вместе с любым решением $(x_0; a_0)$ уравнение (1) имеет решение $(-x_0; -a_0)$, то фигура, изображающая все решения $(x; a)$ уравнения (1), симметрична относительно начала координат.



## Ещё раз «метод областей»

**3.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

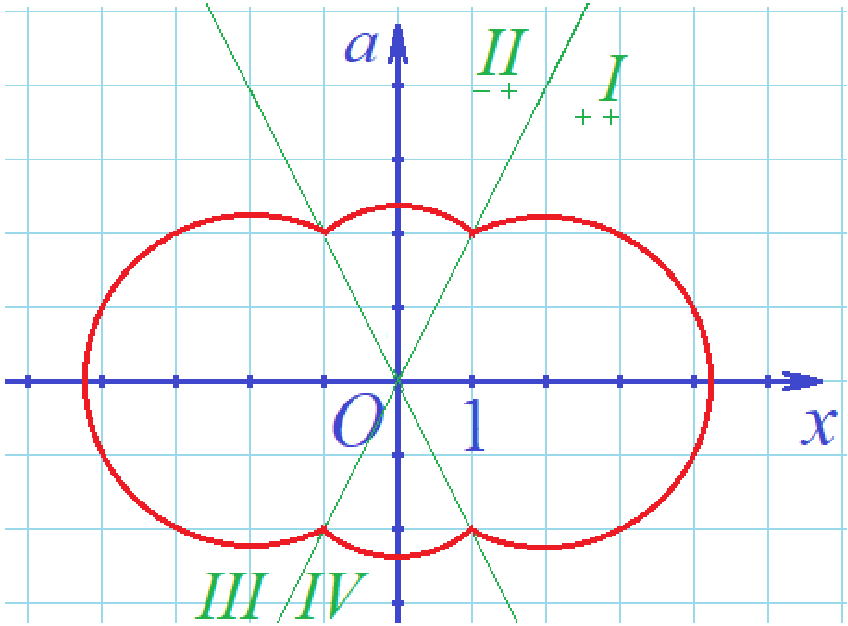
$$x^2 + a^2 = |2x - a| + |2x + a| + 1 \qquad (1)$$

имеет ровно четыре корня.

…В области *I* уравнение (1) имеет вид $x^2 + a^2 = 2x - a + 2x + a + 1$, его перепишем в виде $(x - 2)^2 + a^2 = 5$. Строим часть окружности с центром (2; 0), радиусом $\sqrt{5}$ в области *I*.

В области *II* уравнение (1) имеет вид $x^2 + a^2 = -2x + a + 2x + a + 1$, его перепишем в виде $x^2 + (a - 1)^2 = 2$. Строим часть окружности с центром (0; 1), радиусом $\sqrt{2}$ в области *II*.

Так как вместе с любым решением $(x_0; a_0)$ уравнение (1) имеет решение $(-x_0; -a_0)$, то фигура, изображающие все решения $(x; a)$ уравнения (1), симметрична относительно начала координат.



## Ещё раз «метод областей»

**3.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

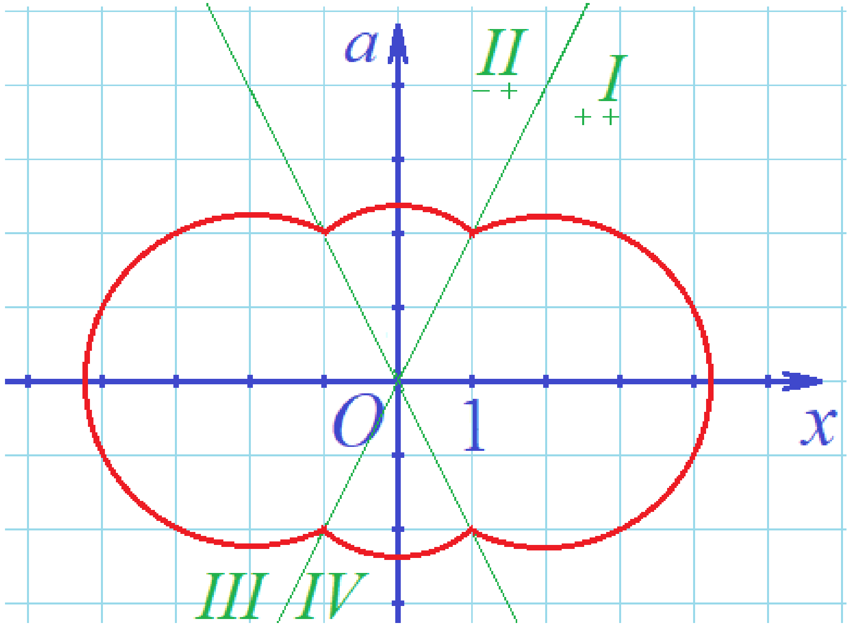
$$x^2 + a^2 = |2x - a| + |2x + a| + 1 \qquad (1)$$

имеет ровно четыре корня.

…Теперь ответим на вопрос задачи. Учтём, что построенную фигуру пересекают ровно в четырёх точках прямые $a = \sqrt{5}$, $a = 2$, $a = -2$, $a = -\sqrt{5}$.

Уравнение (1) имеет ровно 4 корня, если $a = \sqrt{5}$, $a = 2$, $a = -2$, $a = -\sqrt{5}$.

**Ответ.** $-\sqrt{5}, -2, 2, \sqrt{5}$.



## Наименьшее значение функции… не меньше…, не больше…

**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 + 2a + 2$ не меньше 6 на множестве всех $x$, таких, что $|x| \geq 1$.

Пусть $M$ — множество всех $x$, таких, что $|x| \geq 1$. Рассмотрим функцию $f(x) = (2x - a)^2 + 2a + 2$ на множестве $M$.

График функции $y = f(x)$ — парабола с вершиной $\left(\frac{a}{2}; 2a + 2\right)$.

Если $\frac{a}{2} \leq -1$ или $\frac{a}{2} \geq 1$, т. е. если или $a \leq -2$, или $a \geq 2$, то наименьшее значение функции на множестве $M$ есть $f\left(\frac{a}{2}\right) = 2a + 2$. Условия задачи будут выполнены, если $f\left(\frac{a}{2}\right) = 2a + 2 \geq 6$, т. е. если $a \geq 2$.

## Наименьшее значение функции… не меньше…, не больше…

**1.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 + 2a + 2$ на множестве $|x| \geq 1$ не меньше 6.

Если $-1 < \frac{a}{2} < 1$, т. е. $-2 < a < 2$, то наименьшее значение функции на множестве $M$ есть или $f(-1)$, или $f(1)$. Меньшее из этих чисел будет не меньше 6, если выполнены два условия: $f(-1) \geq 6$ и $f(1) \geq 6$. Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} a^2 + 6a + 6 \geq 6 \\ a^2 - 2a + 6 \geq 6. \end{cases}$$

Решения системы составляют множество $(-\infty; -6] \cup \{0\} \cup [2; +\infty)$, но промежутку $-2 < a < 2$ принадлежит лишь число 0.

**Ответ.** $a \in \{0\} \cup [2; +\infty)$.

## Наименьшее значение функции… не меньше…, не больше…

**2.** При каких **положительных** значениях параметра $a$ наименьшее значение функции $y = -3a\cos x - \sin x + 2a$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ не больше –1?

Производная функции $y' = 3a\sin x - \cos x$ равна нулю, если $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3a}$.

1) Число $x_0 = \operatorname{arctg}\frac{1}{3a}$ принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Так как $a > 0$, то $0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{3a} \leq \frac{\pi}{4}$, т. е. $a \geq \frac{1}{3}$. Производная в точке $x_0$ меняет знак с «–» на «+», поэтому при любом $a \geq \frac{1}{3}$ число $x_0$ является точкой минимума функции на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. Вычислим наименьшее значение функции в точке $x_0$.

Так как $\operatorname{tg} x_0 = \frac{1}{3a}$, то $\cos x_0 = \frac{3a}{\sqrt{9a^2+1}}$, $\sin x_0 = \frac{1}{\sqrt{9a^2+1}}$, тогда

$$y\,(x_0) = -3a\cos x_0 - \sin x_0 + 2a = -\frac{9a^2}{\sqrt{9a^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{9a^2+1}} + 2a = 2a - \sqrt{9a^2+1}.$$

## Наименьшее значение функции… не меньше…, не больше…

**2.** При каких **положительных** значениях параметра $a$ наименьшее значение функции $y = -3a\cos x - \sin x + 2a$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ не больше –1?

… Осталось найти все $a \geq \frac{1}{3}$, при каждом из которых $y\,(x_0) \leq -1$. Решив неравенство $2a - \sqrt{9a^2+1} \leq -1$, получим: $a \geq 0{,}8$. Условие при $a \geq \frac{1}{3}$ выполнено.

2) Число $x_0 = \operatorname{arctg}\frac{1}{3a}$ не принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. Так как $a > 0$, то $\operatorname{arctg}\frac{1}{3a} > \frac{\pi}{4}$, т. е. $0 < a < \frac{1}{3}$. В этом случае на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ функция $y = -3a\cos x - \sin x + 2a$ убывает и наименьшее значение достигает в точке $x = \frac{\pi}{4}$.

Вычислим наименьшее значение функции: $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3a\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2a$.

Неравенство $-\frac{3a\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2a \leq -1$ не имеет решений, таких, что $0 < a < \frac{1}{3}$.

**Ответ.** $a \geq 0{,}8$.

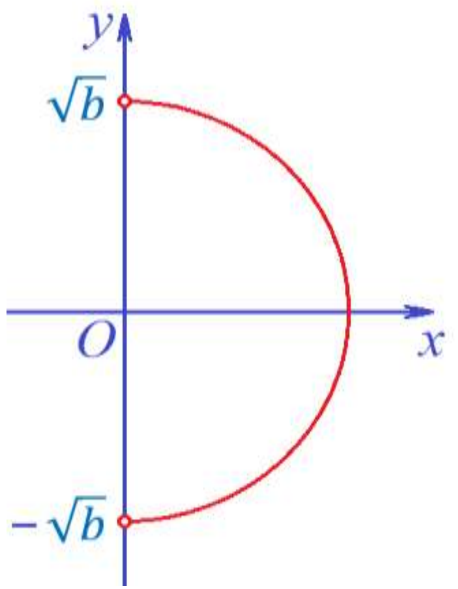
## Из экзамена на мехмате МГУ. 1966 [6]

**5.** Найти все значения $a$ и $b$, при которых система

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x^y-1}{x^y+1}\right| = a, \\ x^2+y^2=b \end{cases} \qquad (1)$$

имеет только одно решение ($a$, $b$, $x$, $y$ — действительные числа, $x > 0$).

Так как $x > 0$, то из второго уравнения системы (1) следует, что $b > 0$. Второму уравнению системы удовлетворяют все пары чисел ($x$; $y$), изображаемые точками полуокружности с центром (0; 0) и радиусом $\sqrt{b}$, такими, что $0 < x \leq \sqrt{b}$, $|y| < \sqrt{b}$. Рассмотрим два случая: $a = 0$ и $a > 0$.




1) Если $a = 0$, то $x^y = 1$, перепишем систему (1) в виде:

$$\begin{cases} x^y = 1, \\ x^2+y^2=b \end{cases} \qquad (2)$$

## Из экзамена на мехмате МГУ. 1966 [6]

**5.** Найти все значения $a$ и $b$, при которых система

$$\begin{cases} \left|\frac{x^y-1}{x^y+1}\right| = a, \\ x^2+y^2=b \end{cases} \qquad (1)$$

имеет только одно решение ($a$, $b$, $x$, $y$ — действительные числа, $x > 0$).

Если $0 < b \leq 1$, то $0 < x \leq 1$, $-1 < y < 1$. Система (2) имеет единственное решение ($\sqrt{b}$; 0), так как если $y \neq 0$, то $x < 1$ и при $y > 0$ верно неравенство $x^y < 1$, а при $y < 0$ верно неравенство $x^y > 1$.

Если $b > 1$, то система (2) имеет два решения $(1; \sqrt{b-1})$ и $(1; -\sqrt{b-1})$.

Итак, если $a = 0$, $0 < b \leq 1$, то системs (2) и (1) имеют единственное решение.

2) Пусть $a > 0$, тогда $y \neq 0$. Если система (1) имеет решение $(x_0; y_0)$, то верны два числовых равенства $\left|\frac{x_0{}^{y_0}-1}{x_0{}^{y_0}+1}\right| = a$ и $x_0^2+y_0^2 = b$.

## Из экзамена на мехмате МГУ. 1966 [6]

**5.** Найти все значения $a$ и $b$, при которых система

$$\begin{cases} \left|\frac{x^y-1}{x^y+1}\right| = a, \\ x^2 + y^2 = b \end{cases} \qquad (1)$$

имеет только одно решение ($a$, $b$, $x$, $y$ — действительные числа, $x > 0$).

Из этих верных числовых равенств следует, что для пары чисел $(x_0; -y_0)$ верны числовые равенства:

$$\left|\frac{x_0{}^{-y_0}-1}{x_0{}^{-y_0}+1}\right| = \left|\frac{\frac{1}{x_0{}^{y_0}}-1}{\frac{1}{x_0{}^{y_0}}+1}\right| = \left|\frac{1-x_0{}^{y_0}}{1+x_0{}^{y_0}}\right| = \left|\frac{x_0{}^{y_0}-1}{x_0{}^{y_0}+1}\right| = a \text{ и } x_0^2 + (-y_0)^2 = x_0^2 + y_0^2 = b.$$

Это означает, что вместе с решением $(x_0; y_0)$ система (1) имеет и решение $(x_0; -y_0)$, и эти решения различны, так как $y_0 \neq 0$.

**Ответ.** $a = 0$; $0 < b \leq 1$.

# Список используемой литературы


1. **Амелькин В.В., Рабцевич В.Л.** Задачи с параметрами: Справочное пособие по математике. – Мн.: ООО «Асар», 2004.

2. **ЕГЭ 2021.** Математика. Профильный уровень. 37 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / Под ред. И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2021.

3. **Потапов М.К., Шевкин А.В.** Алгебра и начала анализа. Дидактические материалы. 11 класс : учебное пособие для общеобразовательных организаций : базовый и углублённый уровни. – 13-е изд. – М.: Просвещение, 2020.

4. **Математика. Подготовка к ЕГЭ-2021.** Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2021 года : учебно-методическое пособие / под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Калабухова. – Ростов-на-Дону. Легион, 2020.

5. **Шевкин А.В.** Математика. Трудные задачи ЕГЭ. Задачи с параметром : профильный уровень. – М.: Просвещение, 2020.

6. **Г.В. Дорофеев, М.К. Потапов, Н.Х. Розов.** Пособие по математике. Для поступающих в вузы. Избранные вопросы элементарной математики. – М.: «Наука». – 1968.

**Выражаю мою сердечную благодарность учителю математики Назарову Марэту Галиоссовичу**

- за помощь в подборе разнообразных заданий, решения которых полезно разобрать с учителями и учащимися,

- за участие в обсуждении способов решения задач, вычитку набора текста, замечания и предложения, способствовавшие улучшению представленной работы.

Без переписки с этим учителем я не написал бы книгу [5].

Шевкин А. В.

Спасибо!

## Спасибо за внимание!

Электронная почта:

Шевкин Александр Владимирович

**avshevkin@mail.ru.**

Сайт www.shevkin.ru

Канал **НАБЛЮДАТЕЛЬ**

на **Яндекс Дзен**