

ОРГАНИЗАЦИЯ ОБОБЩАЮЩЕГО ПОВТОРЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИИ (при использовании УМК «Лаборатория А.Г.Мордковича»)

06.04.2021 г.

Общие идеи





Математика – это язык, на котором говорят все точные науки.

Н.И.Лобачевский



Алгебра и начала математического анализа, 10-11 классы

Класс

Функция

Реальные и физические процессы

7 класс Линейная функция.

Равномерные процессы.

8 класс Квадратичная функция.
 Функции $y = |x|$, $y = \frac{k}{x}$ и $y = \sqrt{x}$.

Равноускоренные процессы.

9 класс Функции $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

Обобщение изученного в основной школе, формализация некоторых определений и понятий.

10 класс Тригонометрические функции.

Периодические процессы,
 гармонические колебания.

Степенные, показательные и логарифмические функции.

Процессы органического роста.

11 класс Элементы теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления; обобщение изученного.

Мгновенная скорость, площадь и объём, оптимальные значения некоторых величин.

Виды повторения



Вид повторения

Цель повторения

Вводное

Актуализация элементов ранее изученного содержания для облегчения изучения нового материала.

Поддерживающее

В ходе работы над темой актуализация ранее изученного материала этой же темы.

Итоговое

В завершении работы над темой (или определённого временного периода) актуализация материала изученной (-ых) темы.

Систематизирующее

Укрупнение логической структуры изученного материала путём объединения его элементов в группы по тем или иным признакам, выявленным в ходе работы и выстраивание системы взаимосвязи между этими группами.

Обобщающее

Выделение основных содержательных и функциональных линий материала изученной темы, ключевых фактов, алгоритмов и ценностных установок.

Примерное планирование. 10 класс



пп	Тема	Кол-во часов	пп	Тема	Кол-во часов
Глава 1. Тригонометрические функции (23 ч)					
1	Что такое числовая окружность.	2	8	Периодические функции.	2
2	Числовая окружность на координатной плоскости.	2	9	Свойства и график функции $y = \cos x$.	2
3	Дуги числовой окружности на координатной плоскости.	1	10	Свойства и график функции $y = \sin x$.	2
4	Понятия косинуса и синуса числа.	2	11	Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = kf(x)$.	1
5	Понятия тангенса и котангенса числа.	1	12	Как, зная график функции $y = f(x)$, построить график функции $y = f(mx)$.	1
6	Соотношения между тригонометрическими функциями.	2	13*	График гармонического колебания.	1
7	Тригонометрические функции числового аргумента.	1	14	Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.	1
	<i>Контрольная работа № 1.</i>	1		<i>Контрольная работа № 2.</i>	1

Примерное планирование. 10 класс



пп	Тема	Кол-во часов	пп	Тема	Кол-во часов
Глава 2. Обратные тригонометрические функции. Решение тригонометрических уравнений (16 ч.)			Глава 3. Формулы тригонометрии (12 ч)		
15	Понятие обратной функции.	1	25	Формулы приведения.	1
16	Функция $y = \arcsin x$.	2	26	Формулы синуса и косинуса суммы и разности аргументов.	2
17	Функция $y = \arccos x$.	2	27	Формулы тангенса суммы и разности аргументов.	1
18	Функция $y = \operatorname{arctg} x$.	1	28	Формулы двойного аргумента.	2
19	Функция $y = \operatorname{arcctg} x$.	1	29	Формулы понижения степени.	1
20	Решение уравнения $\cos x = a$.	1	30	Формулы сложения (вычитания) синусов (косинусов).	2
21	Решение уравнения $\sin x = a$.	2	31*	Формулы преобразования произведения синусов (косинусов) в сумму.	2
22	Решение уравнений $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$.	1		<i>Контрольная работа № 4.</i>	1
23	Методы решения тригонометрических уравнений.	2			
24	Однородные тригонометрические уравнения.	2		Итоговое повторение	6
	<i>Контрольная работа № 3.</i>	1			

Обобщающее повторение. 10 класс



№	Тема	Кол-во часов
1	Тригонометрические функции.	1
2	Обратные тригонометрические функции. Решение тригонометрических уравнений.	1
3	Формулы тригонометрии.	1
4	Степенные функции.	1
5	Показательные функции.	1
6	Логарифмические функции.	1

Итоговое повторение. 11 класс



№	Тема	Кол-во часов
1	Степень с натуральным, целым и действительным показателями.	1
2	Корень степени $n > 1$ и его свойства. Иррациональные уравнения.	1
3	Тождественные преобразования выражений. Выражения, содержащие корни n -й степени. Формулы.	1
4	Преобразование тригонометрических выражений.	1
5	Тригонометрические функции.	1
6	Тригонометрические уравнения.	1
7	Логарифм и его свойства. Логарифмические уравнения.	1
8	Логарифмические уравнения и неравенства.	1
9	Показательные уравнения и неравенства.	1
10	Функции и их свойства. Графики функций. Касательная.	1
11	Применение производной к исследованию функций.	1
12	Использование вероятностей и статистики при решении прикладных задач.	1

Повторение и систематизация теоретического материала





Глава 1 Тригонометрические функции

§ 1. Что такое числовая окружность

Вам известно, что прямую, на которой заданы начальная точка O , масштаб (единичный отрезок) и положительное направление, называют *числовой прямой*. Любому действительному числу мы можем сопоставить единственную точку числовой прямой, и наоборот: любая точка числовой прямой соответствует единственному числу. Например, числу 3 соответствует точка A , числу -2 соответствует точка B (рис. 1), и наоборот: точке C соответствует число 5, а точке D — число -4 (рис. 2).

Но в реальной жизни приходится двигаться не только по прямой. Довольно часто рассматривается движение по окружности, например, по беговой дорожке стадиона, стандартная длина которой равна 400 м (это, конечно, не окружность, но, идеализируя ситуацию, как принято в математике, её считают окружностью; более того, в обиходной речи называют даже кругом). Как и в случае с числовой прямой, здесь есть точка отсчёта (она расположена на линии старта), есть масштаб — 1 м, указывается направление движения — обычно против часовой стрелки (положительное направление). Так что вполне можно говорить не просто об окружности, а о *числовой окружности*. В зависимости от заданной дистанции (100 м, 200 м, 400 м, 800 м, 1500 м и т. д.) проводят линию финиша. Иными словами, любому числу соответствует единственная точка окружности (не только положительному числу, но и отрицательному — ведь забеги можно устраивать и

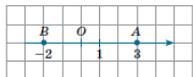


Рис. 1

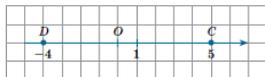


Рис. 2

5

Подробные тексты, ориентированные на самостоятельную работу обучающего с текстом.

в отрицательном направлении — в направлении по часовой стрелке). А вот обратное неверно: одна и та же точка окружности вполне может соответствовать разным числам. Например, для забегов на 400 м («один круг»), 800 м («два круга»), 10 000 м («двадцать пять кругов») проводят одну и ту же линию финиша, т. е. числам 400, 800, 10 000 соответствует одна и та же точка числовой окружности.

В принципе любую окружность можно рассматривать как числовую, но мы будем использовать для этой цели окружность, радиус которой принимается за единицу измерения; такую окружность для краткости будем называть *единичной окружностью*. Это будет наша «беговая дорожка», её длина l равна 2π ($l = 2\pi R$; здесь $R = 1$), что составляет примерно 6,28.

На рисунке 3 изображена единичная окружность, проведены горизонтальный и вертикальный диаметры CA и DB . Условимся называть дугу AB *первой четвертью*, дугу BC — *второй четвертью*, дугу CD — *третьей четвертью*, дугу DA — *четвёртой четвертью*. Длина на каждой четверти единичной окружности равна $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57$.

Пример 1 В единичной окружности проведены два взаимно перпендикулярных диаметра: горизонтальный CA и вертикальный DB . Дуга AB разделена точкой M на две равные части, а дуга CD точками K и P — на три равные части (рис. 4). Чему равна длина дуги:

- а) AM, MB ; б) CK, KP, PD ; в) AK, BP ?

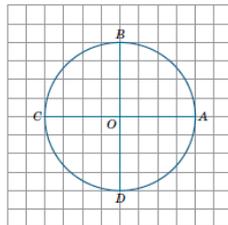


Рис. 3

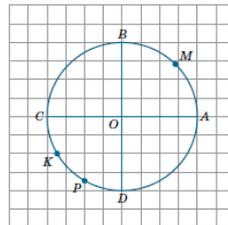


Рис. 4

6

Решение. Обычно дугу AB обозначают так: \widehat{AB} , а длину дуги обозначают так: $|AB|$. Чтобы не усложнять записи, мы будем в обоих случаях писать просто AB , а из текста будет ясно, о чём идёт речь — о дуге или о её длине.

а) $AB = \frac{\pi}{2}$, значит, $AM = MB = \frac{\pi}{4}$.

б) $CD = \frac{\pi}{2}$, значит, $CK = KP = PD = \frac{\pi}{6}$.

в) $AK = AC + CK = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$;

$BP = BC + CP = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$.

Сформулируем определение числовой окружности, которым мы будем пользоваться в нашем курсе. Начальной точкой будем считать точку A — правый конец горизонтального диаметра (см. рис. 3).

Определение. Поставим в соответствие каждому действительному числу t точку единичной окружности (см. рис. 3) по следующему правилу.

- 1) Числу $t = 0$ поставим в соответствие точку A ; $A = A(0)$.
- 2) Если $t > 0$, то, двигаясь из точки A в направлении *против часовой стрелки* (положительное направление обхода окружности), пройдем по окружности расстояние AM , равное t . Точка M и будет искомым точкой $M(t)$.
- 3) Если $t < 0$, то, двигаясь из точки A в направлении *по часовой стрелке* (отрицательное направление обхода окружности), пройдем по окружности расстояние AM , равное $|t|$. Точка M и будет искомым точкой $M(t)$.

Единичную окружность с установленным соответствием (между действительными числами и точками окружности) будем называть *числовой окружностью*.

Пример 2 Найти на числовой окружности точку, которая соответствует заданному числу:

а) $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, 8\pi$;

б) $-\frac{\pi}{2}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{7\pi}{4}$.

7



Определение. Если $|a| \leq 1$, то $\arcsin a$ — это такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a .

Итак,

$$\text{если } |a| \leq 1, \text{ то}$$
$$\arcsin a = t \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = a, \\ -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

- Схема определения понятия

Арксинус числа a , $|a| \leq 1$:

1. Число t и
2. $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ и
3. $\sin t = a$

$$\arcsin a = t$$



- Информационная схема



Уравнение	Решение
$\sin x = a$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\sin x = a$	$x = \arcsin a + 2\pi n, x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
Частные случаи	
$\sin x = 0$	$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$



Пример 1 Решить уравнение:

а) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$;

б) $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$;

в) $\sqrt{3} \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} = 7$.

Решение. а) Введём новую переменную: $z = \cos x$. Тогда уравнение примет вид

$$2z^2 - z - 1 = 0,$$

откуда находим: $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2}$. Значит, либо $\cos x = 1$, либо

$$\cos x = -\frac{1}{2}.$$

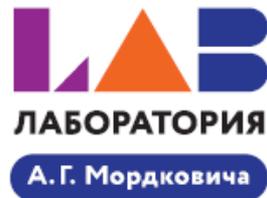
Решив уравнение $\cos x = 1$, получим $x = 2\pi n$; решив уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$, получим

$$\begin{aligned}
 x &= \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pm\left(\pi - \arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \\
 &= \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.
 \end{aligned}$$

- Предписание по решению тригонометрических уравнений вида $a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$

1. Введём новую переменную $\cos x = z$
2. Получим уравнение вида $az^2 + bz + c = 0$
3. Решим квадратное уравнение относительно переменной z
4. Отберём корни, удовлетворяющие условию $|z| \leq 1$
5. Вернёмся к прежним переменным $\cos x = z$
6. Решим полученное тригонометрическое уравнение $x = \pm \arccos z + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Применение теоретического материала на практике



Дифференцированная трёхуровневая система упражнений



Упражнения располагаются от простого к высокому, трёх уровней сложности:

**базового,
повышенного,
высокого.**

Упражнения

26.1. Вычислите:

- а) $\sin 105^\circ$, используя равенство $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$;
 б) $\cos 15^\circ$, используя равенство $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$.

26.2. а) Пользуясь формулой синуса суммы двух углов, докажите справедливость формулы приведения: $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$.
 б) Пользуясь формулой косинуса разности двух углов, докажите справедливость формулы приведения: $\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$.

Найдите значение выражения.

- 26.6.** а) $\sin 107^\circ \cos 17^\circ - \cos 107^\circ \sin 17^\circ$;
 б) $\cos 37^\circ \cos 23^\circ - \sin 37^\circ \sin 23^\circ$;
 в) $\sin 32^\circ \sin 13^\circ - \cos 13^\circ \cos 32^\circ$;
 г) $\sin 112^\circ \cos 68^\circ + \cos 112^\circ \sin 68^\circ$;
 д) $\cos 46^\circ \cos 16^\circ + \sin 46^\circ \sin 16^\circ$;
 е) $-\sin 22^\circ \cos 23^\circ - \cos 22^\circ \sin 23^\circ$.

- 26.7.** а) $\sin \frac{9\pi}{10} \cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{9\pi}{10} \sin \frac{2\pi}{5}$;
 б) $\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}$;

- 26.16.** а) $\sin 0,7x \cos 0,3x + \cos 0,7x \sin 0,3x = \cos 4x \cos 3x + \sin 3x \sin 4x$, $x \in [-\pi; 2\pi]$;
 б) $\cos 0,2x \cos 1,8x - \sin 0,2x \sin 1,8x = \sin 7x \cos 9x - \sin 9x \cos 7x$,
 $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$.



Решите уравнение.

ИКТ 9.9.

а) $\cos x = x + 1$;
 б) $\cos x = -3x + 1$;
 в) $\cos x = |x| - \frac{\pi}{2}$;

г) $\cos x = 1 - x$;
 д) $\cos x = 2x + 1$;
 е) $\cos x = -|x| + 1$.

ИКТ 9.10.

а) $\cos x = \sqrt{x - \frac{\pi}{2}}$;
 б) $\cos x = x^2 + 1$;
 в) $\cos x = x^3 + 1$;

г) $\cos x = \sqrt{x} + 1$;
 д) $\cos x = (x - \pi)^2 - 1$;
 е) $\cos x = -x^3 + 1$.

Выделены задания, предназначенные для использования ИТ-средств

В конце каждого параграфа выделены упражнения для повторения

Упражнения для повторения

32.14. Найдите значение выражения:

а) $\frac{18 \sin 86^\circ \cos 86^\circ}{\sin 172^\circ}$;	г) $\frac{52 \sin 68^\circ \cos 68^\circ}{\sin 136^\circ}$;
б) $\frac{10 \sin 6^\circ \cos 6^\circ}{\cos 78^\circ}$;	д) $\frac{6 \sin 12^\circ \cos 12^\circ}{\cos 66^\circ}$;
в) $\frac{\cos^2 25^\circ - \sin^2 25^\circ}{4 \sin 40^\circ}$;	е) $\frac{9 \cos^2 36^\circ - 9 \sin^2 36^\circ}{2 \sin 378^\circ}$.

32.15. Найдите наименьший положительный корень уравнения:

а) $\sin \frac{\pi(2x - 1)}{6} = \frac{1}{2}$;	г) $\cos \frac{\pi(x + 1)}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
б) $\cos \frac{\pi(x - 3)}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$;	д) $\sin \frac{\pi(3x - 5)}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
в) $\sin \frac{\pi(2x - 1)}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;	е) $\cos \frac{\pi(4x + 10)}{3} = -\frac{1}{2}$.

Ко всем упражнениям, кроме базового уровня, имеются ответы.



Тест

- Укажите значения t , соответствующие координатам точки $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
а) $\frac{3\pi}{4}$ б) $\frac{15\pi}{4}$ в) $-\frac{\pi}{4}$ г) $-\frac{5\pi}{4}$
- Найдите значение выражения $\cos(-\pi) - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} + \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$.
- Установите соответствие между радианной и градусной мерами дуги числовой окружности.
А. $\frac{13\pi}{6}$ Б. $\frac{11\pi}{4}$ В. $\frac{5\pi}{2}$
1) 495° 2) 390° 3) 450°
- Зная, что $\cos t = 0,96$ и $-\frac{\pi}{2} < t < 0$, найдите $\sin t$.
- Расположите числа $\cos 2, \cos 5, \cos 3, \cos 4$ в порядке возрастания:
а) $\cos 3, \cos 4, \cos 2, \cos 5$ в) $\cos 5, \cos 4, \cos 3, \cos 2$
б) $\cos 5, \cos 2, \cos 4, \cos 3$ г) $\cos 2, \cos 3, \cos 4, \cos 5$
- Решите уравнение $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
а) $\pm\frac{5\pi}{6} + \pi l$ в) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi l$
б) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi l$ г) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi l$
- Найдите период функции $y = 3\sin\frac{\pi x}{2}$.
- Укажите формулу, которая задаёт график функции, изображённый на рисунке 100.
а) $y = \sin 2x$ б) $y = \cos\frac{x}{2}$ в) $y = 2 \sin x$ г) $y = 1,5\sin\frac{x}{2}$
- Найдите область значений функции $y = 3\cos x + 2$.
- Решите неравенство $(\sqrt{3} - 2)\operatorname{tg} x \geq 2 - \sqrt{3}$.

В конце каждой главы предложены дополнительные задачи по теме

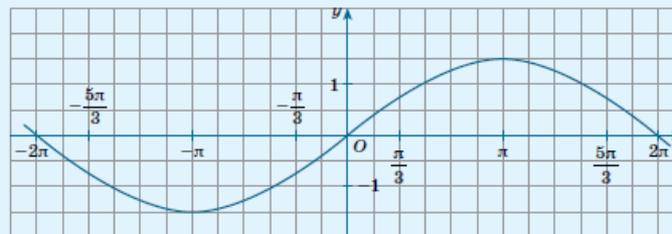


Рис. 100

Дополнительные задачи

В следующих задачах рассмотрены движения минутной и часовой стрелок на часах с круговым циферблатом¹.

- Сколько полных оборотов делает минутная стрелка за время:
а) с 12:00 до 13:00; г) с 19:00 сегодня до 8:00 завтра;
б) с 13:00 до 15:00; д) с 23:00 сегодня до 12:00 послезавтра;
в) с 17:00 до 24:00; е) с 17:00 30 декабря до 7:00 2 января?
- По числу n полных оборотов минутной стрелки и началу a отсчёта времени найдите конец b отсчёта или по концу b найдите начало a отсчёта времени.
а) $a = 12:15, n = 5, b = ?$; г) $b = 8:05, n = 5, a = ?$;
б) $a = 13:30, n = 10, b = ?$; д) $b = 9:10, n = 25, a = ?$;
в) $a = 14:45, n = 15, b = ?$; е) $b = 10:15, n = 40, a = ?$.
- На сколько градусов повернётся минутная стрелка за время:
а) с 12:00 до 12:15; г) с 9:10 до 10:05;
б) с 15:00 до 15:30; д) с 11:35 до 12:40;
в) с 8:40 до 9:05; е) с 23:59 до 00:11?
- На сколько градусов повернётся часовая стрелка за время:
а) с 12:00 до 13:00; г) с 17:45 сегодня до 7:00 завтра;
б) с 14:00 до 19:00; д) с 8:15 сегодня до 6:00 завтра;
в) с 15:30 до 23:00; е) с 9:20 сегодня до 20:10 послезавтра?

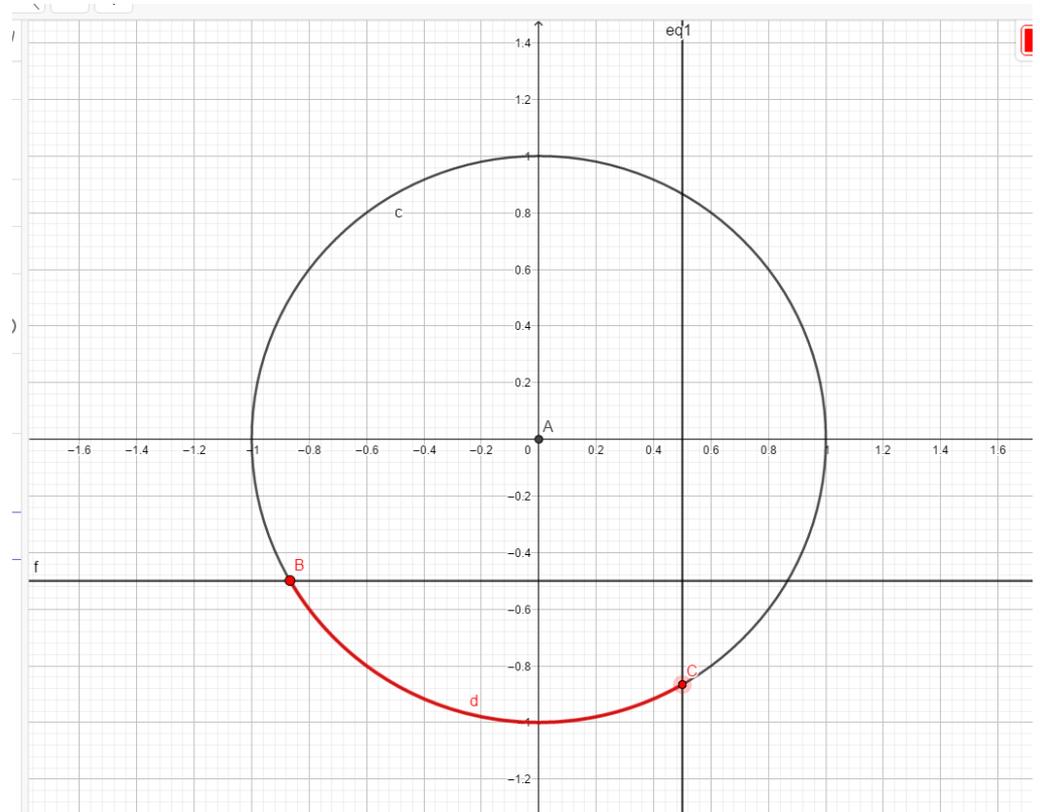
¹ Все показания часов относятся к одному и тому же (сегодняшнему) дню, если специально не оговорено противное. Все часы идут правильно, стрелки движутся равномерно, без скачков.

В конце каждой главы есть раздел «Дополнительные задачи»

Упражнения для повторения

51.11. Решите систему неравенств:

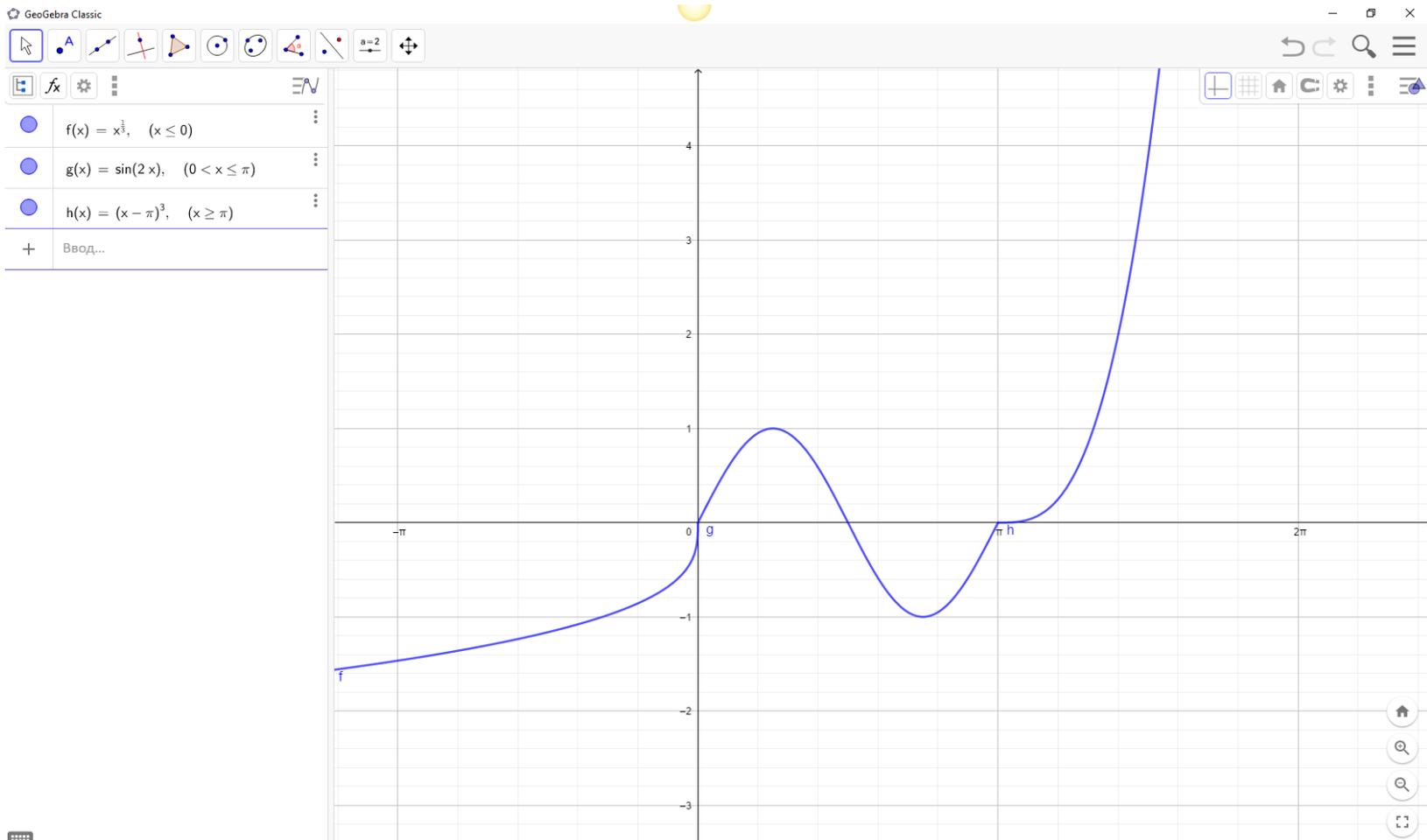
$$\text{a) } \begin{cases} \cos t \leq 0,5, \\ \sin t \leq -0,5; \end{cases}$$



Ответ. $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

51.13. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{если } x \leq 0; \\ \sin 2x, & \text{если } 0 < x < \pi; \\ (x - \pi)^3, & \text{если } x \geq \pi. \end{cases}$

- Постройте график функции $y = f(x)$;
- укажите промежутки возрастания и убывания функции;
- решите неравенство $f(x) \geq 0$;
- найдите, при каких значениях параметра p уравнение $f(x) = p$ имеет два корня.



Упражнения для повторения

49.22. Имеет ли смысл выражение:

а) $\arcsin(\log_2 0,5)$;

в) $\arcsin\left(\log_3 \frac{1}{3}\right)$;

б) $\arccos(\log_{3\sqrt{3}} 3)$;

г) $\arccos(\log_{\sqrt{2}} 2)$?

49.23. Исследуйте функцию на чётность:

а) $y = \ln|x| + x^2$;

в) $y = \cos x + \log_2 x^2$;

б) $y = \frac{\sin x}{\log_3 x}$;

г) $y = \frac{\sin x}{\lg|x|}$.

Решения.

49.22.

$$\log_2 0,5 = -1$$

$$|-1| \leq 1$$

49.23.

$$y = \ln|x| + x^2$$

$$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

$$f(-x) = \ln|-x| + (-x)^2 = \ln|x| + x^2 = f(x)$$

Приём саморегуляции при выполнении задания «Решите уравнение»

Последовательность выполнения действий	Рефлексия и принятие решения о помощи
1. Определите тип уравнения.	<i>Знаю ли я типы уравнений?</i>
2. Определите вид уравнения: если уравнение стандартное, то перейдите к п.3; если уравнение нестандартное, то перейдите к п. 4.	<i>Знаю ли я виды уравнений?</i>
3. Решите в соответствии со стандартом: если решение выполнено, то перейдите к п.6; если решение не выполнено, то перейдите к п. 1.	<i>Знаю ли я, как решать уравнения стандартного вида?</i>
4. Выясните, какие преобразования необходимо выполнить, чтобы свести уравнение к стандартному виду, выполнив анализ правой и левой части.	<i>Знаю ли я группы преобразований?</i>
5. Выполните эти преобразования: если они выполнены, то перейдите к п. 6; если они не выполнены, то перейдите к п. 1.	<i>До конца ли выполнено определённое в предыдущем пункте преобразование?</i>
6. Сделайте проверку.	<i>Знаю ли я, как делать проверку?</i>
7. Запишите ответ.	<i>Знаю ли я, как записать ответ?</i>

Пример задания типа «Решите уравнение»



52.12. Решите уравнение и укажите его корни на заданном промежутке:

$$а) \sin^2 x + 2\cos x + 2 = 0, \left[-\frac{7\pi}{2}; \pi \right];$$

Последовательность выполнения действий	Рефлексия и принятие решения о помощи	Ответ
1. Определите тип уравнения.	<i>Знаю ли я типы уравнений?</i>	Тригонометрическое уравнение с одной переменной.
2. Определите вид уравнения: если уравнение стандартное, то перейдите к п.3; если уравнение нестандартное, то перейдите к п. 4.	<i>Знаю ли я виды уравнений?</i>	Уравнение нестандартное.
4. Выясните, какие преобразования необходимо выполнить, чтобы свести уравнение к стандартному виду, выполнив анализ правой и левой части.	<i>Знаю ли я группы преобразований?</i>	Чтобы решить данное уравнение, необходимо преобразовать левую часть, чтобы была одна тригонометрическая функция.

$$\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0$$

$$\cos^2 x - 2 \cos x - 3 = 0$$

Последовательность выполнения действий	Рефлексия и принятие решения о помощи	Ответ
1. Определите тип уравнения.	<i>Знаю ли я типы уравнений?</i>	Тригонометрическое уравнение с одной переменной.
2. Определите вид уравнения: если уравнение стандартное, то перейдите к п.3; если уравнение нестандартное, то перейдите к п. 4.	<i>Знаю ли я виды уравнений?</i>	Уравнение стандартное.
4. Выясните, какие преобразования необходимо выполнить, чтобы свести уравнение к стандартному виду, выполнив анализ правой и левой части.	<i>Знаю ли я группы преобразований?</i>	Чтобы решить данное уравнение, необходимо ввести замену переменной.

$$t = \cos x, |t| \leq 1$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$t_1 = -1, t_2 = 3$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Последовательность выполнения действий	Рефлексия и принятие решения о помощи	Ответ
1. Выясните, выполнено ли требование.	<i>Знаю ли , что такое требование задачи?</i>	Что следует найти.
2. Определите вид требования уравнения: стандартное; исследовательское.	<i>Умею ли я выполнять отбор корней в тригонометрическом уравнении?</i>	Произвести отбор корней можно: составив и решив неравенство, используя график функции или тригонометрический круг.

Отбор корней.

Составление и решение неравенства.

$$-\frac{7\pi}{2} \leq \pi + 2\pi n \leq \pi, n \in Z$$

$$-\frac{9\pi}{2} \leq 2\pi n \leq 0, n \in Z$$

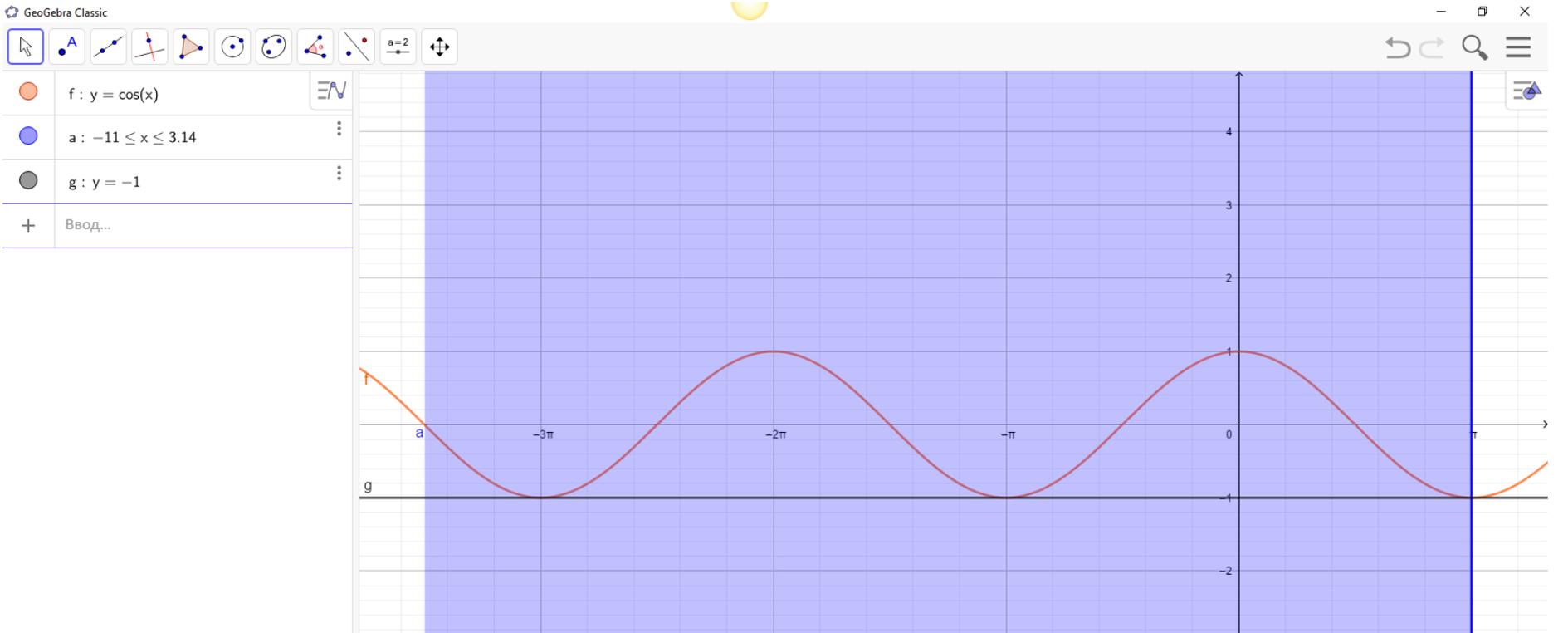
$$-\frac{9}{4} \leq n \leq 0, n \in Z$$

$$n = -2, -1, 0$$

$$x = -3\pi, -\pi, 0$$

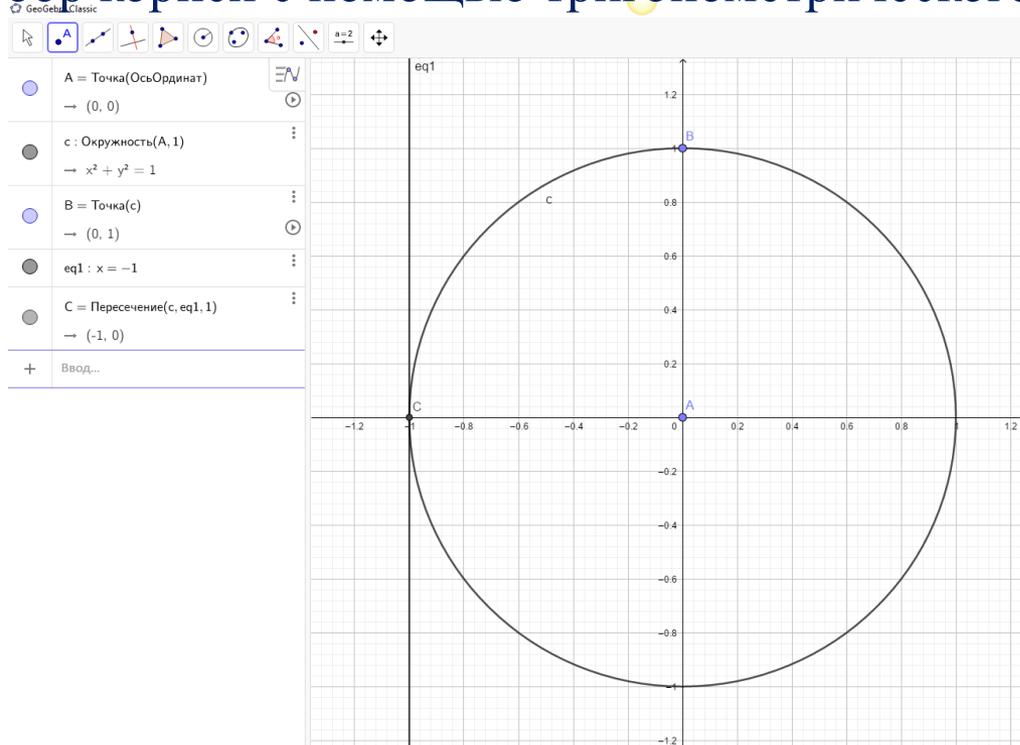
Последовательность выполнения действий	Рефлексия и принятие решения о помощи	Ответ
1. Выясните, выполнено ли требование.	<i>Знаю ли , что такое требование задачи?</i>	Что следует найти.
2. Определите вид требования уравнения: стандартное; исследовательское.	<i>Умею ли я выполнять отбор корней в тригонометрическом уравнении?</i>	Произвести отбор корней можно: составив и решив неравенство, используя график функции или тригонометрический круг.

Использование графика функции при отборе корней.



Последовательность выполнения действий	Рефлексия и принятие решения о помощи	Ответ
1. Выясните, выполнено ли требование.	<i>Знаю ли , что такое требование задачи?</i>	Что следует найти.
2. Определите вид требования уравнения: стандартное; исследовательское.	<i>Умею ли я выполнять отбор корней в тригонометрическом уравнении?</i>	Произвести отбор корней можно: составив и решив неравенство, используя график функции или тригонометрический круг.

Отбор корней с помощью тригонометрического круга.



Упражнения на повторение

53.14. Решите уравнение:

а) $\sqrt{21x - 20 - 4x^2} \cdot (2\sin 2x - \sqrt{3}) = 0;$

$$\sqrt{21x - 20 - 4x^2} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2\sin 2x - \sqrt{3} = 0, \\ 21x - 20 - 4x^2 \geq 0. \end{cases}$$

$$x_1 = 1,25; x_2 = 4$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \pi n, \\ x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \\ 1,25 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

Отбор корней.

$$1,25 \leq \frac{\pi}{6} + \pi n \leq 4, n \in Z$$

$$\frac{15 - 2\pi}{12} \leq \pi n \leq \frac{24 - \pi}{6}, n \in Z$$

$$\frac{15 - 2\pi}{12\pi} \leq n \leq \frac{24 - \pi}{6\pi}, n \in Z$$

$$1,25 \leq \frac{\pi}{3} + \pi n \leq 4, n \in Z$$

$$\frac{15 - 3\pi}{12} \leq \pi n \leq \frac{12 - \pi}{3}, n \in Z$$

$$\frac{15 - 3\pi}{12\pi} \leq n \leq \frac{12 - \pi}{3\pi}, n \in Z$$

Ответ. $1,25; 4; \frac{7\pi}{6}$

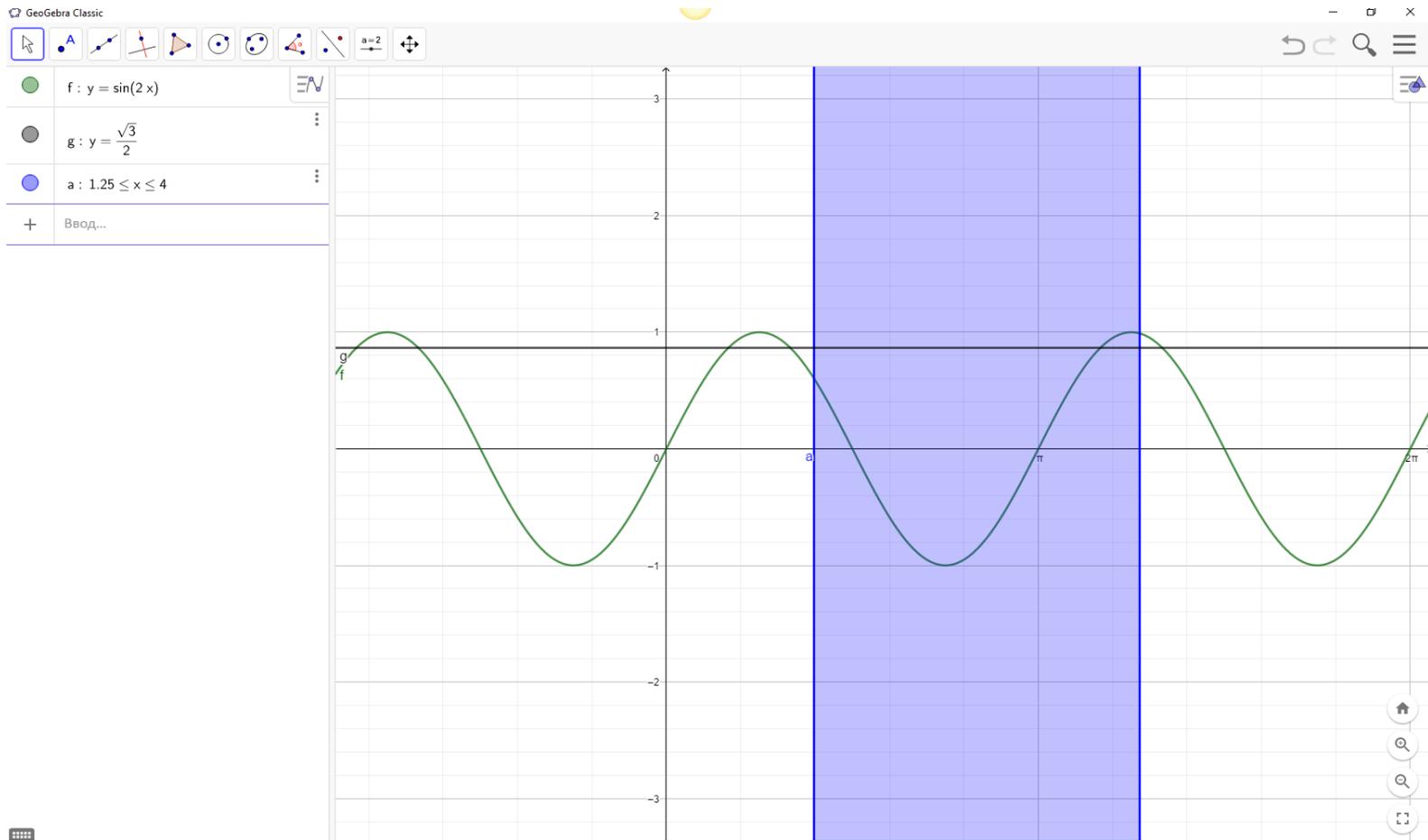
Упражнения на повторение

53.14. Решите уравнение:

а) $\sqrt{21x - 20 - 4x^2} \cdot (2\sin 2x - \sqrt{3}) = 0;$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \pi n, \\ x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \\ 1,25 \leq x \leq 4. \end{array} \right.$$

Отбор корней.



Ответ. $1,25; 4; \frac{7\pi}{6}$



Для всех значений параметра a решите данное уравнение.

31.12. б) $\sin x = a^2 + 4a + 4$;

Решение.

$$31.12б. \quad |a^2 + 4a + 4| \leq 1$$

$$a^2 + 4a + 4 \leq 1 \quad \text{или} \quad a^2 + 4a + 4 \geq -1$$

$$a^2 + 4a + 3 \leq 0 \quad a^2 + 4a + 5 \geq 0$$

$$(a+1)(a+3) \leq 0$$

Ответ. При $a < -3, a > -1$ корней нет,

при $-3 \leq a \leq -1$ $x = (-1)^n \arcsin(a^2 + 4a + 4) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

ИКТ 21.4. При каких значениях параметра p имеет корни уравнение: б) $\sin x = p^2 - 3$?

Решение.

$$|p^2 - 3| \leq 1$$

$$p^2 - 3 \leq 1 \quad \text{или} \quad p^2 - 3 \geq -1$$

$$p^2 - 4 \leq 0 \quad p^2 - 2 \geq 0$$

$$(p-2)(p+2) \leq 0 \quad (p-\sqrt{2})(p+\sqrt{2}) \geq 0$$

Ответ. При $-2 \leq p \leq -\sqrt{2}$ и $\sqrt{2} \leq p \leq 2$.



Пример.

Найдите все значения параметра p , при которых уравнение $(\sin 3x \cos x - \sin 2x)\sqrt{p^2 - x^2} = 0$ имеет ровно три корня.

Решение.

Преобразуем выражение в скобках: $\left(\frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x) - \sin 2x\right)\sqrt{p^2 - x^2} = 0$

далее $\left(\frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x) - \sin 2x\right)\sqrt{p^2 - x^2} = 0$ и $\left(\sin 2x \cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\sqrt{p^2 - x^2} = 0$.

Вынесем общий множитель за скобки $\sin 2x\left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{p^2 - x^2} = 0$

Воспользуемся свойством равенства нулю произведения:

$$\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ p^2 - x^2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos 2x - \frac{1}{2} = 0, \\ p^2 - x^2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sqrt{p^2 - x^2} = 0 \\ x = \pm p \end{cases}$$

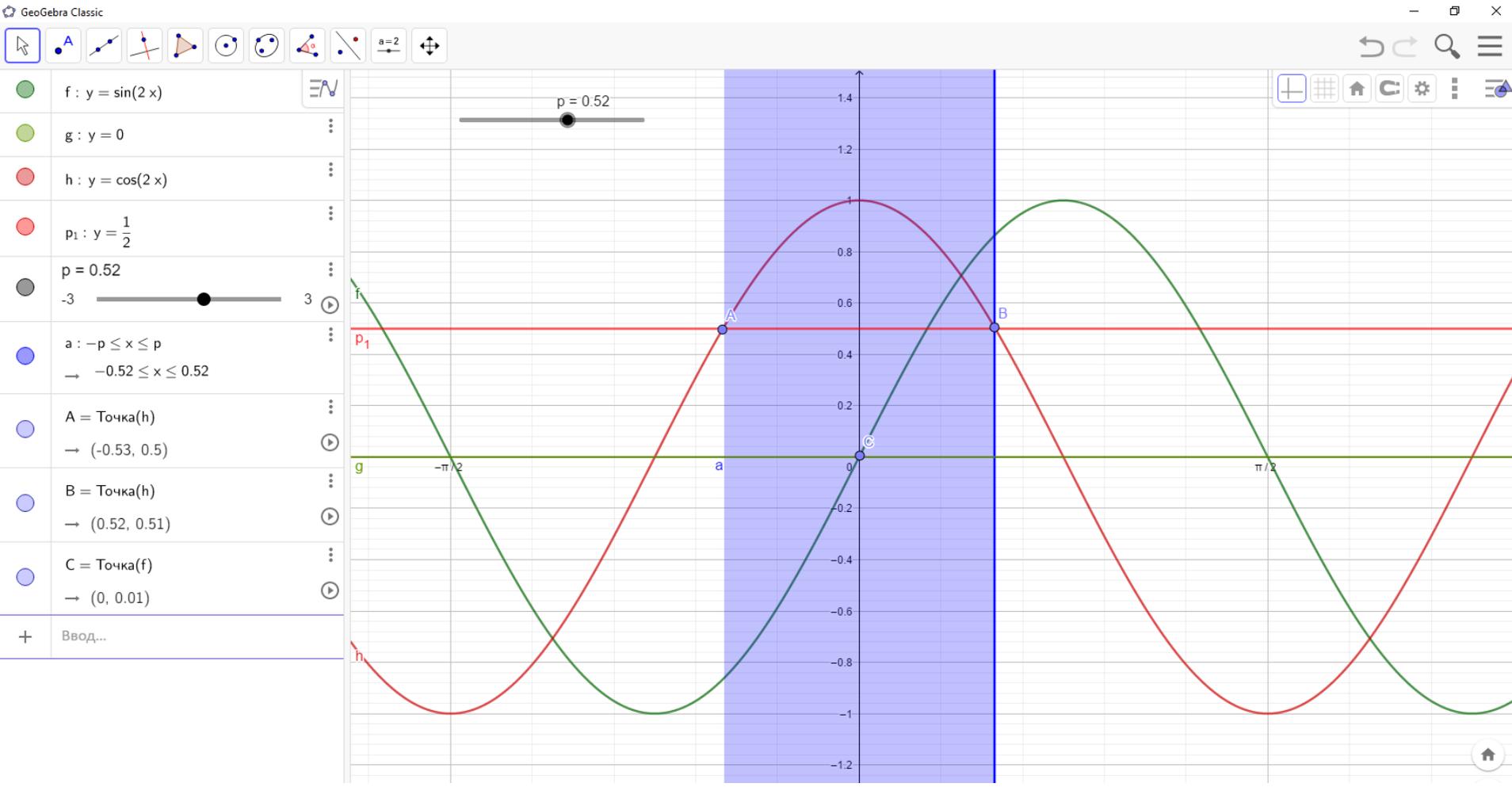
$$\begin{cases} 2x = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ |x| \leq p \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ |x| \leq p \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}, \\ |x| \leq p \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ |x| \leq p \end{cases}$$



Проведём анализ графически: $\sin 2x = 0$ и $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

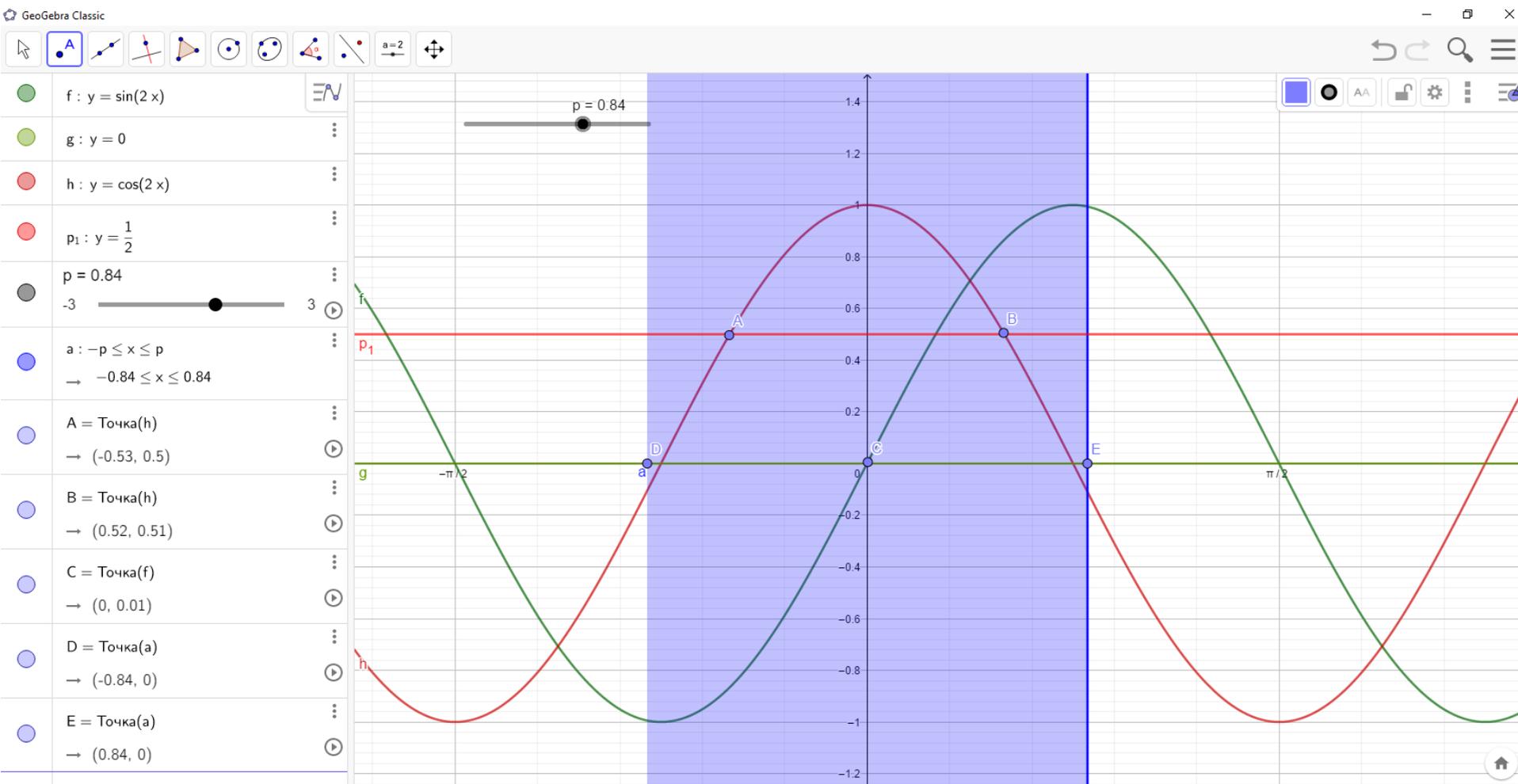
Рассмотрим функции: $y = \sin 2x$ и $y = \cos 2x$.





Проведём анализ графически: $\sin 2x = 0$ и $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

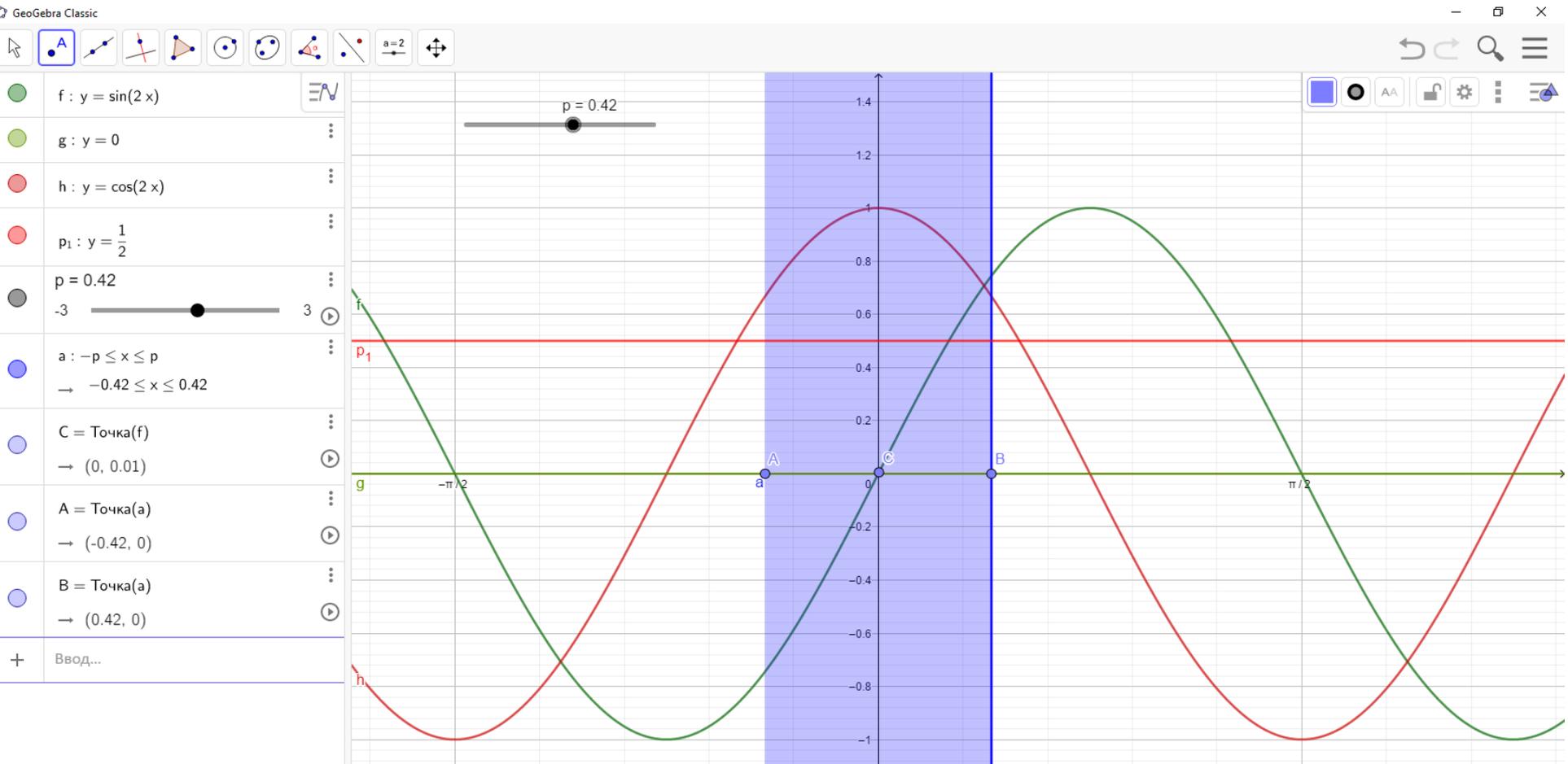
Рассмотрим функции: $y = \sin 2x$ и $y = \cos 2x$.





Проведём анализ графически: $\sin 2x = 0$ и $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим функции: $y = \sin 2x$ и $y = \cos 2x$.





Пример.

Найдите все значения параметра p , при которых уравнение $(\sin 3x \cos x - \sin 2x)\sqrt{p^2 - x^2} = 0$ имеет ровно три корня.

Решение.

Преобразуем выражение в скобках: $\left(\frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x) - \sin 2x\right)\sqrt{p^2 - x^2} = 0$

далее $\left(\frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x) - \sin 2x\right)\sqrt{p^2 - x^2} = 0$ и $\left(\sin 2x \cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\sqrt{p^2 - x^2} = 0$.

Вынесем общий множитель за скобки $\sin 2x\left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{p^2 - x^2} = 0$

Воспользуемся свойством равенства нулю произведения:

$$\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ p^2 - x^2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \cos 2x - \frac{1}{2} = 0, \\ p^2 - x^2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sqrt{p^2 - x^2} = 0 \\ x = \pm p \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ |x| \leq p \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ |x| \leq p \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}, \\ |x| \leq p \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ |x| \leq p \end{cases}$$

Ответ.

при $-\frac{\pi}{6} \leq p < 0$ и $0 < p \leq \frac{\pi}{6}$.

УМК «Лаборатория А.Г. Мордковича»





профессор МГПУ, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, научный руководитель Международного семинара преподавателей математики педвузов (1987 г.-н.в.);

имеет награды: Премия Президента РФ в области образования, заслуженный деятель науки РФ, Отличник народного образования, Медаль К.Д.Ушинского.

Павел Владимирович Семёнов



профессор факультета математики НИУ ВШЭ, доктор физико-математических наук, профессор, член Федеральной предметной группы по разработке КИМ для ЕГЭ по математике (2001-2007 гг), разработчик заданий с развернутым ответом, автор более 20 учебно-методических пособий по подготовке учащихся к ЕГЭ и подготовке экспертов к проверке работ учащихся;

имеет награды: Почётный работник высшего профессионального образования РФ; Почетная грамота Министерства образования РФ.

Лидия Александровна Александрова



учитель математики, методист ГБОУ Школы 1317 г. Москва, учитель высшей категории, член предметной комиссии по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ по математике;

имеет награды: Отличник народного просвещения РФ.

Елена Львовна Мардахаева



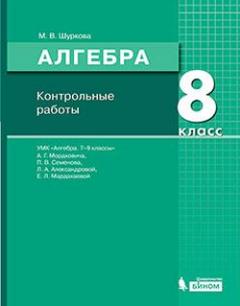
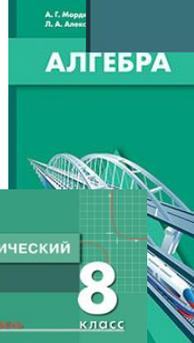
заведующий лабораторией математики службы продвижения «Бином», кандидат педагогических наук, доцент, председатель предметной комиссии ЕГЭ по математике Московской области (2006-2007 гг); член-корреспондент Международной академии научного педагогического образования (МАНПО);

имеет награды: Грант Москвы в сфере образования; Почётная грамота Министерства образования Московской области.

Алгебра, 7-9-е классы
Алгебра и начала математического анализа, 10-11
классы

Включены в Федеральный перечень

- Учебники
- ЭФУ
- Примерные рабочие программы
- Методические пособия для учителя
- Рабочие тетради
- Контрольные работы
- Самостоятельные и проверочные работы
- Алгебраические практикумы



Отличительные особенности УМК «Лаборатория А.Г. Мордковича»



Курс построен на основе приоритетности функционально-графической линии, математическое моделирование является идейным стержнем.

Учебник и задачник соединены в одну книгу.

Порядок тем соответствует ПООП, отражает психологические особенности обучающихся.

Выстроена вероятностно-стохастическая линия в тесной взаимосвязи с основным содержанием.

Каждая глава содержит разделы «Повторение», «Итак, в Главе...», «Вопросы», «Дополнительные задачи», «Из истории математики».

Трёхуровневая система заданий отражает требования ФГОС ОО, итоговой аттестации. Добавлены задачи практического содержания, высокого уровня сложности.

Включён материал, рекомендованный к изучению с использованием ИТ-средств.

Авторский сайт <https://elenamard.jimdo.com>



Главная	Об авторском коллективе	Материалы к урокам	Где купить УМК А.Г.Мордковича и др.
Современный урок	Внеурочная деятельность	Электронные ресурсы	
ИКТ на уроках алгебры: методические рекомендации	Апробация УМК	Семинары, конференции, конкурсы	
Вебинары	Курсы повышения квалификации	Обратная связь	

Лаборатория математики: в помощь учителю

НОВОСТИ!

Приказом Министерства просвещения Российской Федерации от **23 декабря 2020 года № 766** утверждён актуальный до 2025 года федеральный перечень учебных пособий, рекомендуемых к использованию при реализации государственной аккредитации образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования.

Включены следующие УМК:

1.1.2.4.2.13.1. Мордкович А.Г., Семенов П.В., Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л. Алгебра. 7 класс. - Москва : Просвещение, 2021.

1.1.2.4.2.13.2. Мордкович А.Г., Семенов П.В., Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л. Алгебра. 8 класс. - Москва : Просвещение, 2021.

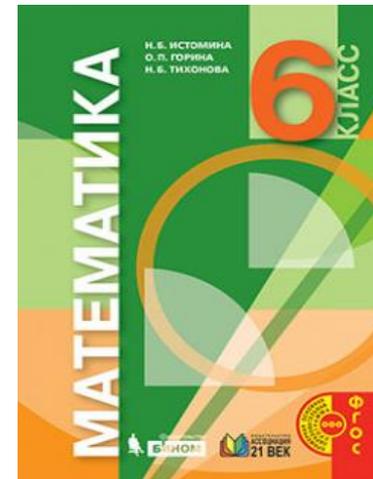
Сайт Лаборатории математики "Бином" ГК "Просвещение"

Сайт для учителей математики. Для тех, кто любит свою профессию и хочет сделать преподавание математики в школе



Математика, 5-6 классы

Авторы: Н.Б.Истомина,
О.П.Горина, Н.Б.Тихонова



Включены в Федеральный перечень



- Учебники
- Рабочие тетради
- Тестовые задания
- Методические пособия для учителя
- Пособия для внеурочной деятельности:
«Наглядная геометрия», «Учимся решать комбинаторные задачи»



Методическая поддержка через сайт издательства <http://www.lbz.ru>

Главная - elenamard | Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний» | lbz.ru

БИНОМ
Лаборатория знаний

Тармонья | СИСТЕМА Д.Б. ЗЕЛЬКОНИНА - В.В. ДАВЫДОВА | МЕТОДИЧЕСКАЯ ПОДДЕРЖКА | СИСТЕМА РАЗВИВАЮЩЕГО ОБУЧЕНИЯ Л.В. ЗАНКОВА | БИНОМ ДЕТСТВА

+7 (495) 789-30-40
YKrylova@prosv.ru
Поиск по сайту | Найти

ГЛАВНАЯ | ОБ ИЗДАТЕЛЬСТВЕ | ДОКУМЕНТЫ | ЭФУ БИНОМ | АВТОРСКИЕ МАСТЕРСКИЕ | ИНТЕРНЕТ-ГАЗЕТЫ | ВЕБИНАРЫ | КАК КУПИТЬ | КОНТАКТЫ

Каталог

Поиск книг

Новинки
Новинки БИНОМ. Лаборатория знаний
Новинки БИНОМ Детства

Система «Учусь учиться» Л.Г. Петерсон
Мир открытый
Мир деятельности
Математика

Дошкольное образование
Раннее развитие
Читаем дома и в детском саду
Книги и тетради Елены Матвеевой
Учимся играя. Книги-игры
Книги Юлии Даниловой
Школа Натальи Теремковой
Школа развития МАЯК
Книги в дорогу. Досуг для выходных
Развитие речи
Учимся читать
Учимся писать
Учимся считать. Математика
Мир вокруг нас
Готовимся к школе
Программы дошкольного образования
Мир открытый
Английский язык
Ступеньки детства
Моя Москва
Развиваем таланты

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»

Опубликован обновленный федеральный перечень учебников

2 марта 2021 года опубликован Приказ № 766 Министерства просвещения Российской Федерации от 23.12.2020

В разделе **Документы** публикуются законы, официальные письма, приказы Минобрнауки РФ, образовательные стандарты, примерные основные образовательные программы, рекламные материалы Издательства, официальные документы. **Читайте новые информационные письма!** Опубликовано официальное письмо о вступлении в силу Приказа об утверждении Федерального перечня учебников (от 1 октября 2020).

Пользователям сайта: как получить полную информацию о книге

Основной всего нашего сайта является **каталог пособий** - полную информацию вы видите слева. Зайдя в нужный вам раздел, вы попадаете на

сертификат_Уфа_....pdf | сертификат_Тамб_....pdf | сертификат_Казан_....pdf | сертификат_Белго_....pdf | 3_Описание_УМК_....pdf | Показать все

Приказ № 766 от 23.12.2020

О внесении изменений в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, утверждённый приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 20.05.2020 г. № 254

1.1.2.4.1.11.1 1.1.2.4.1.11.2	Математика	Истомина Н.Б., Горина О.П., Тихонова Н.Б.	5 6	АО «Издательство «Просвещение»	Конобеева Т.А., Бондаренко Р.А., Кожанова А.П., Павлова Л.А.	До 1 июля 2025 года
1.1.2.4.1.3.1 1.1.2.4.1.3.2	Математика	Петерсон Л.Г., Дорофеев Г.В.	5 6	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»; АО «Издательство «Просвещение»		От 20 мая 2020 года № 254
1.1.2.4.2.13.1 1.1.2.4.2.13.2 1.1.2.4.2.13.3	Алгебра	Мордкович А.Г., Семенов П.В., Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л.	7 8 9	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»; АО «Издательство «Просвещение»		От 20 мая 2020 года № 254
1.1.2.4.2.11.1 1.1.2.4.2.11.2 1.1.2.4.2.11.3	Алгебра	Петерсон Л.Г., Агаханов Н.,Х., Петрович А.Ю. и др.	7 8 9	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»; АО «Издательство «Просвещение»		От 20 мая 2020 года № 254
1.1.2.4.3.10.1 1.1.2.4.3.10.2 1.1.2.4.3.10.3	Геометрия	Смирнов В.А., Смирнова И.М.	7 8 9	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»; АО «Издательство «Просвещение»		От 20 мая 2020 года № 254
1.1.3.4.1.25.1 1.1.3.4.1.25.2	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа	Мордкович А.Г., Семенов П.В., Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л.	10 11	АО «Издательство «Просвещение»	Польшакова О.Е., Еремченко И.А., Кожанова А.П., Кочагина М.Н.	До 28 июня 2025 года



**Спасибо за внимание!
Удачи в делах!**

Адрес обратной связи:

kaf.matematika@gmail.com

Авторский сайт:

<https://elenamard.jimdo.com/>

Сайт издательства:

<http://lbz.ru/>

Мы готовы к диалогу!



Компания №1 на рынке дистрибуции учебной литературы

- официальный представитель крупнейших издательств России;
- самый полный ассортимент учебно-методической литературы;
 - большой опыт в выполнении муниципальных заказов;
 - практика методического сопровождения.

Мы готовы к сотрудничеству со всеми заинтересованными сторонами образовательного процесса.

ООО «Торговая компания «Абрис»

Сайт <https://www.tdabris.ru/>

Телефон +7 (495) 139-89-40, +7 (495) 981-10-39

e-mail: abrisd@textbook.ru