ЭФФЕКТИВНЫЕ ПРИЁМЫ ОБУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАМ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В 11-М КЛАССЕ

21.09.2021 г.

Вопросы для обсуждения

1. Основные принципы построения курса алгебры и начал математического анализа.
2. Методические особенности введения понятия предела в школе.
3. Методические особенности введения понятия производной.
4. Примеры из педагогической практики.

1. Основные принципы построения курса алгебры и начал математического анализа.

ЛАБОРАТОРИЯ

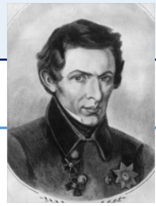
А. Г. Мордковича

Алгебра, 7-9 классы

Авторы:
Мордкович А.Г., Семенов П.В.,
Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л.

Математика – это язык, на котором говорят все точные науки.

Н.И.Лобачевский



Алгебра и начала математического анализа, 10-11 классы

Класс	Функция	Реальные и физические процессы
7 класс	Линейная функция.	Равномерные процессы.
8 класс	Квадратичная функция. Функции $y=\|x\|$, $y=\dfrac{k}{x}$ и $y=\sqrt{x}$.	Равноускоренные процессы.
9 класс	Функции $y=x^3$ и $y=\sqrt[3]{x}$. Обобщение изученного в основной школе, формализация некоторых определений и понятий.	
10 класс	Тригонометрические функции. Степенные, показательные и логарифмические функции.	Периодические процессы, гармонические колебания. Процессы органического роста.
11 класс	Элементы теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления; обобщение изученного.	Мгновенная скорость, площадь и объём, оптимальные значения некоторых величин.

Принципы построения содержания

Принцип крупных блоков.

- Раздел изучается компактно, без перебивок.

Отсутствие тупиковых тем.

- Ни в одном классе ни одна тема не должна быть «тупиковой», т. е. не связанной с предшествующим или последующим материалом.

Принцип детерминированности, логической завершённости построения курса.

- Порядок изучения тем понятен учителю.

Принцип завершённости в пределах учебного года.

- Каждый класс – это определённая серия математического романса, имеющая свою внутреннюю интригу и более-менее законченное содержание.

Приоритетность функционально-графической линии.

- Даёт возможность развития обоих полушарий мозга.

функции → уравнения → преобразования

Стратегия и тактика изучения свойств функций

Н – наглядно-интуитивный уровень

Р – рабочий уровень

Ф – формальное определение свойства

Свойство	Класс				
	7-й	8-й	9-й	10-й	11-й
Область определения	Н	Р	Ф	Ф	Ф
Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке	Н	Р	Ф	Ф	Ф
Монотонность	Н	Р	Ф	Ф	Ф
Непрерывность	Н	Н	Н	Н	Ф
Ограниченность	-	Н, Р	Ф	Ф	Ф
Выпуклость	-	Н	Н	Н	Н
Область значений	-	Н, Р	Ф	Ф	Ф
Четность	-	-	Ф	Ф	Ф
Периодичность	-	-	-	Ф	Ф
Дифференцируемость	-	-	-	-	Н
Экстремумы	-	-	-	-	Ф

Содержательное структурирование системы упражнений

преобразование графиков

Инвариантное ядро системы залач состоит из шести направлений

отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на заданном промежутке

графическое решение уравнений, систем уравнений и неравенств

функциональная символика

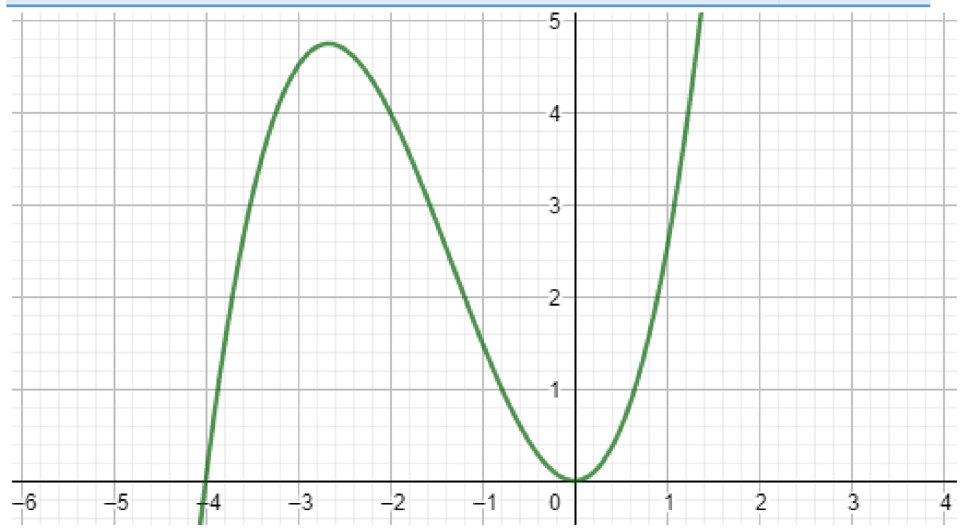
кусочно заданные функции

чтение графика

Тематическое планирование

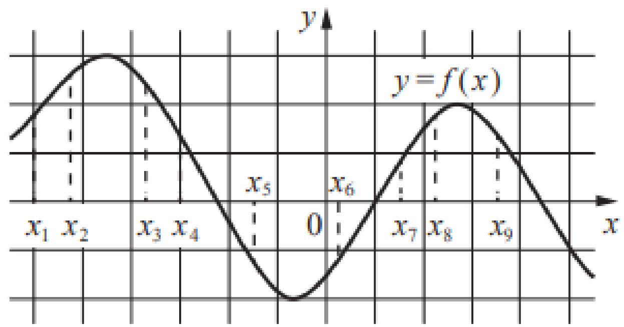
пп	Тема	Кол-во часов
	Глава 1. Элементы теории пределов	**10**
1	Предел числовой последовательности	2
2	Арифметические операции над пределами числовых последовательностей.	2
3	Предел функции на бесконечности.	2
4	Предел функции в точке.	2
5	Приращение функции. Приращение аргумента.	1
	Контрольная работа № 1.	*1*
	Глава 2. Производная.	**20**
6	Определение производной.	2
7	Алгоритм вычисления производной.	2
8	*Дифференцируемые функции*	1
9	Уравнение касательной к графику функции	2
10	Арифметические операции над производными.	2
	Контрольная работа № 2.	*1*
11	Дифференцирование тригонометрических функций.	2
12	Дифференцирование функций вида $y = f(kx+m)$.	1
13	Дифференцирование степенных функций.	3
14	Дифференцирование показательных и логарифмических функций.	3
	Контрольная работа № 3.	*1*

пп	Тема	Кол-во часов
	Глава 3. Исследование функций с помощью производной.	**16**
15	Исследование функций на монотонность.	3
16	Исследование функций на экстремум.	3
17	О построении графиков функций.	2
18	Нахождение наименьшего и наибольшего значений функций на промежутке.	3
19	Задачи на отыскание наименьших и наибольших значений величин.	*3*
	Контрольная работа № 4.	2



ЕГЭ

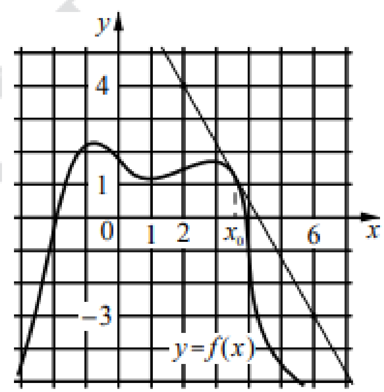
6 На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: x_1, x_2, ... x_9.



Найдите все отмеченные точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответе укажите количество этих точек.

Ответ: ___________________________.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

ЕГЭ

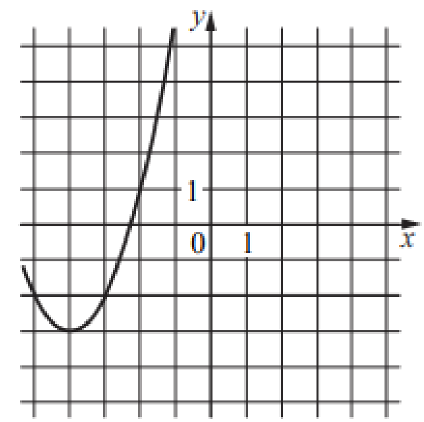
7 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковой сигнал частотой 749 МГц. Приёмник регистрирует частоту сигнала, отражённого от дна океана. Скорость погружения батискафа (в м/с) и частоты связаны соотношением

$$v = c\cdot\frac{f - f_0}{f + f_0},$$

где $c = 1500$ м/с – скорость звука в воде, f_0 – частота испускаемого сигнала (в МГц), f – частота отражённого сигнала (в МГц). Найдите частоту отражённого сигнала (в МГц), если батискаф погружается со скоростью 2 м/с.

Ответ: ___________________________.

9 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c — целые. Найдите значение $f(-12)$.



Ответ: ___________________________.

11 Найдите наименьшее значение функции

$$y = 9x - 9\ln(x+11) + 7$$

на отрезке $[-10{,}5; 0]$.

Ответ: ___________________________.

Найдите точку максимума функции $y = (x+8)^2 \cdot e^{3-x}$.

Ответ: ___________________________.

Найдите точку минимума функции $y = -\dfrac{x}{x^2+256}$.

Ответ: ___________________________.

2. Методические особенности введения понятия предела в школе.

ЛАБОРАТОРИЯ
А.Г. Мордковича

Глава 1

Элементы теории пределов

§ 1. Предел числовой последовательности

С числовыми последовательностями вы познакомились в курсе алгебры 9-го класса. Напомним, что *числовой последовательностью* называют функцию натурального аргумента, т. е. функцию вида $y = f(x)$, $x \in \boldsymbol{N}$. Числовую последовательность обозначают или $y = f(n)$, или коротко (y_n), или подробнее, выписывая несколько членов последовательности: $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$.

Удобнее всего *аналитическое задание* последовательности, когда указана формула её n-го члена. Например, формулой $y_n = n^2 + 1$ задаётся последовательность 2, 5, 10, 17, 26, ..., формулой $y_n = \dfrac{1}{n}$ — последовательность $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dots$, а формулой $y_n = a + (n - 1)d$ — арифметическая прогрессия $a, a + d, a + 2d, \dots$ со знаменателем d и первым членом a.

Последовательность (y_n) называют *возрастающей*, если каждый её член больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_{n-1} < y_n < y_{n+1} < \dots .$$

Последовательность (y_n) называют *убывающей*, если каждый её член меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > \dots > y_{n-1} > y_n > y_{n+1} > \dots .$$

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином *монотонные последовательности*.

Например,

3, 5, 7, 9, 11, 13, ..., $2n + 1$, ... — возрастающая последовательность,

64, 32, 16, 8, 4, 2, ..., $\dfrac{64}{2^{n-1}}$, ... — убывающая последовательность;

а последовательность 3, 64, 5, 32, 7, 16, 9, 8, 11, 4, 13, 2, ... не является монотонной, она и не возрастающая, и не убывающая.

Познакомимся ещё с одним свойством числовых последовательностей.

Определение 1. Последовательность (y_n) называют **ограниченной сверху**, если существует число M такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \leqslant M$. Число M называют **верхней границей** последовательности. Последовательность (y_n) называют **ограниченной снизу**, если существует число m такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \geqslant m$. Число m называют **нижней границей** последовательности. Если последовательность ограничена и снизу, и сверху, то её называют **ограниченной последовательностью.**

Например,

— последовательность 3, 5, 7, 9, 11, 13, ..., $2n + 1$, ... ограничена снизу (в качестве нижней границы можно взять число 3, как, впрочем, и любое число, меньшее, чем 3),

— последовательность 64, 32, 16, 8, 4, 2, ..., $\dfrac{64}{2^{n-1}}$, ... ограничена сверху (в качестве верхней границы можно взять число 64, как, впрочем, и любое число, большее чем 64).

Обратите внимание: последовательность 64, 32, 16, 8, 4, 2, ..., $\dfrac{64}{2^{n-1}}$, ... ограничена и снизу, ведь все её члены больше нуля. Это — ограниченная последовательность. А вот ещё один весьма показательный пример ограниченной последовательности: $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$.

Итак, мы обсудили два достаточно простых свойства числовых последовательностей: монотонность и ограниченность. Более сложным является свойство сходимости, к обсуждению которого мы сейчас приступим. Для этого нам понадобится понятие окрестности точки.

Определение 2. Интервал $(a - r;\ a + r)$, где $r > 0$, называют **окрестностью точки a**; число r называют **радиусом окрестности.**

Например, на рисунке 1, *а* изображена окрестность точки 2 радиусом 0,1, а на рисунке 1, *б* — окрестность точки −3 радиусом 1.

Рассмотрим две последовательности:

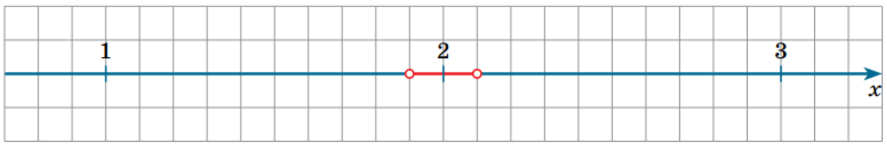
$$(x_n)\!: -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots, (-1)^n \frac{1}{n}, \dots$$

$$(y_n)\!: 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, n, \dots$$

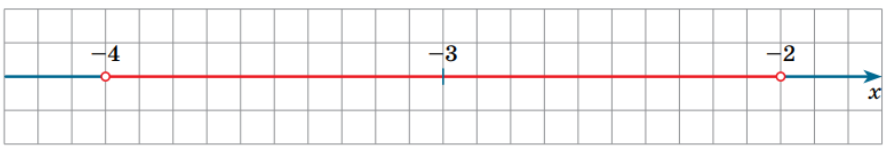
Элементы теории пределов

§ 1. Предел числовой последовательности

На рисунке 2 члены последовательности (x_n) изображены точками на числовой прямой. Обратите внимание: по мере увеличения номера члены последовательности всё ближе и ближе подходят к точке 0. Более точно: какую бы окрестность точки 0 ни выбрали, с некоторого



а



б

Рис. 1

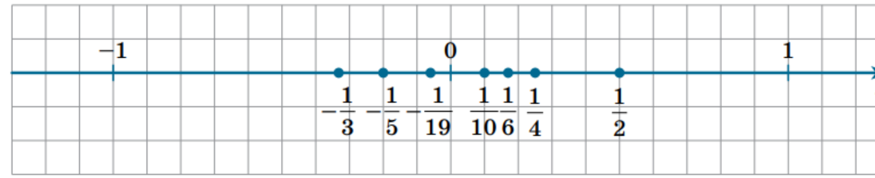


Рис. 2

номера все члены последовательности попадут в выбранную окрестность. Пусть, например, радиус окрестности равен 0,1, т. е. речь идёт об интервале (−0,1; 0,1). Все члены последовательности, начиная с одиннадцатого, принадлежат выбранной окрестности:

$$-\frac{1}{11} \in (-0{,}1;\ 0{,}1),\quad \frac{1}{12} \in (-0{,}1;\ 0{,}1),$$
$$-\frac{1}{13} \in (-0{,}1;\ 0{,}1),\quad \frac{1}{14} \in (-0{,}1;\ 0{,}1),\ \ldots$$

Другой пример: радиус окрестности равен 0,03, т. е. речь идёт об интервале (−0,03; 0,03). Ясно, что $0{,}01 < 0{,}03$, т. е. $\frac{1}{100}$ принадлежит интервалу (−0,03; 0,03). Начиная с $\frac{1}{100}$, все члены последовательности $\left(\frac{1}{100}, -\frac{1}{101}, \frac{1}{102}, -\frac{1}{103}, \ldots\right)$ попадают в окрестность точки 0 радиусом 0,03 (на самом деле, последовательность (x_n) попадает в эту окрестность даже с более раннего номера, с номера 34, поскольку $x_{34} = \frac{1}{34} < \frac{3}{100}$). Рассмотренную ситуацию обычно описывают слова-

ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича

Глава 1
Элементы теории пределов

§ 2. Арифметические операции над пределами числовых последовательностей

В предыдущем параграфе мы отметили следующие соотношения:

$$\lim_{n\to\infty} c = c; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0; \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0, \text{ если } |q| < 1.$$

Для вычисления пределов последовательностей в более сложных случаях используются указанные соотношения и следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 1. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$, то

1) предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = b + c;$$

2) предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = bc;$$

3) предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{b}{c},\ c \neq 0;$$

4) постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty}(kx_n) = kb.$$

Пример Вычислить:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^4}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n} - \frac{2}{n^7} + 3\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 + 5}$.

Решение. а) Имеем: $\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$. Применив правило «предел произведения», получим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

б)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^4} = \lim_{n\to\infty}\left(3 \cdot \frac{1}{n^4}\right) = 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} =$$
$$= 3 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

Вообще для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{k}{n^m} = 0.}$$

в) Применив правило «предел суммы», получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n} - \frac{2}{n^7} + 3\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^7} + \lim_{n\to\infty} 3 = 0 - 0 + 3 = 3.$$

в) Применив правило «предел суммы», получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n} - \frac{2}{n^7} + 3\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{n} - \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^7} + \lim_{n\to\infty} 3 = 0 - 0 + 3 = 3.$$

г) Разделим числитель и знаменатель дроби $\frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 + 5}$ почленно на n^2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{5}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{5}{n^2}}.$$

А теперь смотрите: предел числителя равен 2, предел знаменателя 1, значит, предел дроби равен $\frac{2}{1}$, т. е. равен 2.

Ответ: а) 0; б) 0; в) 3; г) 2.

§ 2. Арифметические операции над пределами числовых последовательностей

Приложение к § 2
Задача о непрерывных процентах

В 10-м классе, используя наглядные представления о проведении касательной к графику функции, мы познакомились с числом e и с экспоненциальной функцией $y = e^x$, которые играют важную роль в математике. Познакомим вас с задачей о так называемых *непрерывных процентах*.

Допустим, что банк даёт $p\,\%$ годовых, например, в рублях. Это означает, что, положив в банк S р., через год вы получите сумму $\left(S + \frac{p}{100}S\right)$ р. Обозначим $x = \frac{p}{100}$. Итак, было S р., через год стало $(1 + x)S$ р.

Допустим, что по договору проценты можно получать каждые полгода и переоформлять вклад на тех же условиях. Тогда через первые полгода получится сумма $\left(1 + \frac{x}{2}\right)S$ р. Если всю сумму переложить ещё на полгода, то в итоге через год на счёте будет

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(\left(1 + \frac{x}{2}\right)S\right) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 S \text{ р.}$$

Это больше, чем просто за год, так как

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{4} > 1 + x.$$

Если проценты можно получать каждые четыре месяца, т. е. три раза за год, то в итоге получится

$$\left(1 + \frac{x}{3}\right)\left(1 + \frac{x}{3}\right)\left(1 + \frac{x}{3}\right)S = \left(1 + \frac{x}{3}\right)^3 S \text{ р.}$$

Это больше, чем при выплатах каждые полгода:

$$\left(1 + \frac{x}{3}\right)^3 = 1 + 3\cdot\frac{x}{3} + 3\cdot\frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} > 1 + x + \frac{x^2}{4}.$$

При получении процентов каждый квартал, т. е. 4 раза в год, итоговая сумма снова увеличится. Она станет равной $\left(1 + \frac{x}{4}\right)^4 S$ р., и можно проверить, что $\left(1 + \frac{x}{4}\right)^4 > \left(1 + \frac{x}{3}\right)^3$. А если представить, что проценты можно получать ежедневно, то за год наберётся сумма $\left(1 + \frac{x}{365}\right)^{365} S$ р. При этом

$$1 + x < \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 < \left(1 + \frac{x}{3}\right)^3 < \left(1 + \frac{x}{4}\right)^4 < \ldots < \left(1 + \frac{x}{365}\right)^{365} < \ldots.$$

Казалось бы, увеличивая частоту получения процентов, т. е. получая их или каждый час, или каждую минуту и т. п., можно неограниченно увеличивать общий годовой итог $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n S$. Оказывается, эта неограниченность — иллюзия. На самом деле возрастающая последовательность $y_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, где $x > 0$, *ограничена сверху* и, как всякая монотонная ограниченная последовательность, имеет предел (см. свойство 3 в § 1). Интересно, что предел этой последовательности равен как раз значению экспоненциальной функции в точке x. И это верно для любых, не только положительных значений x.

Теорема 3 (второй замечательный предел). Для любого $x \in \mathbf{R}$ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

В частности, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}71828182845\ldots$.

Почему предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ назван *вторым* замечательным пределом? Потому что существует и *первый замечательный предел*, с которым вы познакомитесь в § 4.

ЛАБОРАТОРИЯ А. Г. Мордковича

Глава 1
Элементы теории пределов

§ 3. Предел функции на бесконечности

На рисунке 4 изображён график функции $y = f(x)$, прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции при $x \to +\infty$. В подобных случаях используют короткую запись: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (читают: *предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к плюс бесконечности равен b*).

На рисунке 5 изображён график показательной функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, у него есть горизонтальная асимптота $y = 0$ (при $x \to +\infty$). Это значит, что справедливо соотношение $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$.

На рисунке 6 изображён график функции $y = f(x)$, прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции при $x \to -\infty$. В подобных случаях используют короткую запись: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ (читают: *предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к минус бесконечности равен b*).

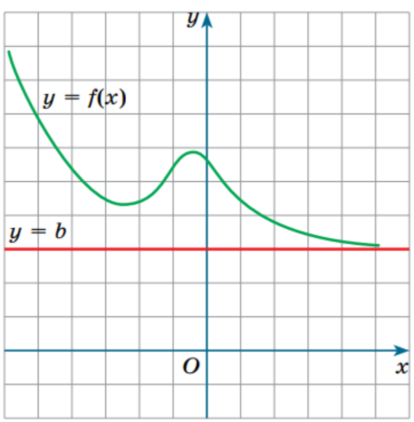


Рис. 4

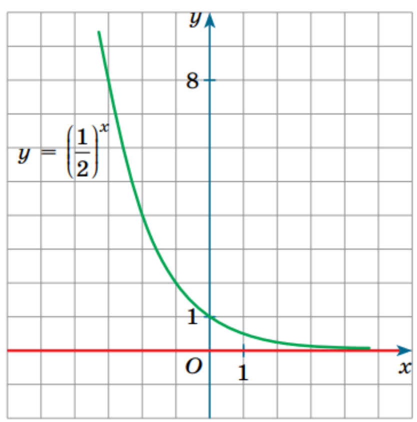


Рис. 5

На рисунке 7 изображён график показательной функции $y = e^x$ (экспонента). У него есть горизонтальная асимптота $y = 0$ при $x \to -\infty$. Это значит, что справедливо соотношение $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

Если для функции $y = f(x)$ одновременно выполняются соотношения $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, то их можно объединить одной записью: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ (читают: *предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к бесконечности равен b*). В этом случае у графика функции $y = f(x)$ имеется горизонтальная асимптота $y = b$ и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$ (рис. 8).

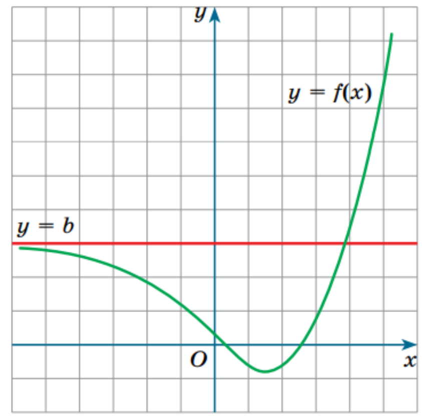


Рис. 6

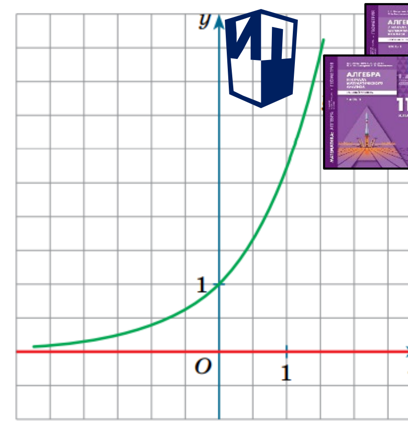


Рис. 7

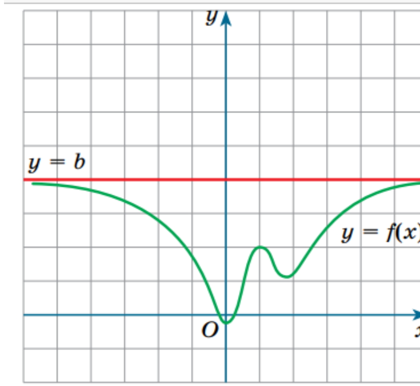


Рис. 8

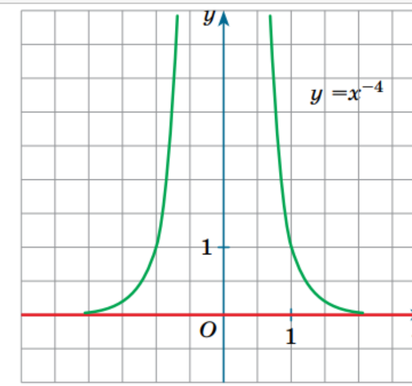


Рис. 9

На рисунке 9 изображён график степенной функции $y = x^{-4}$, у него есть горизонтальная асимптота $y = 0$ (и при $x \to +\infty$, и при $x \to -\infty$). Это значит, что справедливо соотношение $\lim\limits_{x \to \infty} x^{-4} = 0$, т. е. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^4} = 0$.

Вообще для любого натурального числа n справедливо соотношение

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0.}$$

Глава 1

Элементы теории пределов

§ 4. Предел функции в точке

На рисунке 12 изображён график непрерывной функции $y = f(x)$. На графике специально отмечена точка $(a; b)$, это значит, что $f(a) = b$.

Теперь сделаем следующее: воспользуемся тем же графиком, но точку $(a; b)$ исключим из рассмотрения (рис. 13). Это графическое задание другой функции, она отличается от функции $y = f(x)$ своей областью определения: первая функция определена в точке a, а вторая — нет. Поэтому функцию, график которой изображён на рисунке 13, мы обозначили по другому: $y = g(x)$.

Воспользуемся графиком функции $y = g(x)$ и сделаем следующее: «выколотую» точку $(a; b)$ расположим вне построенной кривой (рис. 14). Это уже третья функция, обозначим её $y = h(x)$: от функции $y = f(x)$ она отличается значением в точке a ($f(a) = b$, $h(a) \neq b$), а от функции $y = g(x)$ она отличается тем, что функция $y = h(x)$ определена в точке a (хотя и «неудачно»), а функция $y = g(x)$ не определена в точке a.

Итак, с помощью вроде бы незначительных манипуляций с одной и той же кривой мы получили три различные функции. Они отличаются друг от друга только своим поведением в точке $x = a$. Если же точку $x = a$ исключить из рассмотрения, то все три функции будут служить геометрической моделью одного и того же процесса. Учитывая это обстоятельство, математики решили во всех трёх случаях использовать родственные соотношения:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \quad \lim_{x \to a} g(x) = b, \quad \lim_{x \to a} h(x) = b$$

(читают: *предел функции* $y = f(x)$ ($y = g(x)$, $y = h(x)$ соответственно) *при стремлении* x *к* a *равен* b).

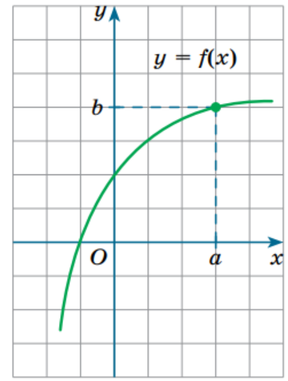


Рис. 12

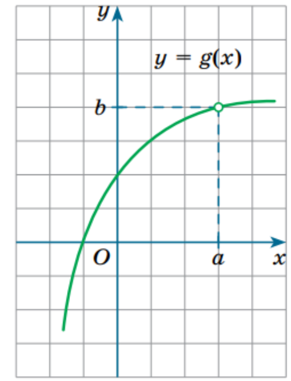


Рис. 13

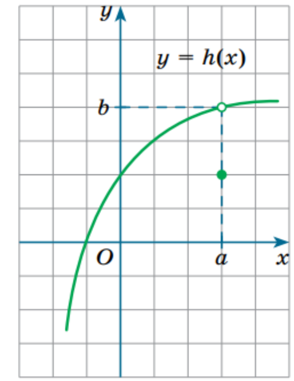


Рис. 14

Равенство $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ означает следующее: если значения аргумента x приближаются к значению $x = a$, то соответствующие значения функции приближаются к предельному значению b. При этом подчеркнём ещё раз, сама точка $x = a$ *исключается* из рассмотрения.

Вернёмся снова к рисункам 12—14, на которых изображены графики трёх функций, обладающих одним и тем же свойством: предел функции при $x \to a$ равен b. Какую из рассмотренных трёх функций естественно считать непрерывной в точке $x = a$? Ответ очевиден: непрерывной является первая функция $y = f(x)$ (рис. 12), которая удовлетворяет условию $f(a) = b$.

Понятие непрерывности функции мы использовали, начиная с 7-го класса. Мы говорили, что функция непрерывна, если, опираясь на интуицию, считали, что её график представляет собой сплошную линию. Теперь же мы можем сформулировать строгое определение.

Определение. Функцию $y = f(x)$ называют **непрерывной в точке** $\boldsymbol{x = a}$, если предел функции $y = f(x)$ при стремлении x к a равен значению функции в точке a, т. е. если выполняется соотношение

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a).}$$

Глава 1

Элементы теории пределов

§ 4. Предел функции в точке

Пример 1 Построить эскиз графика функции $y = f(x)$, обладающей следующими свойствами:

1) $D(f) = [0; +\infty)$;
2) $f(0) = 5$;
3) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$;
4) $f(2) = 0$;
5) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$.

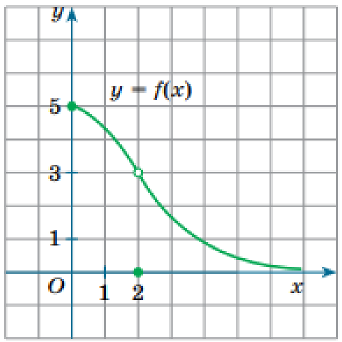


Рис. 15

Решение. Расшифруем указанные условия. Функция определена на луче $[0; +\infty)$ и $f(0) = 5$. Значит, график представляет собой линию, начинающуюся в точке $(0; 5)$. Далее, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$, но $f(2) = 0$, т. е. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$. Это значит, что в точке $x = 2$ функция не является непрерывной, $(2; 0)$ — изолированная точка графика (как на рис. 14).

И наконец, соотношение $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ означает, что у графика функции имеется горизонтальная асимптота $y = 0$ (ось Ox). Учитывая всё вышесказанное, строим возможный график, он представлен на рисунке 15.

Справедлива следующая теорема об арифметических операциях над пределами.

Теорема. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, то:

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = b + c$;
2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$;
3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$ (при условии, что $c \neq 0$);
4) $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = kb$.

В курсе высшей математики доказано следующее утверждение: *если выражение $f(x)$ составлено с помощью алгебраических операций из рациональных, иррациональных, тригонометрических, обратных тригонометрических, показательных, логарифмических выражений, то функция $y = f(x)$ непрерывна в любой точке, в которой определено выражение $f(x)$.*

Покажем, как это утверждение используется для вычисления пределов функций.

Пример 2 Вычислить:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 + x + 6}{x^3 + 3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos \pi x + \lg x}{2^x + 1}$.

Решение. а) Выражение $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 6}{x^3 + 3}$ определено в точке $x = 0$, значит, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, а потому $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x + 6}{x^3 + 3} = \frac{0^2 + 0 + 6}{0^3 + 3} = 2.$$

б) Выражение $f(x) = \dfrac{\cos \pi x + \lg x}{2^x + 1}$ определено в точке $x = 1$, значит, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = 1$, а потому $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos \pi x + \lg x}{2^x + 1} = \frac{\cos \pi + \lg 1}{2^1 + 1} = \frac{-1 + 0}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: а) 2; б) $-\dfrac{1}{3}$.

В примерах 2а и 2б вычисление пределов было весьма простым: достаточно было найти значение функции, предел которой вычисляется, в точке, к которой стремится аргумент x. К сожалению, этот приём срабатывает не всегда.

Глава 1

Элементы теории пределов

§ 4. Предел функции в точке

Наше знакомство с понятием предела, как вы, наверное, заметили, зачастую опирается на интуицию и наглядные представления. Тем не менее и на этом уровне можно получать важные результаты, полезные в приложениях. Рассмотрим один из таких результатов.

Возьмём числовую окружность, выберем достаточно малое положительное значение t, отметим на окружности точку $M(t)$ и её ординату, т. е. $\sin t$; значит, t — это длина дуги AM, $\sin t$ — это длина перпендикуляра MP (рис. 16).

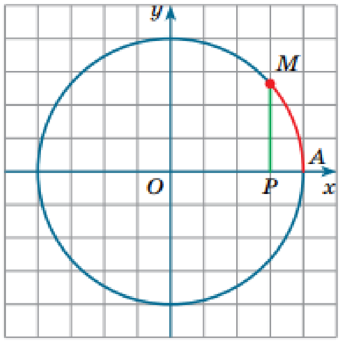


Рис. 16

Для достаточно малых значений t длина дуги AM примерно равна длине отрезка MP, т. е. выполняется приближённое равенство $\sin t \approx t$, и, следовательно, $\frac{\sin t}{t} \approx 1$. Чем меньше t, тем точнее это приближённое равенство. Если t — достаточно малое по модулю отрицательное число, то также $\frac{\sin t}{t} \approx 1$. Естественно предположить, что

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.}$$

В курсе высшей математики доказано, что это предположение верно. Равенство $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ называют в математике так: *первый замечательный предел* (а о втором замечательном пределе $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ мы говорили в приложении к § 2).

Пример 4 Вычислить:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{5x}$; б)* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2}$.

Решение. а) Имеем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x}.$$

Положим $t = 2x$ и заметим, что если $x \to 0$, то и $t \to 0$. Значит,

$$\frac{2}{5} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{5} \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5}.$$

Итак, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}$.

б)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin 3x \sin x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(6 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{\sin x}{x}\right) =$$

$$= 6 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 6 \cdot 1 \cdot 1 = 6.$$

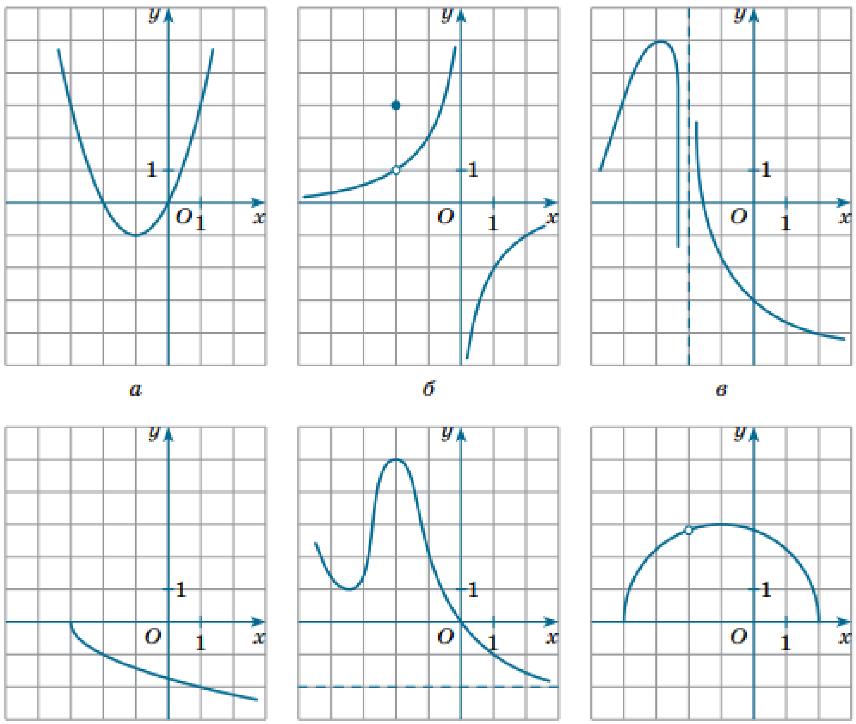
Ответ: а) $\frac{2}{5}$; б) 6.

Глава 1

Элементы теории пределов

§ 4. Предел функции в точке

4.1. Распределите функции, графики которых изображены на рисунке 17, *а*—*е*, на две группы: те, которые имеют предел при $x \to -2$, и те, которые не имеют предела при $x \to -2$. Укажите, чему равен предел функции при $x \to -2$, в тех случаях, когда этот предел существует.



а *б* *в* *г* *д* *е*

4.10. На рисунке 18 изображён график функции $y = f(x)$. Найдите:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$;
г) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;
б) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$;
д) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$;
в) $f(-2)$;
е) $f(2)$.

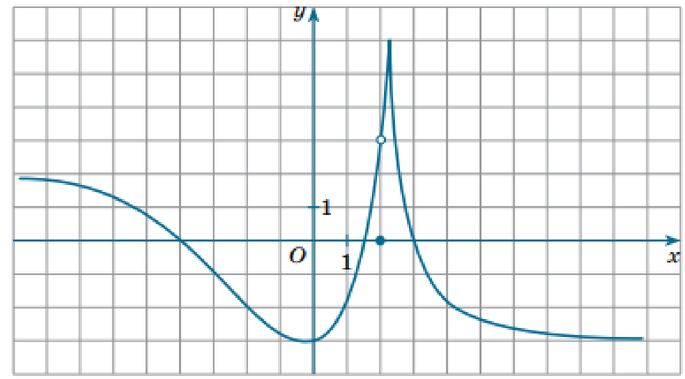


Рис. 18

Вычислите.

4.11. а) $\lim\limits_{x\to2}(x^2 - 2x - 4)$;
г) $\lim\limits_{x\to1}(x^2 + 2x - 7)$;
б) $\lim\limits_{x\to-1} x(x^2 + x - 6)$;
д) $\lim\limits_{x\to-2} x(x^2 - x + 9)$;
в) $\lim\limits_{x\to3}\sqrt{x+6}$;
е) $\lim\limits_{x\to-3}\sqrt{x+5}$.

4.13. а) $\lim\limits_{x\to2}\left(3^x - 2\cos\frac{\pi x}{2}\right)$;
б) $\lim\limits_{x\to4}\log_3(5x + 7)$;
в) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\lg(4 - 3x) + \ln(2x + 9)}{2^x - x}$;
г) $\lim\limits_{x\to3}\left(2^x + 5\sin\frac{\pi x}{18}\right)$;
д) $\lim\limits_{x\to8}\frac{\log_4 2x}{x - \log_{\sqrt{3}}(x - 5)}$;
е) $\lim\limits_{x\to-3}(\lg(6x + 118) + \ln(2x + 7))$.

4.14. а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{3x - x^2}$;
г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 8x}$;
б) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2 - 9}{x - 3}$;
д) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2 - 4}{x + 2}$;
в) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x - 2}{x^3 - 8}$;
е) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x + 1}{x^3 + 1}$.

Глава 1

Элементы теории пределов

§ 5. Приращение аргумента. Приращение функции

В название нашего учебного предмета входит словосочетание «элементы математического анализа». Что же анализируют? Анализируют, в частности, поведение функции $y = f(x)$ около конкретной точки x_0, анализируют, как меняется значение функции при изменении значения аргумента. Для этого используют понятия приращений аргумента и функции.

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в точках x_0 и x_1. Разность $x_1 - x_0$ называют **приращением аргумента** (при переходе от точки x_0 к точке x_1), а разность $f(x_1) - f(x_0)$ — **приращением функции.**

Приращение аргумента обозначают Δx (читают: *дельта икс*, Δ — прописная буква греческого алфавита «дельта»), приращение функции обозначают Δy или Δf.

Итак, $x_1 - x_0 = \Delta x$, значит, $x_1 = x_0 + \Delta x$.

$f(x_1) - f(x_0) = \Delta y$ (или Δf), значит,

$$\boxed{\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).}$$

Термин «приращение» не следует истолковывать буквально, как «прирост»: и Δx, и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными числами.

Пример Найти приращение аргумента и приращение функции $y = f(x)$, где $f(x) = x^2$, при переходе от точки $x_0 = 2$ к точке:

а) $x_1 = 2{,}2$; б) $x_2 = 1{,}99$.

Решение. а)

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 2{,}2 - 2 = 0{,}2;$$
$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0) = 2{,}2^2 - 2^2 = 4{,}84 - 4 = 0{,}84.$$

б)

$$\Delta x = x_2 - x_0 = 1{,}99 - 2 = -0{,}01;$$
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_0) = 1{,}99^2 - 2^2 = 3{,}9601 - 4 = -0{,}0399.$$

Ответ: а) $\Delta x = 0{,}2$, $\Delta y = 0{,}84$; б) $\Delta x = -0{,}01$, $\Delta y = -0{,}0399$.

Используя понятия приращений аргумента и функции, можно дать другой вариант определения непрерывности функции в точке, который оказывается полезным для многих приложений. Смотрите: функцию $y = f(x)$ называют непрерывной в точке $x = a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$; другими словами, $f(x) \to f(a)$ при $x \to a$, т. е. $f(x) - f(a) \to 0$ при $x - a \to 0$. Но $x - a = \Delta x$ и $f(x) - f(a) = \Delta y$. Значит, *функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$ в том, и только в том случае, когда в этой точке $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$.*

Как видите, теперь у нас есть два варианта определения непрерывности в точке:

функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$:

1) предел функции в точке равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

2) при стремлении приращения аргумента функции к нулю приращение функции также стремится к нулю: $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Первый вариант чаще используют в теории, второй — в приложениях.

Определение 2. Функцию $y = f(x)$ называют **непрерывной на промежутке X**, если она непрерывна в каждой точке промежутка.

Уточним, что означает непрерывность функции в концевой точке промежутка. Например, как понимать непрерывность функции в точках a и b отрезка $[a; b]$? Для точки a определение непрерывности будет выглядеть так:

если $\Delta x > 0$, $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$.

Для точки b определение непрерывности в терминах приращений будет выглядеть так:

если $\Delta x < 0$, $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$.

Например, справедливы следующие утверждения: функция $y = x^3$ непрерывна на всей числовой прямой; функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна на луче $[0; +\infty)$; функция $y = \log_a x$ непрерывна на открытом луче $(0; +\infty)$.

3. Методические особенности введения понятия производной.

LAB
ЛАБОРАТОРИЯ
А.Г. Мордковича

Глава 2
Производная

§ 6. Определение производной

Начнём с рассмотрения двух задач, совершенно различных по сюжету: первая задача — физическая, вторая — геометрическая. Как вы увидите, они в процессе решения приведут к одной и той же (новой для вас) математической модели.

Задача 1 (*о скорости движения*) По прямой, на которой заданы начало отсчёта, единица измерения (см) и направление, движется материальная точка. Закон движения задан формулой $s = s(t)$ (t — время (с), $s(t)$ — координата точки на прямой в момент времени t). Найти скорость движения тела в момент времени t.

Решение. В момент времени t материальная точка занимает положение M (рис. 19): $OM = s(t)$.

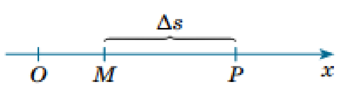


Рис. 19

Дадим аргументу t приращение Δt. Материальная точка в момент времени $t + \Delta t$ займёт положение P: $OP = s(t + \Delta t)$. Значит, за Δt секунд движущаяся точка переместилась из точки M в точку P. Имеем: $MP = OP - OM = s(t + \Delta t) - s(t)$. Итак, $MP = \Delta s$ (см).

Найдём среднюю скорость $v_{ср}$ движения материальной точки за промежуток времени $[t;\ t + \Delta t]$: $v_{ср} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Предел средней скорости движения за промежуток времени $[t;\ t + \Delta t]$ при условии, что Δt выбирается всё меньше и меньше, точнее, при условии, что $\Delta t \to 0$, называют *мгновенной скоростью движения в момент времени* t и обозначают $v(t)$. Таким образом,

$$v(t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Задача 2 (о касательной к графику функции) Дан график функции $y = f(x)$. На нём выбрана точка $M(a;\ f(a))$, в которой к графику функции можно провести касательную, не параллельную оси ординат (рис. 20). Найти угловой коэффициент касательной.

Решение. Дадим аргументу приращение Δx и рассмотрим на графике точку P с абсциссой $a + \Delta x$. Ордината точки P равна $f(a + \Delta x)$. Угловой коэффициент секущей MP, т. е. тангенс угла между прямой MP и осью Ox, можно найти из прямоугольного треугольника MPL: $k_{сек} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Если мы теперь устремим Δx к нулю, то точка P начнёт приближаться по кривой к точке M. В учебнике для

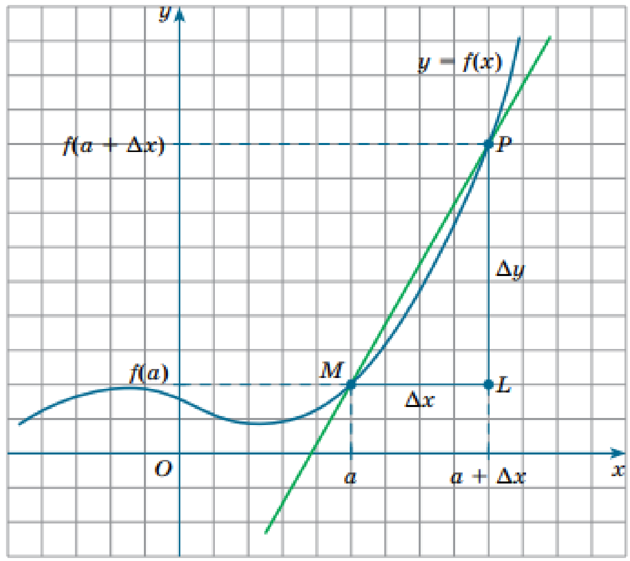


Рис. 20

Глава 2

Производная

§ 6. Определение производной

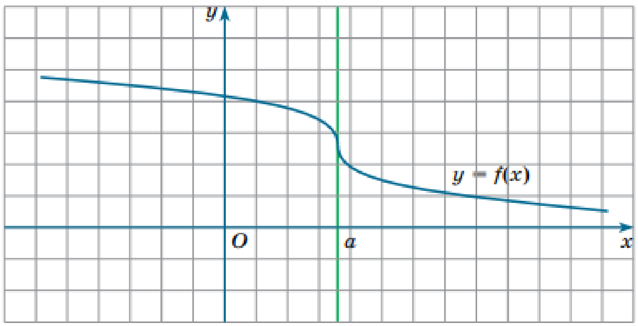


Рис. 21

10-го класса мы говорили о том, что *касательная — это предельное положение секущей MP при приближении точки P по графику к точке M*. Значит, угловой коэффициент k касательной вычисляется по формуле $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек}}$, а $k_{\text{сек}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Таким образом, для углового коэффициента касательной мы получаем следующую формулу:

$$\boxed{k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.}$$

Эту формулу мы вывели при условии, что касательная не параллельна оси ординат. Если же касательная к графику функции в точке a параллельна оси ординат (рис. 21), то уравнение такой касательной имеет вид $x = a$, об угловом коэффициенте говорить в этом случае некорректно.

Подведём итоги. Две различные задачи привели к одной и той же математической модели — пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Многие задачи из различных областей знания приводят в процессе решения к такой же математической модели. Значит, эту математическую модель надо специально изучить: ввести для этой модели название, дать определение и научиться работать с этой математической моделью.

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале. Возьмём точку x_0 из этого интервала и дадим аргументу приращение Δx такое, чтобы не выйти из этого интервала. Найдём приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ и составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют **производной функции $y = f(x)$ в точке x_0**; обозначают $f'(x_0)$ или, кратко, y'.

Итак,

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.}$$

Рассмотренные выше задачи 1 и 2 позволяют истолковать производную с физической и геометрической точек зрения.

Физический (механический) смысл производной состоит в следующем. Если $s = s(t)$ — закон прямолинейного движения, то производная выражает *мгновенную скорость* в момент времени t:

$$\boxed{v(t) = s'(t).}$$

Вообще, если некоторый реальный процесс протекает по закону $s = s(t)$, то производная $s'(t)$ выражает скорость протекания процесса в момент времени t. С математической точки зрения производная $f'(x)$ выражает *скорость изменения функции $y = f(x)$ в точке x*.

Рассмотрим, в частности, постоянную функцию $y = C$. Скорость её изменения равна нулю (ведь значения функции не меняются от точки к точке). Это значит, что

$$\boxed{(C)' = 0.}$$

Геометрический смысл производной состоит в следующем. Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси ординат, то $f'(a)$ выражает угловой коэффициент касательной:

$$\boxed{k = f'(a).}$$

Угловой коэффициент прямой — это тангенс угла между осью абсцисс и прямой. Значит,

$$f'(a) = \operatorname{tg} \alpha \text{ (рис. 22).}$$

Глава 2
Производная

§ 6. Определение производной

6.10. Используя рисунок 23, *а—г*, найдите значения $f'(x_1)$ и $f'(x_2)$.

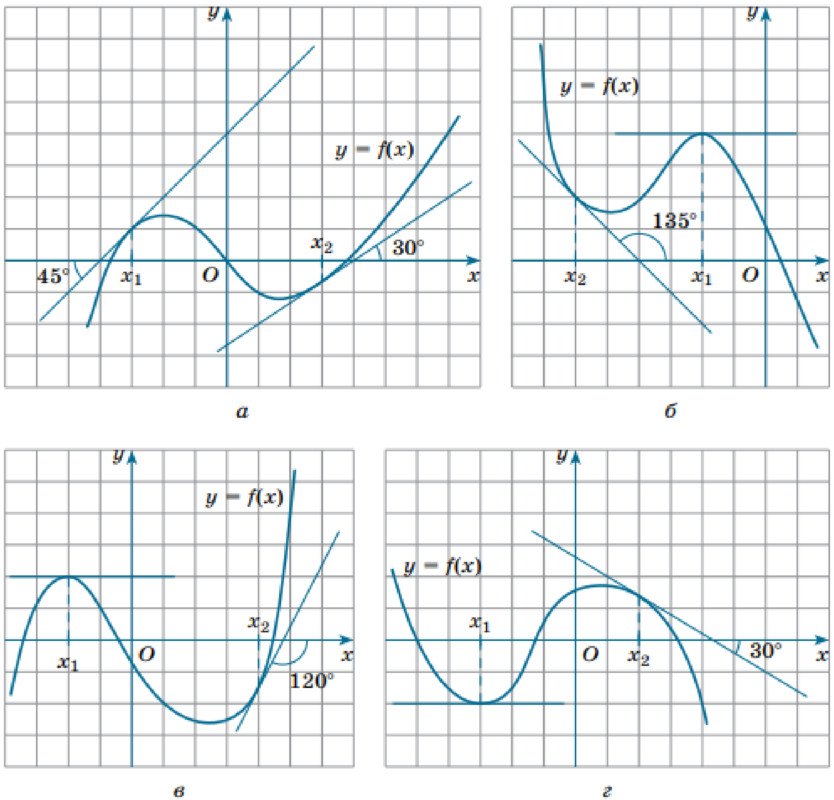


Рис. 23

6.15. На рисунке 26 изображён график функции $y = f(x)$. Приведите примеры таких целых значений аргумента x_1 и x_2, при которых выполняются условия:

а) $f'(x_1) = 0$, $f'(x_2) > 0$;
б) $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) > 0$;
в) $f'(x_1) < 0$, $f'(x_2) > 0$;
г) $f'(x_1) < 0$, $f'(x_2) = 0$;
д) $f'(x_1) < 0$, $f'(x_2) < 0$;
е) $f'(x_1) > 0$, $f'(x_2) < 0$.

6.13. На рисунке 24 изображён график функции $y = g(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, \ldots, x_8$. Верно ли утверждение:
а) угловой коэффициент касательной положителен в четырёх точках;
б) угловой коэффициент касательной положителен в трёх точках;
в) угловой коэффициент касательной отрицателен в трёх точках;
г) угловой коэффициент касательной отрицателен в двух точках;
д) угловой коэффициент касательной равен нулю в трёх точках;
е) угловой коэффициент касательной равен нулю в двух точках?

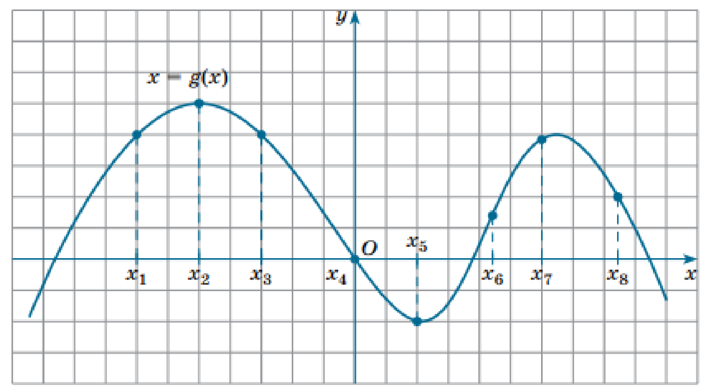


Рис. 24

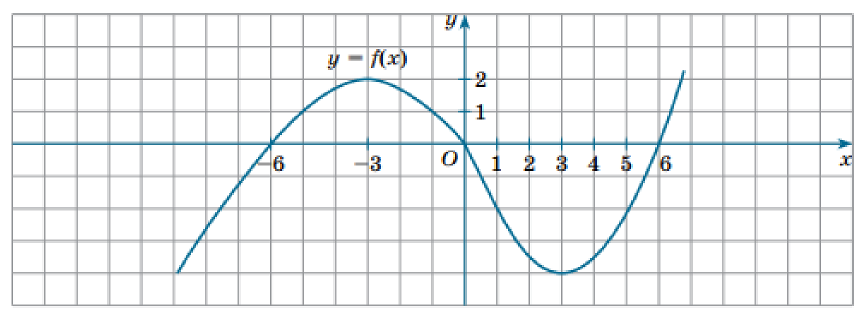


Рис. 26

Глава 2

Производная

§ 7. Алгоритм нахождения производной

Определение производной, сформулированное в предыдущем параграфе, удобно переформулировать в виде некоторого пошагового алгоритма действий по нахождению производной.

Алгоритм нахождения производной функции $y = f(x)$

1. Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.
2. Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Приведём несколько примеров использования алгоритма нахождения производной.

Функция $y = x^2$

1) Зафиксируем x. Найдём $f(x) = x^2$.
2) Дадим аргументу x приращение Δx, перейдём к $x + \Delta x$. Тогда

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2.$$

3) Найдём приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = \\ = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x).$$

4) Найдём отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

5) Вычислим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Так как x — фиксированное число, а $\Delta x \to 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Итак,

$$\boxed{(x^2)' = 2x.}$$

Если $f(x) = x^2$, то, в частности,

$$f'(0) = 2 \cdot 0 = 0; \quad f'(1) = 2 \cdot 1 = 2;$$
$$f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}; \quad f'(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}.$$

Функция $y = x^3$

1) Зафиксируем x. Найдём $f(x) = x^3$.
2) Дадим аргументу x приращение Δx, перейдём к $x + \Delta x$. Тогда

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3.$$

3) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3$. Используем формулу $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ разности кубов для $a = x + \Delta x$, $b = x$. Тогда

$$a - b = \Delta x$$

и

$$\Delta y = \Delta x((x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)x + x^2) = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2).$$

4) Найдём отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x^2 + 3x + \Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2.$$

5) Вычислим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Так как x — фиксированное число, а $\Delta x \to 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2) = 3x^2 + 3x \cdot 0 + 0^2 = 3x^2.$$

Итак,

$$\boxed{(x^3)' = 3x^2.}$$

Если $f(x) = x^3$, то, в частности,

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3; \quad f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}; \quad f'(\sqrt{5}) = 3 \cdot (\sqrt{5})^2 = 15.$$

ЛАБОРАТОРИЯ А.Г. Мордковича

Глава 2
Производная

§ 7. Алгоритм нахождения производной

Функция $y = \dfrac{1}{x}$

1) Зафиксируем x (для определённости полагаем, что $x > 0$); $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

2) Дадим аргументу x приращение Δx, перейдём к $x + \Delta x$ ($x + \Delta x > 0$). Тогда

$$f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}.$$

3) Найдём приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}.$$

4) Найдём отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}.$$

5) Вычислим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Так как x — фиксированное число, а $\Delta x \to 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

Итак,

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.}$$

Если $f(x) = \dfrac{1}{x}$, то, в частности,

$$f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1; \quad f'\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -9; \quad f'(\sqrt{5}) = -\frac{1}{(\sqrt{5})^2} = -\frac{1}{5}.$$

Функция $y = \sqrt{x}$

1) Зафиксируем $x > 0$; $f(x) = \sqrt{x}$.

2) Дадим аргументу x приращение Δx, перейдём к $x + \Delta x$ ($x + \Delta x > 0$). Тогда

$$f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}.$$

3) Найдём приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}.$$

4) Найдём отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

5) Вычислим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Как и в предыдущих случаях, учитываем, что x — фиксированное число, а $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Для вычисления этого предела домножим и числитель, и знаменатель дроби $\dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$ на выражение, сопряжённое числителю,

т. е. на $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$ (мы уже применяли этот приём ранее см. пример 3б из § 4). Получим:

$$\frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.$$

Значит, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Итак,

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.}$$

Глава 2
Производная

§ 8. Дифференцируемые функции

Алгоритм нахождения производной начинается с вычисления разностей $\Delta x = (x + \Delta x) - x$ и $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Слово «разность» на английском языке звучит как *difference*, на итальянском как *differenza*, а на испанском — *diferencia*. Видимо, по этой причине для процедуры нахождения производной функции в истории науки был выбран специальный термин — *дифференцирование функции*. Соответственно, для тех функций, для которых эта процедура даёт конечный ответ, также есть похожий термин.

Определение. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то функцию $y = f(x)$ называют **дифференцируемой в точке x_0**.

Для дифференцируемой функции есть формула приближённого вычисления её значений.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (1)$$

Смотрите, по определению $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. От этого точного равенства перейдём к приближённому равенству:

$$f'(x_0) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Обозначим $x_0 + \Delta x$ буквой x. Тогда $\Delta x = x - x_0$ и поэтому

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Пример Найти приближённое значение для $\sqrt{4{,}5}$.

Решение. Речь идёт о вычислении приближённого значения функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 4{,}5$.

Производная функции $y = \sqrt{x}$ равна $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Воспользуемся формулой (1):

$$\sqrt{x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0);$$

$$\sqrt{4{,}5} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4{,}5 - 4);$$

$$\sqrt{4{,}5} \approx 2 + \frac{0{,}5}{4} = 2{,}125.$$

Ответ: $\sqrt{4{,}5} \approx 2{,}125$.

Вычисление на калькуляторе показывает, что $\sqrt{4{,}5} = 2{,}12132\ldots$ Отсюда следует, что формула (1) даёт вполне пригодное для практики приближение.

Работа современных калькуляторов основана именно на подобных (1) приближённых формулах. Исторически, сначала математики создали такие приближённые формулы, затем по ним были составлены таблицы вычислений, а потом эти таблицы были записаны в память калькуляторов и более сложных вычислительных машин.

Выясним, какая взаимосвязь существует между понятиями непрерывности и дифференцируемости функции в точке. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то выполняется приближённое равенство $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, которое становится всё точнее по мере приближения x к x_0. Значит,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right) = f(x_0).$$

Полученное равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ означает, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Итак, *если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке, то она и непрерывна в этой точке.*

Глава 2
Производная

§ 8. Дифференцируемые функции

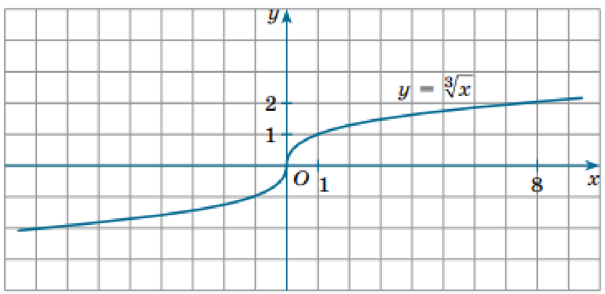


Рис. 34

График функции помогает сделать вывод о её дифференцируемости. Если в точке $x = a$ можно провести касательную к графику, не параллельную оси ординат, то в этой точке функция дифференцируема. Если в точке $x = b$ касательная к графику функции не существует или она параллельна оси ординат, то в этой точке функция не дифференцируема.

В математике принята такая терминология: если из условия A следует условие B, то B называют *необходимым условием для* A; если из условия B следует условие A, то B называют *достаточным условием для* A. Проведённые выше рассуждения о связи дифференцируемости и непрерывности мы можем теперь завершить следующим выводом:

> непрерывность функции в точке является необходимым, но не достаточным условием для дифференцируемости функции в этой точке.

Рассмотрим рисунок 35, на нём изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

Функция претерпевает разрыв в точке $x = -2$, в остальных точках она непрерывна. Функция не дифференцируема в точках $x = -2$ (точка разрыва), $x = 1$ (точка излома графика функции, в которой касательная к графику не существует), $x = 4$ (в этой точке касательная к графику существует, но она перпендикулярна оси абсцисс). Точки, в которых функция непрерывна, но не дифференцируема, будем называть *критическими точками*. Иными словами, критическая точка функции $y = f(x)$ — это такая точка x, в которой функция непрерывна, но $f'(x)$ не существует. На рисунке 35 две критические точки: $x = 1$ и $x = 4$.

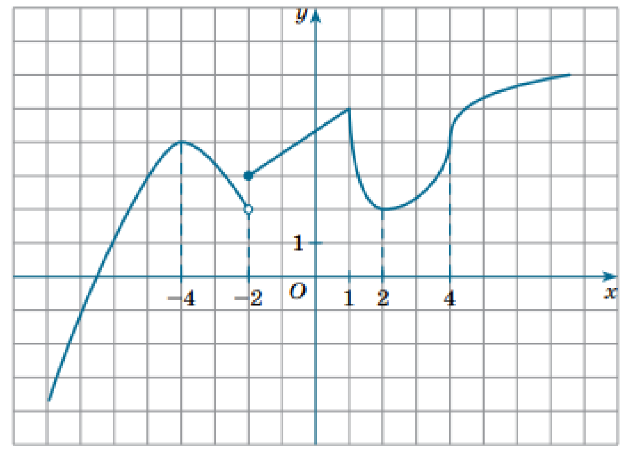


Рис. 35

Обратите внимание ещё на две точки графика, представленного на рисунке 35. В точках $x = -4$, $x = 2$ касательная к графику функции параллельна оси абсцисс. Такие точки будем называть *стационарными точками*. Иными словами, стационарная точка функции $y = f(x)$ — это такая точка x, в которой $f'(x) = 0$.

§ 42. Понятие касательной. Число e и функция $y = e^x$

Повторение пройденного

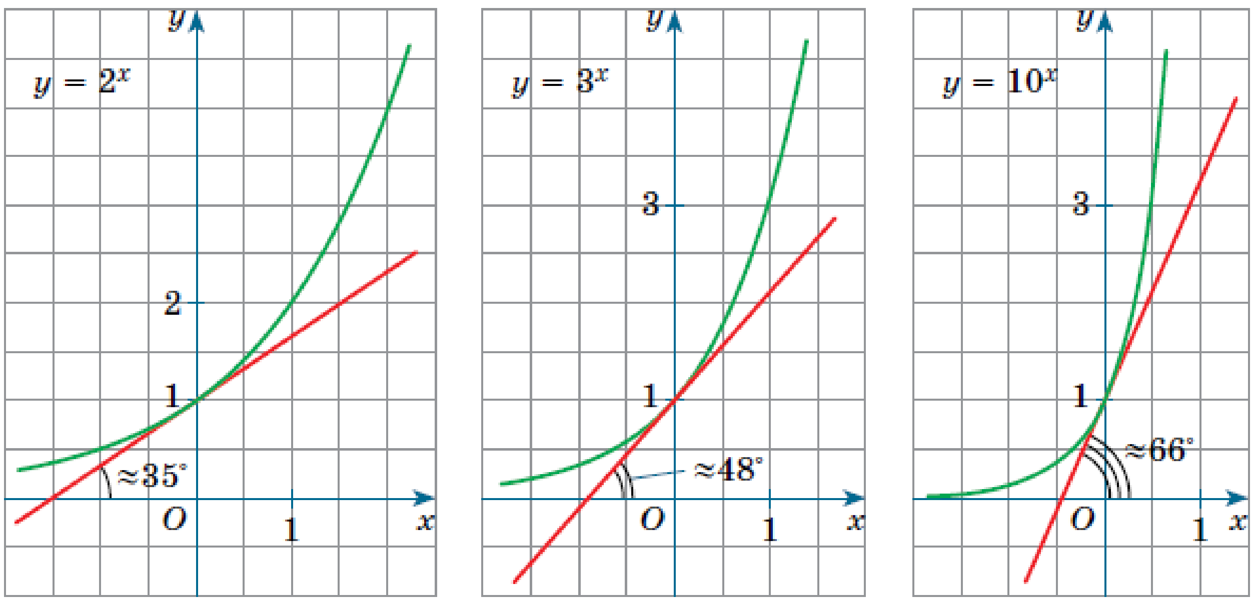


Рис. 161 *Рис. 162* *Рис. 163*

Глава 2
Производная

§ 9. Уравнение касательной к графику функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$. Это значит, что в точке $M(a;\ f(a))$ можно провести касательную к графику этой функции. Составим уравнение касательной. Это уравнение, как уравнение любой прямой, не параллельной оси Oy, имеет вид $y = kx + m$, поэтому задача состоит в нахождении значений коэффициентов k и m.

Если $y = kx + m$ — уравнение касательной, то $k = f'(a)$, так что один коэффициент мы уже знаем. Далее, касательная проходит через точку $M(a;\ f(a))$, а это значит, что, подставив координаты точки M в уравнение $y = kx + m$, мы получим верное равенство $f(a) = ka + m$, откуда следует, что $m = f(a) - ka$. Остаётся лишь подставить найденные значения коэффициентов k и m в уравнение $y = kx + m$:

$$y = kx + m;$$
$$y = kx + (f(a) - ka);$$
$$y = f(a) + k(x - a);$$

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a).} \qquad (1)$$

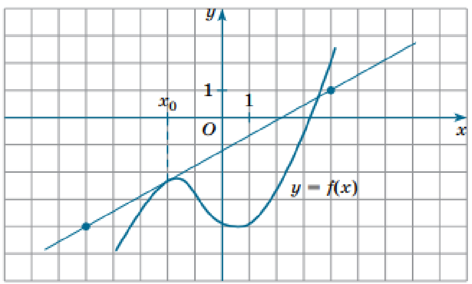
Итак, мы вывели *уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$.*

Для процедуры нахождения касательной удобно использовать пошаговый алгоритм.

Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$

1. Обозначить абсциссу точки касания буквой a.
2. Вычислить $f(a)$.
3. Найти $f'(x)$ и вычислить $f'(a)$.
4. Подставить найденные числа a, $f(a)$, $f'(a)$ в формулу (1).

6.19. На рисунке 29, *а*, *б* изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке x_0. Найдите тангенс угла наклона касательной.



б

Рис. 29

6.22. На рисунке 32 изображён график функции $y = f(x)$, заданной на интервале $(a;\ b)$. Установите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -10$.

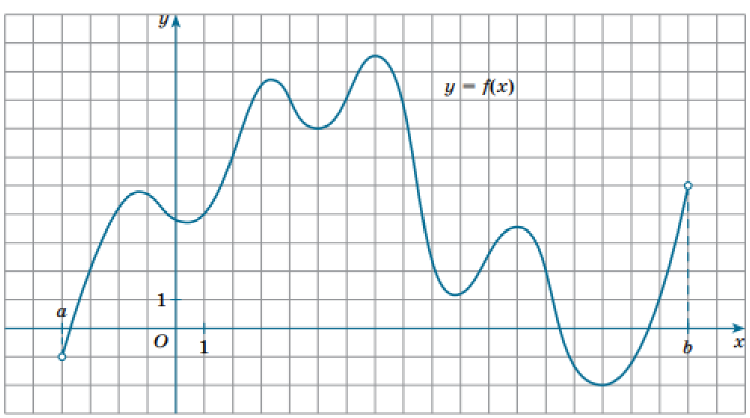


Рис. 32

Глава 2
Производная

§ 10. Арифметические операции над производными

В этом параграфе речь пойдёт о правилах нахождения производной суммы, произведения и частного функций.

Теорема 1. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы в точке x, то и их сумма дифференцируема в точке x, причём производная суммы равна сумме производных:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Доказательство. Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Введём обозначение: $f(x) + g(x) = h(x)$. Для фиксированного значения x имеем:

$$h(x) = f(x) + g(x).$$

2) В точке $x + \Delta x$ имеем:

$$h(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x).$$

3)

$$\Delta y = h(x + \Delta x) - h(x) = (f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)) - (f(x) + g(x)) = \\ = (f(x + \Delta x) - f(x)) + (g(x + \Delta x) - g(x)) = \Delta f + \Delta g.$$

Итак, $\Delta y = \Delta f + \Delta g$.

4)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}.$$

5)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x) + g'(x).$$

Итак,

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Обычно эту теорему формулируют в виде следующего правила: *производная суммы равна сумме производных*. При этом речь может идти о дифференцировании суммы любого числа функций.

Пример 1 Найти скорость изменения функции $y = x^2 + \sqrt{x} - 2x + 5$ в точке $x = 16$.

Решение. Скорость изменения функции в точке $x = 16$ — это, напомним, значение производной в указанной точке. Имеем:

$$y' = \left(x^2 + \sqrt{x} - 2x + 5\right)' = (x^2)' + \left(\sqrt{x}\right)' + (-2x + 5)' = \\ = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + (-2) = 2x - 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y'(16) = 2 \cdot 16 - 2 + \frac{1}{2\sqrt{16}} = 30\frac{1}{8}.$$

Теорема 2. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы в точке x, то и их произведение дифференцируемо в точке x, причём производная произведения вычисляется по следующему правилу[1]:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Доказательство. Воспользуемся алгоритмом нахождения производной и тем, что равенство $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f$ можно записать в виде $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f$.

1) Введём обозначение: $f(x)g(x) = h(x)$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем:

$$h(x + \Delta x) = f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) = (f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) = \\ = f(x)g(x) + \Delta f g(x) + f(x)\Delta g + \Delta f \Delta g.$$

3)

$$\Delta h = h(x + \Delta x) - h(x) = \\ = (f(x)g(x) + \Delta f g(x) + f(x)\Delta g + \Delta f \Delta g) - f(x)g(x) = \\ = \Delta f g(x) + f(x)\Delta g + \Delta f \Delta g.$$

4)

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta f g(x) + f(x)\Delta g + \Delta f \Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} g(x) + \frac{\Delta g}{\Delta x} f(x) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \Delta x.$$

5)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} g(x) + \frac{\Delta g}{\Delta x} f(x) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \Delta x\right) = \\ = f'(x)g(x) + g'(x)f(x) + f'(x)g'(x) \cdot 0 = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

[1] Это правило иногда называют правилом Лейбница.

Глава 2

Производная

§ 10. Арифметические операции над производными

Поскольку $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = h'(x)$, а $h(x) = f(x)g(x)$, то получаем, что

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Обычно эту теорему формулируют в виде следующего правила:

производная произведения двух функций равна сумме двух слагаемых: первое слагаемое есть произведение производной первой функции на вторую функцию, а второе слагаемое есть произведение первой функции на производную второй функции.

Пример 2 Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^3\sqrt{x}$ в точке $x = 1$.

Решение. Угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $x = 1$ — это, напомним, значение производной в указанной точке. Имеем:

$$y' = \left(x^3\sqrt{x}\right)' = (x^3)'\sqrt{x} + x^3\left(\sqrt{x}\right)' = 3x^2\sqrt{x} + x^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y'(1) = 3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{1} + 1^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1}} = 3{,}5.$$

Отметим два полезных следствия из доказанных теорем.

Следствие 1. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то и функция $y = kf(x)$ дифференцируема в точке x, причём $(kf(x))' = kf'(x)$.

Доказательство. Для функции $y = kf(x)$ воспользуемся правилом дифференцирования произведения и учтём, что производная постоянной функции $y = k$ равна нулю:

$$(kf(x))' = k'f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x).$$

Обычно доказанное следствие формулируют в виде следующего правила: *постоянный множитель можно вынести за знак производной.*

Следствие 2. Если функции $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ дифференцируемы в точке x, то и любая их линейная комбинация, т. е. функция $y = k_1f(x) + k_2g(x) + k_3h(x)$, дифференцируема в точке x, причём

$$(k_1f(x) + k_2g(x) + k_3h(x))' = k_1f'(x) + k_2g'(x) + k_3h'(x).$$

Например,

$$\left(3x^3 - \frac{2x^2}{3} + \frac{7}{x} - 4\right)' = 3(x^3)' - \frac{2}{3}(x^2)' + 7\left(\frac{1}{x}\right)' - 4' =$$

$$= 3 \cdot 3x^2 - \frac{2}{3} \cdot 2x + 7 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 0 =$$

$$= 9x^2 - \frac{4x}{3} - \frac{7}{x^2}.$$

Теорема 3. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ дифференцируемы в точке x и в этой точке $g(x) \neq 0$, то и их частное дифференцируемо в точке x, причём производная частного вычисляется по следующему правилу:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Идея доказательства этой теоремы та же, что была использована при доказательстве теорем 1 и 2, но технически доказательство довольно громоздко, поэтому мы его не приводим.

Пример 3 Найти производную функции $y = \frac{x^3}{2x - 5}$ в точке $x \neq 2{,}5$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{x^3}{2x - 5}\right)' = \frac{(x^3)' \cdot (2x - 5) - x^3(2x - 5)'}{(2x - 5)^2} =$$

$$= \frac{3x^2 \cdot (2x - 5) - x^3 \cdot 2}{(2x - 5)^2} = \frac{4x^3 - 15x^2}{(2x - 5)^2}.$$

Глава 2
Производная

§ 11. Дифференцирование тригонометрических функций

При дифференцировании функций следует различать *правила* и *формулы*. О правилах дифференцирования (производная суммы, произведения, частного, производная линейной комбинации функций) мы говорили в предыдущем параграфе. Знаем мы и формулы дифференцирования конкретных функций — их пока совсем немного: нам известны производные функций $y = C$, $y = kx + m$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$. На протяжении всей главы 2 запас формул дифференцирования будет постоянно пополняться. В этом параграфе речь пойдёт об отыскании производных тригонометрических функций.

Выведем формулу дифференцирования функции $y = \sin x$. В процессе рассуждений нам понадобится первый замечательный предел $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ — с этим соотношением мы познакомили вас в § 4. И, как обычно, будем действовать по алгоритму из § 7.

1) Для фиксированного значения x имеем: $f(x) = \sin x$.

2) $f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$.

3) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x$. Преобразуем полученное выражение, воспользовавшись формулой «разность синусов» $\left(\sin s - \sin t = 2\sin\frac{s-t}{2}\cos\frac{s+t}{2}\right)$:

$$\sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{(x+\Delta x) - x}{2}\cos\frac{(x+\Delta x) + x}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x + \Delta x}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$. В правой части полученного равенства содержится выражение $\frac{\Delta x}{2}$, которое удобно обозначить новой буквой, например t. Тогда получим: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin t \cos(x + t)}{t}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin t \cos(x + t)}{t}$.

Далее, рассуждаем так: $\Delta x \to 0$, а $t = \frac{\Delta x}{2}$, значит, $t \to 0$, и под знаком предела вместо условия $\Delta x \to 0$ можно записать $t \to 0$.

Таким образом,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin t \cos(x + t)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \to 0} \cos(x + t).$$

Получили произведение пределов, первый из которых равен 1, второй в силу непрерывности функции $y = \cos(x + t)$ равен $\cos x$, и произведение пределов равно $\cos x$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$ — такова производная рассматриваемой функции $y = \sin x$.

Итак,

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x.}$$

Используя рассуждения, аналогичные тем, что мы провели при выводе формулы дифференцирования функции $y = \sin x$, можно получить формулу дифференцирования функции $y = \cos x$:

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x.}$$

Выведем формулу дифференцирования функции $y = \operatorname{tg} x$. Воспользуемся тем, что $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, и применим правило дифференцирования частного:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак,

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.}$$

ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича

Глава 2
Производная

§ 12. Дифференцирование функций вида $y = f(kx + m)$

В предыдущем параграфе в примере 2 мы получили такую формулу:

$$(\sin 2x)' = 2\cos 2x. \qquad (1)$$

Обсудим эту формулу. Мы знаем, что $(\sin t)' = \cos t$. Формула (1) показывает, что если вместо t подставить $2x$, то формула дифференцирования «почти» сохраняется, появляется лишь «поправочный» множитель 2.

Рассмотрим ещё один пример. Найдём производную функции $y = f(t)$, где $f(t) = t^3$, $t = \frac{1}{2}x$. Речь идёт о дифференцировании функции $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^3$, т. е. $y = \frac{1}{8}x^3$. Это нетрудно:

$$y' = \frac{1}{8}\cdot(x^3)' = \frac{1}{8}\cdot(3x^2) = \frac{3}{8}x^2.$$

А теперь смотрите: $\frac{3}{8}x^2 = \frac{1}{2}\cdot 3\left(\frac{1}{2}x\right)^2$. Таким образом, получилось, что

$$\left(\left(\frac{1}{2}x\right)^3\right)' = \frac{1}{2}\cdot 3\left(\frac{1}{2}x\right)^2. \qquad (2)$$

Обсудим эту формулу. Мы знаем, что $(t^3)' = 3t^2$. Формула (2) показывает, что если вместо t подставить $\frac{1}{2}x$, то формула дифференцирования «почти» сохраняется, появляется лишь «поправочный» множитель $\frac{1}{2}$.

Оказывается, справедлива следующая теорема (мы приводим её без доказательства, ограничимся иллюстрирующими справедливость теоремы формулами (1) и (2)).

Теорема. Производная функции $y = f(kx + m)$ вычисляется по следующему правилу:

$$(f(kx + m))' = kf'(kx + m).$$

Пример Найти значение производной функции $y = f(x)$ в указанной точке:

а) $f(x) = \sqrt{11 - 2x}$, $x = 1$; б) $f(x) = \operatorname{tg}\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, $x = 0$.

Решение. а) Известно, что $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Возьмём эту формулу за основу, но при этом учтём два обстоятельства:

1) под знаком квадратного корня напишем не x, а $11 - 2x$;

2) укажем «поправочный» множитель, равный (-2), — это коэффициент при x. Таким образом,

$$\left(\sqrt{11 - 2x}\right)' = (-2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{11 - 2x}} = -\frac{1}{\sqrt{11 - 2x}}.$$

Осталось вычислить $f'(1)$. Имеем:

$$f'(1) = -\frac{1}{\sqrt{11 - 2\cdot 1}} = -\frac{1}{3}.$$

2) укажем «поправочный» множитель, равный $\left(-\frac{1}{2}\right)$, — это коэффициент при x. Таким образом,

$$\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)' = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{2\cos^2\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Осталось вычислить $f'(0)$. Имеем:

$$f'(0) = -\frac{1}{2\cos^2\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -1.$$

Ответ: а) $-\frac{1}{3}$; б) -1.

Глава 2
Производная

§ 13. Дифференцирование степенных функций

Продолжим изучение формул дифференцирования. В этом параграфе мы поговорим о том, как находить производные степенных функций $y = x^r$. Начнём со случая, когда показатель степени — натуральное число. Кое-что о дифференцировании функций $y = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$, мы уже знаем: $x' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$. Пользуясь правилом дифференцирования произведения, найдём производные ещё двух функций: $y = x^4$, $y = x^5$.

Имеем:

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot x' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3;$$

итак, $(x^4)' = 4x^3$;

$$(x^5)' = (x^4 \cdot x)' = (x^4)' \cdot x + x^4 \cdot x' = 4x^3 \cdot x + x^4 \cdot 1 = 5x^4;$$

итак, $(x^5)' = 5x^4$.

Рассмотрим пять формул: три формулы, которые мы знали раньше, и две, которые только что получили:

$$x' = 1;$$
$$(x^2)' = 2x;$$
$$(x^3)' = 3x^2;$$
$$(x^4)' = 4x^3;$$
$$(x^5)' = 5x^4.$$

Естественно предположить, что для любого натурального показателя n справедлива формула дифференцирования:

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}.} \qquad (1)$$

Для доказательства формулы (1) воспользуемся известным вам из курса алгебры 9-го класса *методом математической индукции*.

Мы знаем, что $x' = 1$. Эту формулу можно переписать так:

$$(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1}.$$

Значит, формула (1) верна для $n = 1$.

Предположим, что формула (1) верна для натурального числа $n = k$, т. е. предположим, что верно равенство $(x^k)' = kx^{k-1}$. Докажем, что тогда формула (1) верна и для следующего натурального числа $n = k + 1$, т. е. докажем, что $(x^{k+1})' = (k + 1)x^k$.

В самом деле,

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot (x)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k + 1)x^k.$$

А далее рассуждаем так. Во-первых, мы убедились в том, что формула (1) верна при $n = 1$. Во-вторых, мы доказали, что из того, что формула (1) выполняется для $n = k$, следует, что она справедлива и для $n = k + 1$.

Что это значит? Это значит, что, поскольку формула (1) выполняется при $n = 1$, она верна и при $n = 2$; раз формула (1) выполняется при $n = 2$, она верна и при $n = 3$ и т. д. Вывод: формула (1) верна для любого натурального числа n.

Опираясь на формулу (1), можно найти производную функции $y = x^{-n}$, $n \in \boldsymbol{N}$. Для этого надо переписать выражение x^{-n} в виде $\frac{1}{x^n}$ и воспользоваться правилом дифференцирования частного:

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Итак, для любого $x \neq 0$ справедлива формула

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) можно объединить в одну:

$$\boxed{(x^m)' = mx^{m-1},\ m \in \boldsymbol{Z}.} \qquad (3)$$

Далее, мы знаем, что $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Эту формулу можно записать следующим образом:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}. \qquad (4)$$

Обе формулы (и (3), и (4)) являются частными случаями следующего утверждения.

Глава 2
Производная

§ 14. Дифференцирование показательных и логарифмических функций

Среди показательных функций наиболее важной для приложений является функция $y = f(x)$, где $f(x) = e^x$. Её графиком, напомним, является экспонента, обладающая следующей особенностью: касательная к графику функции $y = e^x$ в точке $(0; 1)$ образует с осью Ox угол $45°$ (рис. 52), угловой коэффициент этой касательной равен 1. Это значит, что для функции $y = e^x$ значение производной в точке $x = 0$ нам уже известно: $f'(0) = 1$.

Введём в рассмотрение функцию $y = g(x)$, где $g(x) = f(x - a)$, т. е. $g(x) = e^{x-a}$. На рисунке 52 изображён график функции $y = g(x)$: он получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом по оси Ox на $|a|$ единиц масштаба. Касательная к графику функции $y = g(x)$ в точке $x = a$ параллельна касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = 0$ (см. рис. 52), значит, она образует с осью Ox угол $45°$. Используя геометрический смысл производной, можем записать, что $g'(a) = \operatorname{tg} 45° = 1$.

Вернёмся к функции $y = f(x)$, где $f(x) = e^x$. Имеем:

$$f(x) = e^x = e^a \cdot e^{x-a} = e^a \cdot g(x).$$

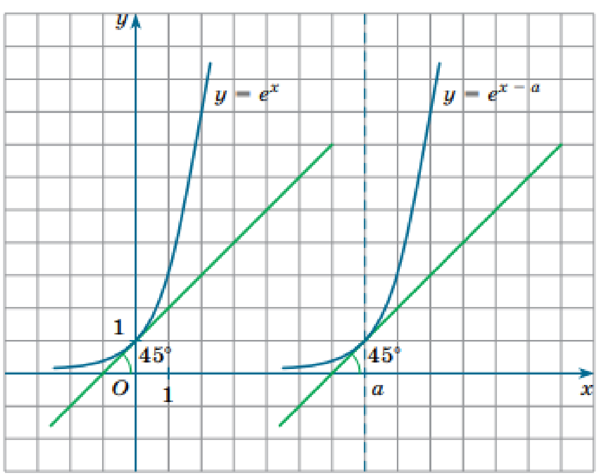


Рис. 52

Значит, $f'(x) = e^a \cdot g'(x)$, в частности $f'(a) = e^a \cdot g'(a)$. Но $g'(a) = 1$, значит, $f'(a) = e^a$.

Мы установили, что для любого значения a справедливо соотношение $f'(a) = e^a$. Вместо буквы a можно, естественно, использовать и букву x; тогда получим, что $f'(x) = e^x$, т. е.

$$\boxed{(e^x)' = e^x.} \qquad (1)$$

Быть может, у вас возник вопрос, почему для вывода формулы дифференцирования функции $y = e^x$ мы не воспользовались, как в предыдущих параграфах, обычным «пятишаговым» алгоритмом из § 7. Дело в том, что мы не смогли бы вычислить предел на пятом шаге алгоритма (разумеется, в курсе высшей математики с вычислением этого предела проблем нет).

Опираясь на теорему из § 12, получим более общую формулу:

$$\boxed{(e^{kx})' = ke^{kx}.} \qquad (2)$$

Формула (2) означает, что функция $y = e^{kx}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = ky$. Это уравнение представляет собой математическую модель многих процессов реальной действительности (радиоактивный распад, динамика вклада в банке и т. д.).

Выведем теперь формулу дифференцирования показательной функции с произвольным основанием $a > 1$, $a \neq 1$. Для этого нам понадобится так называемое основное логарифмическое тождество ($a^{\log_a b} = b$):

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{\ln a \cdot x}.$$

Для нахождения производной функции $y = e^{\ln a \cdot x}$ воспользуемся формулой (2):

$$(e^{\ln a \cdot x})' = \ln a \cdot e^{\ln a \cdot x} = \ln a \cdot (e^{\ln a})^x = \ln a \cdot a^x.$$

Итак,

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a.} \qquad (3)$$

§ 14. Дифференцирование показательных и логарифмических функций

Теперь поговорим о дифференцировании логарифмических функций. Самый простой вид имеет производная логарифмической функции по основанию e, т. е. функция $y = \ln x$ (натуральный логарифм):

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}.} \qquad (4)$$

Но, как и в случае с функцией $y = e^x$, в школьном курсе математики строго доказать эту формулу не удастся. В приложении к настоящему параграфу мы дадим обоснование формулы (4), исходя из геометрических соображений.

Пример 3 Составить уравнение той касательной к графику функции $y = \ln x$, которая параллельна прямой $y = \frac{1}{e}x + 1$.

Решение. Абсцисса $x = a$ точки касания здесь не указана. Но поскольку искомая касательная параллельна прямой $y = \frac{1}{e}x + 1$, угловой коэффициент касательной равен угловому коэффициенту данной прямой, т. е. $(\ln x)' = \frac{1}{e}$. Значит, $\frac{1}{x} = \frac{1}{e}$, $x = e$; такова абсцисса точки касания.

Теперь всё готово для использования алгоритма составления уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$, где $f(x) = \ln x$.

1) $a = e$ — абсцисса точки касания.

2) Вычислим $f(a)$, т. е. $f(e)$; $f(e) = \ln e = 1$.

3) $f'(a) = \frac{1}{e}$.

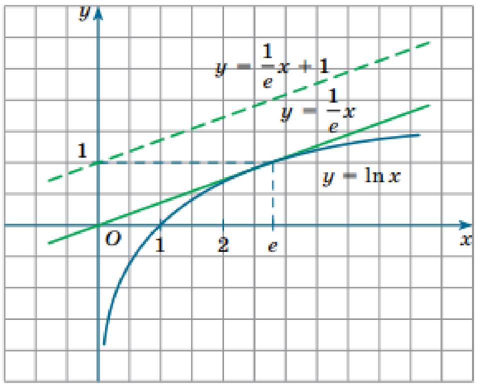


Рис. 53

4) Подставим найденные числа $a = e$, $f(a) = 1$, $f'(a) = \frac{1}{e}$ в уравнение касательной $y = f(a) + f'(a)(x - a)$:

$$y = 1 + \frac{1}{e}(x - e); \quad y = \frac{1}{e}x.$$

На рисунке 53 построены график функции $y = \ln x$, прямая $y = \frac{1}{e}x + 1$ и проведена искомая касательная.

Ответ: $y = \frac{1}{e}x$.

Завершая параграф, выведем формулу дифференцирования логарифмической функции по произвольному основанию $a > 0$, $a \neq 1$. Воспользовавшись известной из курса 10-го класса формулой перехода к новому основанию логарифма $\left(\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}\right)$, получим $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Далее, имеем:

$$y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Итак,

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.} \qquad (5)$$

Приложение к § 14

На рисунке 54 изображены графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Эти графики симметричны относительно прямой $y = x$. Предположим, что в точке $M(x_0;\ y_0)$, взятой на графике функции $y = f(x)$, существует невертикальная касательная к графику; эта касательная составляет с положительным лучом оси абсцисс угол α. Тогда $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

Возьмём на графике обратной функции $y = g(x)$ точку M', симметричную точке M относительно прямой $y = x$. Точка M' имеет координаты $(y_0;\ x_0)$, в этой точке к графику функции $y = g(x)$ тоже можно провести касательную, причём она симметрична касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M (ось симметрии — прямая $y = x$). Новая касательная составляет с положительным лучом оси Oy угол α, а с положительным лучом оси Ox — угол $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. Поэтому

$$g'(y_0) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

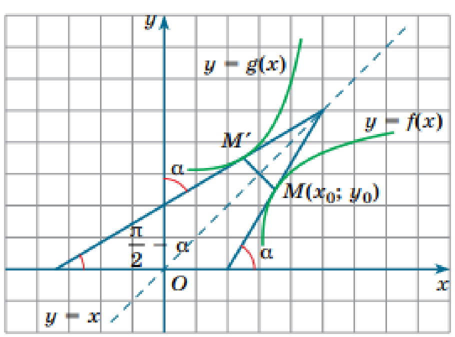


Рис. 54

Таким образом, мы получили следующее правило вычисления производной обратной функции:

производная обратной функции есть величина, обратная производной данной функции.

Строгого доказательства этого утверждения мы здесь не приводим, ограничимся геометрическим истолкованием.

Кратко это правило можно записать так:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}, \text{ если } x'_y \neq 0.$$

Если $y = \ln x$, то

$$y'_x = (\ln x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y}.$$

Так как $y = \ln x$, то $e^y = x$. Следовательно,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

4. Примеры из педагогической практики.

ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича

Составление схемы определения понятия

- назвать имя понятия – термин;
- выявить ближайшее родовое понятие;
- выявить признаки понятия – видовые отличия;
- сформулировать определение понятия;
- привести примеры объектов, входящих в объём понятия.

Состав действия «анализ, синтез»

- выделить объект *анализа*;
- выявить компонентный состав изучаемого объекта – его составные части (признаки, свойства, количественные и качественные отношения, частные случаи, пространственные отношения компонентов объекта);
- исследовать (изучить) отдельно каждый элемент, установить причинно-следственные отношения между ними;
- если необходимо, включить изучаемый объект в причинно-следственные отношения с другими объектами;
- составить план исследования (изучения) объекта в целом – *синтез*.

Схема определения понятия

Определение 1. Последовательность (y_n) называют **ограниченной сверху**, если существует число M такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \leqslant M$. Число M называют **верхней границей** последовательности. Последовательность (y_n) называют **ограниченной снизу**, если существует число m такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \geqslant m$. Число m называют **нижней границей** последовательности. Если последовательность ограничена и снизу, и сверху, то её называют **ограниченной последовательностью.**

арифметическая прогрессия a, a +
первым членом a.

Последовательность (y_n) называ
её член больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_n$$

Последовательность (y_n) называ
член меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > \ldots > y_{n-1} > y_n > y_{n+1} > \ldots .$$

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином *монотонные последовательности.*

Например,

3, 5, 7, 9, 11, 13, ..., $2n + 1$, ... — возрастающая последовательность,

64, 32, 16, 8, 4, 2, ..., $\frac{64}{2^{n-1}}$, ... — убывающая последовательность,

а последовательность 3, 64, 5, 32, 7, 16, 9, 8, 11, 4, 13, 2, ... не является монотонной, она и не возрастающая, и не убывающая.

Познакомимся ещё с одним свойством числовых последовательностей.

Определение 1. Последовательность (y_n) называют **ограниченной сверху**, если существует число M такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \leqslant M$. Число M называют **верхней границей** последовательности. Последовательность (y_n) называют **ограниченной снизу**, если существует число m такое, что для любого n выполняется неравенство $y_n \geqslant m$. Число m называют **нижней границей** последовательности. Если последовательность ограничена и снизу, и сверху, то её называют **ограниченной последовательностью.**

Например,

— последовательность 3, 5, 7, 9, 11, 13, ..., $2n + 1$, ... ограничена снизу (в качестве нижней границы можно взять число 3, как, впрочем, и любое число, меньшее, чем 3),

— последовательность 64, 32, 16, 8, 4, 2, ..., $\frac{64}{2^{n-1}}$, ... ограничена сверху (в качестве верхней границы можно взять число 64, как, впрочем, и любое число, большее чем 64).

Определение ближайшего родового понятия.
Выделение видовых отличий.
Структурирование информации.

Ограниченная сверху последовательность y_n:

1) последовательность и

2) существует число M и

3) любое число n и

4) $y_n \leq M$

Составление предписания, выражающего общий метод решения задач

– выделить тип задач, для которого составляется предписание – общий метод решения;
– предложить учащимся для решения набор задач, включающий в себя задачи, соответствующие всем пунктам предписания, которое составляется;
– организовать решение задач учащимися (оказывая, при необходимости, помощь);
– обобщить решение задач, устанавливая последовательность действий, которые были выполнены;
– организовать правильное формулирование выполненных действий, выстроить последовательность соответствующих блоков предписания;
– организовать анализ предписания в целом виде.

Составление предписания, выражающего общий метод решения

§ 7. Алгоритм нахождения производной

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале. Возьмём точку x_0 из этого интервала и дадим аргументу приращение Δx такое, чтобы не выйти из этого интервала. Найдём приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют **производной функции $y = f(x)$ в точке x_0**; обозначают $f'(x_0)$ или, кратко, y'.

Итак,

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.}$$

Функция $y = x^2$

1) Зафиксируем x. Найдём $f(x) = x^2$.
2) Дадим аргументу x приращение Δx, перейдём к $x + \Delta x$. Тогда

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2.$$

3) Найдём приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 =$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x).$$

4) Найдём отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

5) Вычислим $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Так как x — фиксированное число, а $\Delta x \to 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Итак,

$$\boxed{(x^2)' = 2x.}$$

1. Зафиксируем x. Найдём $f(x)$.
2. Дадим приращение Δx, перейдём к точке $x + \Delta x$.
3. Найдём значение функции в точке $x + \Delta x$, т.е. $f(x + \Delta x)$.
4. Найдём приращение функции
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$
5. Вычислим $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Алгоритм нахождения производной функции $y = f(x)$

1. Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.
2. Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

План-схема урока по теме «Определение производной»

Урок «открытия» нового знания	Деятельность на уроке
Проверка домашнего задания, актуализация знаний.	Повторяются понятия: предела, касательной. Вычисление пределов.
Мотивация открытия нового знания. Побуждение к получению новой информации.	Постановка задачи: сравнение двух задач о мгновенной скорости и касательной. Формулирование общей постановки задачи.
Получение новой информации	Работа с текстом учебника. Заполнение журнала.
Первичное закрепление с проговариванием во внешней речи.	Решение заданий в группах. Закрепление нового понятия. Составление схемы определения понятия производной. Составление схемы предписания для нахождения производной.
Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону.	Выполнение самостоятельной работы
Рефлексия. Осмысление изученного и сделанного	Подведение к выводу: раз мы узнали новое понятие, то следует его подробно изучить – свойства, взаимоотношение с уже известным материалом.
Информация о домашнем задании, инструктаж по его выполнению.	

Глава 2

Производная

§ 6. Определение производной

Начнём с рассмотрения двух задач, совершенно различных по сюжету: первая задача — физическая, вторая — геометрическая. Как вы увидите, они в процессе решения приведут к одной и той же (новой для вас) математической модели.

Задача 1 (*о скорости движения*) По прямой, на которой заданы начало отсчёта, единица измерения (см) и направление, движется материальная точка. Закон движения задан формулой $s = s(t)$ (t — время (с), $s(t)$ — координата точки на прямой в момент времени t). Найти скорость движения тела в момент времени t.

Решение. В момент времени t материальная точка занимает положение M (рис. 19): $OM = s(t)$.

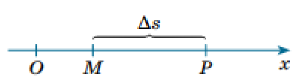


Рис. 19

Дадим аргументу t приращение Δt. Материальная точка в момент времени $t + \Delta t$ займёт положение P: $OP = s(t + \Delta t)$. Значит, за Δt секунд движущаяся точка переместилась из точки M в точку P. Имеем: $MP = OP - OM = s(t + \Delta t) - s(t)$. Итак, $MP = \Delta s$ (см).

Найдём среднюю скорость $v_{ср}$ движения материальной точки за промежуток времени $[t;\ t + \Delta t]$: $v_{ср} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Предел средней скорости движения за промежуток времени $[t;\ t + \Delta t]$ при условии, что Δt выбирается всё меньше и меньше, точнее, при условии, что $\Delta t \to 0$, на-

зывают *мгновенной скоростью движения в момент времени t* и обозначают $v(t)$. Таким образом,

$$\boxed{v(t) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.}$$

Задача 2 (о касательной к графику функции) Дан график функции $y = f(x)$. На нём выбрана точка $M(a;\ f(a))$, в которой к графику функции можно провести касательную, не параллельную оси ординат (рис. 20). Найти угловой коэффициент касательной.

Решение. Дадим аргументу приращение Δx и рассмотрим на графике точку P с абсциссой $a + \Delta x$. Ордината точки P равна $f(a + \Delta x)$. Угловой коэффициент секущей MP, т. е. тангенс угла между прямой MP и осью Ox, можно найти из прямоугольного треугольника MPL: $k_{сек} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Если мы теперь устремим Δx к нулю, то точка P начнёт приближаться по кривой к точке M. В учебнике для

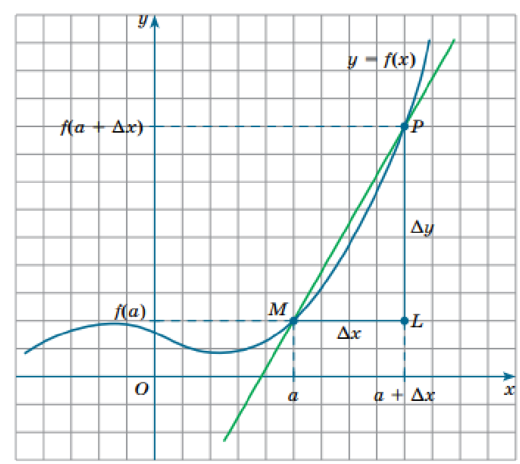


Рис. 20

Побуждение к получению новой информации

Задача о скорости движения	**Задача о касательной к графику функции**
Зафиксируем начальный момент t положения материальной точки $s(t)$	Выберем на графике функции $y = f(x)$ точку a, в которой можно провести непараллельную оси ординат касательную
Дадим аргументу t приращение Δt и рассмотрим положение материальной точки в момент времени $(t + \Delta t)$. Материальная точка займёт новое положение $s(t + \Delta t)$	Дадим аргументу приращение Δx и рассмотрим на графике точку с абсциссой $(a + \Delta x)$. Ордината точки равна $f(a + \Delta x)$.
Значит, за время Δt материальная точка переместилась на расстояние $s(t + \Delta t) - s(t)$	$PL = f(a + \Delta x) - f(a)$
Средняя скорость движения материальной точки на этом промежутке $v_{ср} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$	Тангенс угла наклона секущей $k_{сек} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
Устремим Δt к 0, мгновенная скорость материальной точки $v_{мгн} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$	Устремим Δx к 0, тангенс угла наклона касательной $k_{кас} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

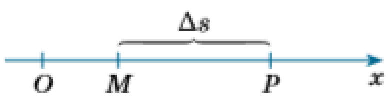


Рис. 19

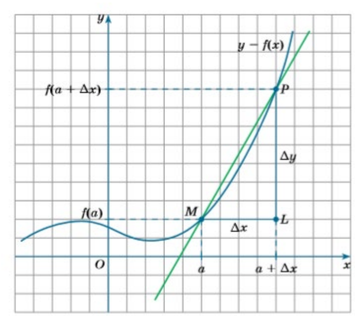


Рис. 20

Схема определения понятия

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале. Возьмём точку x_0 из этого интервала и дадим аргументу приращение Δx такое, чтобы не выйти из этого интервала. Найдём приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют **производной функции $y = f(x)$ в точке x_0**; обозначают $f'(x_0)$ или, кратко, y'.

Итак,

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.}$$

Рассмотренные выше задачи 1 и 2 позволяю
водную с физической и геометрической точек зр
Физический (механический) смысл произв
дующем. Если $s = s(t)$ — закон прямолинейного
водная выражает *мгновенную скорость* в момен

$$\boxed{v(t) = s'(t).}$$

Вообще, если некоторый реальный процесс
$s = s(t)$, то производная $s'(t)$ выражает скорость
в момент времени t. С математической точки
$f'(x)$ выражает *скорость изменения функции y*
Рассмотрим, в частности, постоянную функц
изменения равна нулю (ведь значения функции
к точке). Это значит, что

$$\boxed{(C)' = 0.}$$

Геометрический смысл производной состоит в следующем. Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси ординат, то $f'(a)$ выражает угловой коэффициент касательной:

$$\boxed{k = f'(a).}$$

Угловой коэффициент прямой — это тангенс угла между осью абсцисс и прямой. Значит,

$$f'(a) = \operatorname{tg}\alpha \text{ (рис. 22).}$$

Определение ближайшего родового понятия.
Выделение видовых отличий.
Структурирование информации.

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале. Возьмём точку x_0 из этого интервала и дадим аргументу приращение Δx такое, чтобы не выйти из этого интервала. Найдём приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют **производной функции $y = f(x)$ в точке x_0**; обозначают $f'(x_0)$ или, кратко, y'.

Производная функции $f(x)$:

1) предел **и**
2) отношение **и**
3) в числителе приращение функции $f(x+\Delta x) - f(x)$ **и**
4) в знаменателе приращение аргумента Δx **и**
5) приращение аргумента стремится к 0: $\Delta x \to 0$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Лист рефлексии

Основная деятельность учащегося	Справился сам	Справился с помощью	Не справился
Повторение понятий: предела, касательной. Вычисление пределов.			
Постановка задачи: сравнение двух задач о мгновенной скорости и касательной. Формулирование общей постановки задачи.			
Работа с текстом учебника. Заполнение журнала.			
Решение заданий в группах. Закрепление нового понятия. Составление схемы определения понятия производной. Составление схемы предписания для нахождения производной.			
Выполнение самостоятельной работы			
Подведение к выводу: раз мы узнали новое понятие, то следует его подробно изучить – свойства, взаимоотношение с уже известным материалом.			

Рефлексия учебной деятельности

- Удалось ли мне решить поставленные перед собой на уроке задачи?
- Достигнута ли мною цель урока?
- Что мне удалось на уроке?
- Что я для этого сделал(а) (обсуждение результатов заполнения листа рефлексии)?
- Что у меня не получилось на уроке?
- Что мне помешало?
- Что я должен сделать, чтобы в следующий раз получилось?
- Какую оценку я заслужил в соответствии с критериями?
- Определение домашнего задания и ближайших задач.

Индивидуальное задание

Задача о прибыли
Зафиксируем начальные вложения p, получим прибыль $П(p)$
Вложим дополнительные средства Δp и рассмотрим прибыль при новом вложении $(p + \Delta p)$. Прибыль составит $П(p + \Delta p)$
Значит, при вложении дополнительных средств Δp прибыль изменилась на $П(p + \Delta p) – П(p)$
Средняя прибыль составит $П_{ср} = \dfrac{\Delta П}{\Delta p}$
Мгновенная прибыль. $П_{мгн} = \lim\limits_{\Delta p \to 0} \dfrac{\Delta П}{\Delta p}$

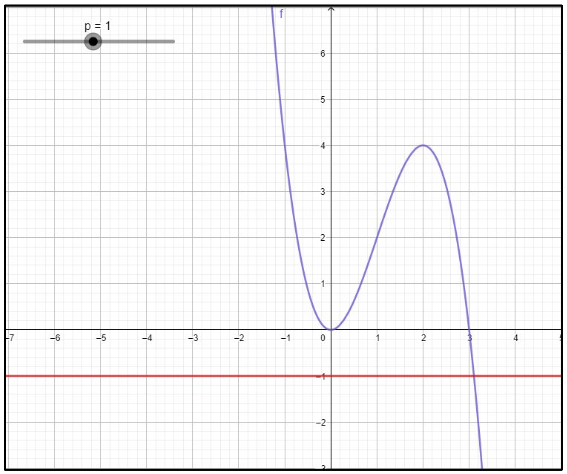
Индивидуальное задание

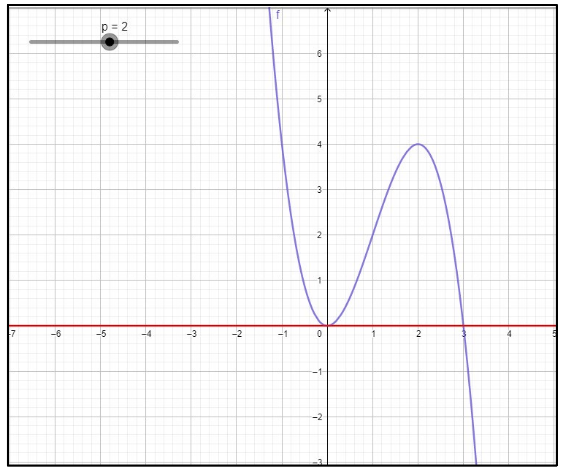
ИКТ **17.12.** При каких значения параметра p:
а) уравнение $3x^2 - x^3 = p - 2$ имеет единственный корень;

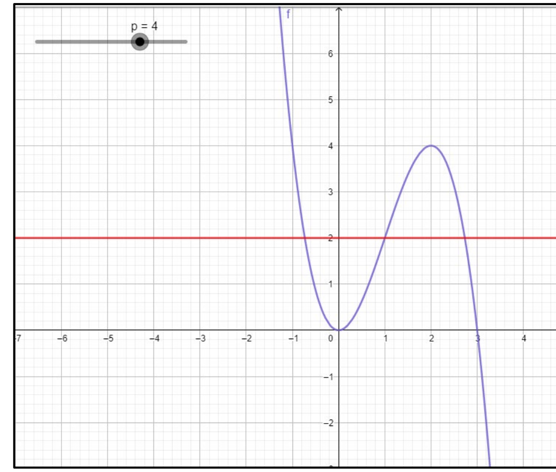
Рассмотрим функции

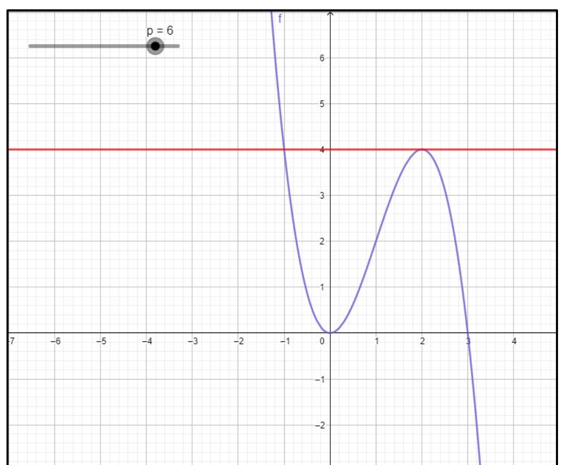
$$y = 3x^2 - x^3$$

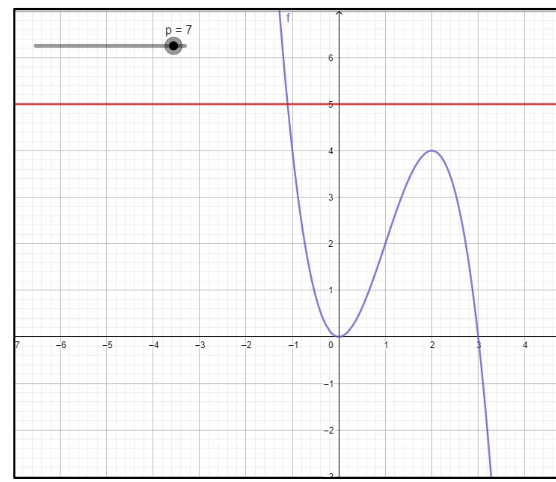
$$y = p - 2$$











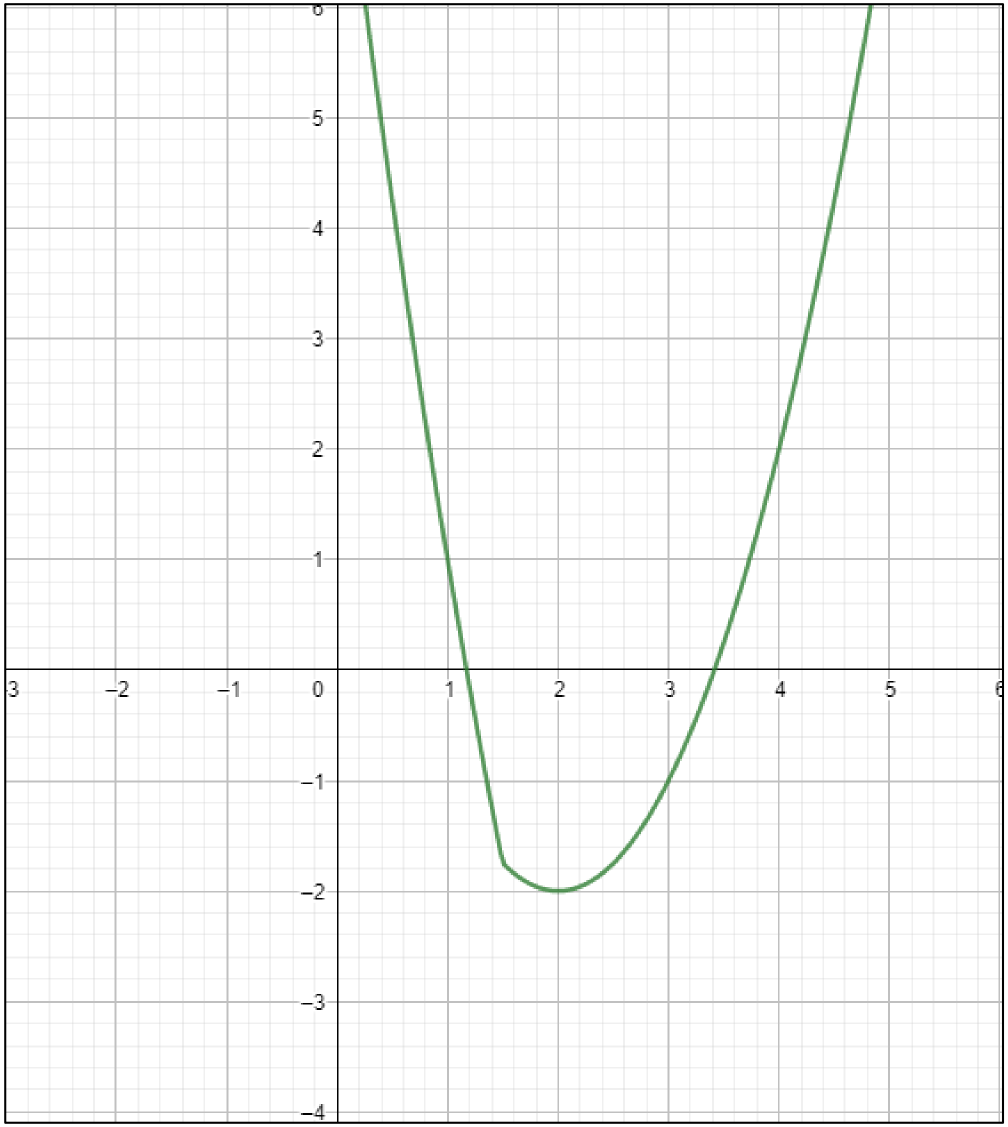
Индивидуальное задание

ИКТ **18.17.** Найдите наименьшее значение функции на заданном промежутке:

а) $y = x^2 - 6x + 5 + |3 - 2x|$, $x \in [0; 4]$;

Рассмотрим кусочную функцию

$$y = \begin{cases} x^2 - 8x + 8, & \text{если} \quad x < 1,5, \\ x^2 - 4x + 2, & \text{если} \quad x \geq 1,5. \end{cases}$$



УМК «Лаборатория А.Г. Мордковича»

ЛАБОРАТОРИЯ
А.Г. Мордковича

Алгебра 7-9 классы. Алгебра и начала математического анализа 10-11 классы

Авторский коллектив

Александр Григорьевич Мордкович

профессор МГПУ, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, научный руководитель Международного семинара преподавателей математики педвузов (1987 г-н.в.);
имеет награды: Премия Президента РФ в области образования, заслуженный деятель науки РФ, Отличник народного образования, Медаль К.Д.Ушинского.

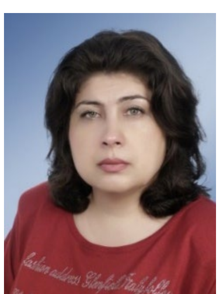
Павел Владимирович Семёнов

профессор факультета математики НИУ ВШЭ, доктор физико-математических наук, профессор, член Федеральной предметной группы по разработке КИМ для ЕГЭ по математике (2001-2007 гг), разработчик заданий с развернутым ответом, автор более 20 учебно-методических пособий по подготовке учащихся к ЕГЭ и подготовке экспертов к проверке работ учащихся;
имеет награды: Почётный работник высшего профессионального образования РФ; Почетная грамота Министерства образования РФ.

Лидия Александровна Александрова

учитель математики, методист ГБОУ Школы 1317 г. Москва, учитель высшей категории, член предметной комиссии по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ по математике;
имеет награды: Отличник народного просвещения РФ.

Елена Львовна Мардахаева



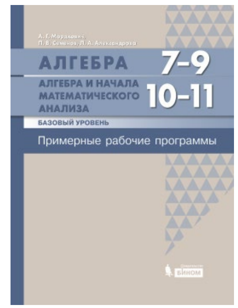
заведующий лабораторией математики ГК «Просвещение», кандидат педагогических наук, доцент, председатель предметной комиссии ЕГЭ по математике Московской области (2006-2007 гг); член-корреспондент Международной академии научного педагогического образования (МАНПО);
имеет награды: Грант Москвы в сфере образования; Почётная грамота Министерства образования Московской области.

ЛАБОРАТОРИЯ А. Г. Мордковича

Алгебра, 7-9 классы
Алгебра и начала математического анализа, 10-11 классы

Включены в Федеральный перечень

- Учебники
- ЭФУ
- Примерные рабочие программы
- Методические пособия для учителя
- Рабочие тетради
- Контрольные работы
- Самостоятельные и проверочные работы
- Алгебраические практикумы



Отличительные особенности УМК «Лаборатория А.Г. Мордковича»

Курс построен на основе приоритетности функционально-графической линии, математическое моделирование является идейным стержнем.

- Учебник и задачник соединены в одну книгу.
- Порядок тем соответствует ПООП, отражает психологические особенности обучающихся.
- Выстроена вероятностно-стохастическая линия в тесной взаимосвязи с основным содержанием.
- Каждая глава содержит разделы «Повторение», «Итак, в Главе…», «Вопросы», «Дополнительные задачи», «Из истории математики».
- Трёхуровневая система заданий отражает требования ФГОС ОО, итоговой аттестации. Добавлены задачи практического содержания, высокого уровня сложности.
- Включён материал, рекомендованный к изучению с использованием IT-средств.

Авторский сайт https://elenamard.jimdo.com

elenamard.jimdofree.com

Главная | Об авторском коллективе | Материалы к урокам | Где купить УМК А.Г.Мордковича и др.

Внеурочная деятельность 5-6 классы | Предпрофильная подготовка 7-9 классы

Профильное обучение 10-11 классы | Открытый урок с БИНОМ

IT-средства при обучении алгебре: методические рекомендации | Апробация УМК

Очные региональные семинары | Региональные семинары в формате онлайн | Вебинары

Электронные ресурсы | Курсы повышения квалификации | Обратная связь

Лаборатория математики: в помощь учителю

НОВОСТИ!

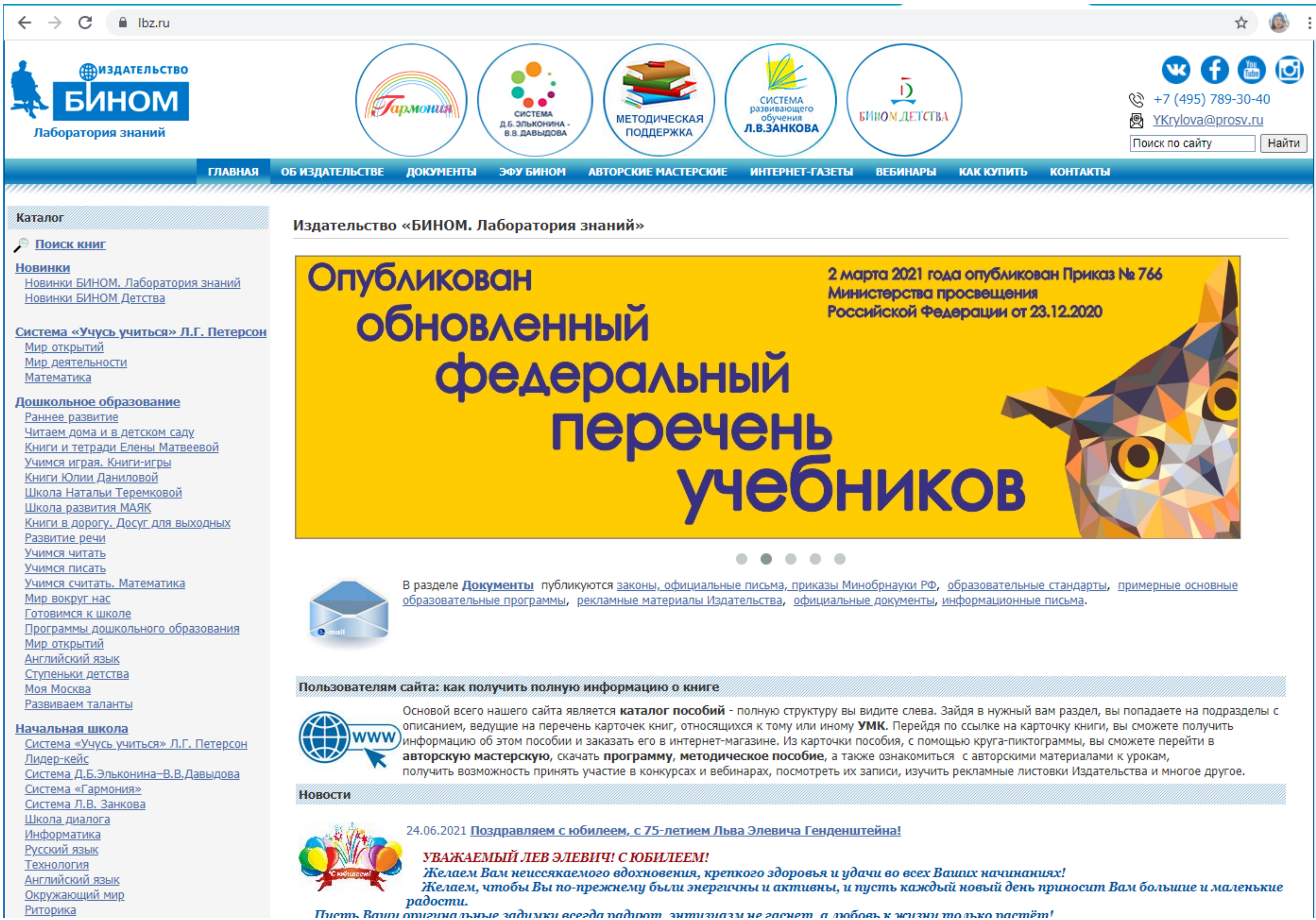
Приказом Министерства просвещения Российской Федерации от **31 мая 2021 года № 287** утверждён федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования.

Приказ № 287

Сайт Лаборатории математики ГК "Просвещение"

Сайт для учителей математики. Для тех,

Методическая поддержка через сайт издательства http://www.lbz.ru



Приказ № 766 от 23.12.2020

О внесении изменений в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, утверждённый приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 20.05.2020 г. № 254

1.1.2.4.1.11.1 1.1.2.4.1.11.2	Математика	Истомина Н.Б., Горина О.П., Тихонова Н.Б.	5 6	АО «Издательство «Просвещение»	Конобеева Т.А., Бондаренко Р.А., Кожанова А.П., Павлова Л.А.	До 1 июля 2025 года
1.1.2.4.1.3.1 1.1.2.4.1.3.2	Математика	Петерсон Л.Г., Дорофеев Г.В.	5 6	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»; АО «Издательство «Просвещение»		От 20 мая 2020 года № 254
1.1.2.4.2.13.1 1.1.2.4.2.13.2 1.1.2.4.2.13.3	Алгебра	Мордкович А.Г., Семенов П.В., Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л.	7 8 9	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»; АО «Издательство «Просвещение»		От 20 мая 2020 года № 254
1.1.2.4.2.11.1 1.1.2.4.2.11.2 1.1.2.4.2.11.3	Алгебра	Петерсон Л.Г., Агаханов Н.,Х., Петрович А.Ю. и др.	7 8 9	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»; АО «Издательство «Просвещение»		От 20 мая 2020 года № 254
1.1.2.4.3.10.1 1.1.2.4.3.10.2 1.1.2.4.3.10.3	Геометрия	Смирнов В.А., Смирнова И.М.	7 8 9	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»; АО «Издательство «Просвещение»		От 20 мая 2020 года № 254
1.1.3.4.1.25.1 1.1.3.4.1.25.2	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа	Мордкович А.Г., Семенов П.В., Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л.	10 11	АО «Издательство «Просвещение»	Польшакова О.Е., Еремченко И.А., Кожанова А.П., Кочагина М.Н.	До 28 июня 2025 года

Спасибо за внимание!
Удачи в делах!

Адрес обратной связи:
kaf.matematika@gmail.com
Авторский сайт:
https://elenamard.jimdo.com/
Сайт издательства:
http://lbz.ru/

Мы готовы с диалогу!