МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ

19.10.2021 г.

Вопросы для обсуждения

1. Общая структура изучения иррациональности в школьном курсе алгебры.

2. Введение иррациональности.

3. Формирование предметных компетенций.

1. Общая структура изучения иррациональности в школьном курсе алгебры.

LAB
ЛАБОРАТОРИЯ
А.Г. Мордковича

Принципы построения содержания

Принцип крупных блоков.

- Раздел изучается компактно, без перебивок.

Отсутствие тупиковых тем.

- Ни в одном классе ни одна тема не должна быть «тупиковой», т. е. не связанной с предшествующим или последующим материалом.

Принцип детерминированности, логической завершённости построения курса.

- Порядок изучения тем понятен учителю.

Принцип завершённости в пределах учебного года.

- Каждый класс – это определённая серия математического романса, имеющая свою внутреннюю интригу и более-менее законченное содержание.

Приоритетность функционально-графической линии.

- Даёт возможность развития обоих полушарий мозга.

функции

уравнения

преобразования

ЛАБОРАТОРИЯ А.Г. Мордковича

Алгебра, 7-9 классы

Авторы:
Мордкович А.Г., Семенов П.В.,
Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л.

Математика – это язык, на котором говорят все точные науки.
Н.И.Лобачевский

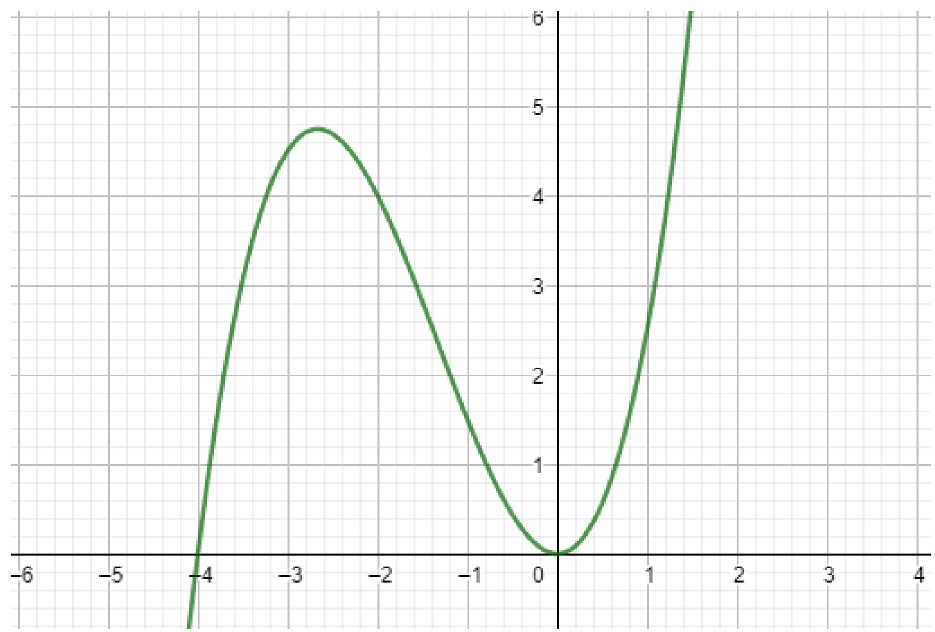
Алгебра и начала математического анализа, 10-11 классы

Класс	Функция	Реальные и физические процессы
7 класс	Линейная функция. Функция $y = x^2$.	Равномерные процессы.
8 класс	Квадратичная функция. Функции $y = \lvert x \rvert$, $y = \frac{k}{x}$ и $y = \sqrt{x}$.	Равноускоренные процессы.
9 класс	Функции $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$. Обобщение изученного в основной школе, формализация некоторых определений и понятий.	
10 класс	Тригонометрические функции. Степенные, показательные и логарифмические функции.	Периодические процессы, гармонические колебания. Процессы органического роста.
11 класс	Элементы теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления; обобщение изученного.	Мгновенная скорость, площадь и объём, оптимальные значения некоторых величин.

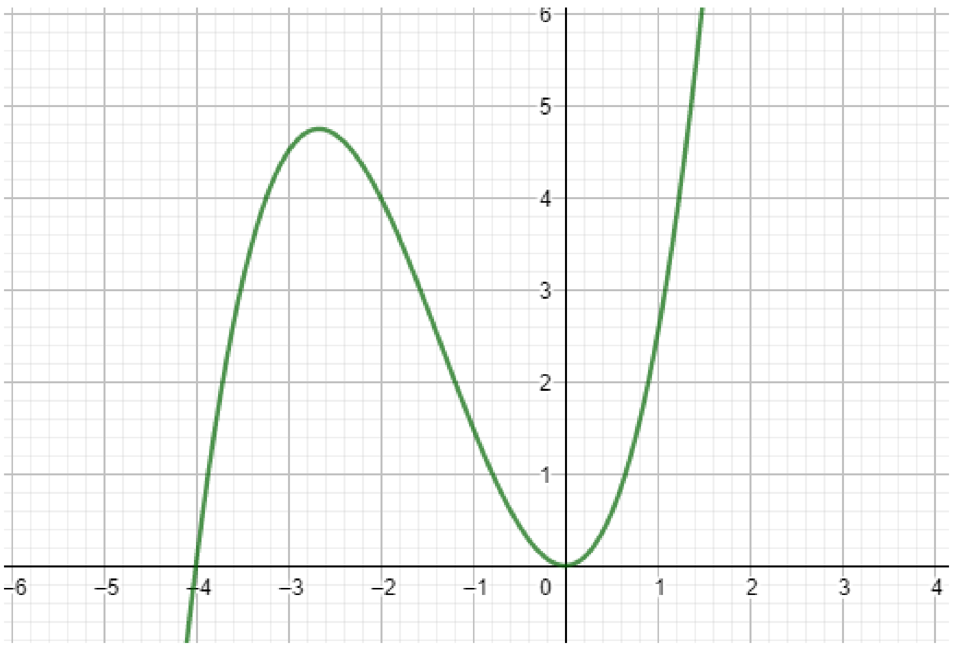
Тематическое планирование

пп	Тема	Кол-во часов
	Глава 1. Множество действительных чисел.	**16**
1.	Множества, их элементы и подмножества.	1
2.	Операции над множествами.	2
3.	Рациональные числа.	1
4.	Познакомимся с квадратными корнями.	2
5.	Иррациональные числа.	1
6.	Действительные числа и числовая прямая.	1
7.	Свойства числовых неравенств.	2
8.	Линейные неравенства.	2
9.	Модуль действительного числа. Функция $y = \|x\|$.	2
10.	Приближённые значения действительных чисел.	1
	Контрольная работа № 1.	*1*
	Глава 2. Алгебраические дроби.	**17**
	Глава 3. Функция $y=\sqrt{x}$. Свойства квадратных корней.	**12**
19.	Функция $y=\sqrt{x}$, её график и свойства.	2
20.	Свойства квадратных корней.	2
21.	Тождество $\sqrt{x^2}=\|x\|$.	1
22.	Вынесение множителя из-под знака квадратного корня. Внесение множителя под знак квадратного корня.	2

пп	Тема	Кол-во часов
23.	Преобразование иррациональных выражений.	4
	Контрольная работа № 4.	*1*
	Глава 4. Квадратичная функция. Функция $y=\frac{k}{x}$.	**15**
	Глава 5. Квадратные уравнения.	**19**



пп	Тема	Кол-во часов
	Глава 1. Тригонометрические функции.	**23**
1.	Что такое числовая окружность.	2
2.	Числовая окружность на координатной плоскости.	2
3.	Дуги числовой окружности на координатной плоскости.	1
4.	Понятия косинуса и синуса числа.	2
5.	Понятия тангенса и котангенса числа.	1
	Глава 2. Обратные тригонометрические функции. Решение тригонометрических уравнений.	16
	Глава 3. Формулы тригонометрии.	12



Тематическое планирование

пп	Тема	Кол-во часов
	Глава 4. Степенные функции.	**16**
32.	Степенные функции с натуральным показателем.	1
33.	Степенные функции с целым отрицательным показателем.	1
34.	Функция $y = \sqrt[n]{x}$, её свойства и график.	2
35.	Свойства корней n-й степени.	
36.	Понятие степени с рациональным показателем.	2
37.	Степенные функции с рациональным показателем.	2
38.	Преобразование иррациональных выражений.	2
39.	Иррациональные уравнения.	2
40.	Понятие степени с иррациональным показателем.	1
	Контрольная работа № 5.	*1*
	Глава 5. Показательные и логарифмические функции.	**20**
41.	Показательные функции.	*2*
42.	Понятие касательной. Число e и функция $y = e^x$.	1
45.	Понятие логарифма.	2

2. Введение иррациональности.

ЛАБОРАТОРИЯ

А.Г. Мордковича

Множество действительных чисел

§ 4. Познакомимся с квадратными корнями

Рассмотрим два похожих друг на друга уравнения: $x^2 = 4$, $x^2 = 5$. Первое уравнение мы решим без труда, его корнями служат числа 2 и −2. Второе уравнение попробуем решить графически. Для этого в одной системе координат построим график функции $y = x^2$ (параболу) и прямую $y = 5$ (рис. 7). Они пересекаются в двух симметричных от-

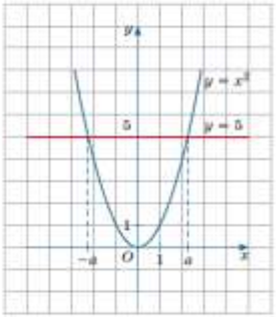


Рис. 7

носительно оси ординат точках $(a; 5)$ и $(-a; 5)$. Но что это за положительное число a? Пока ясно лишь, что $2 < a < 3$ и $a^2 = 5$.

Между числами 2 и 3 находится бесконечно много рациональных чисел. Может быть, одно из них, будучи возведено в квадрат, как раз и даст нам число 5?

Итак, предположим, что существует рациональное число, т. е. обыкновенная дробь $\frac{p}{q}$ такая, что $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 5$. Числитель p и знаменатель q не имеют общих множителей, отличных от 1, поскольку мы бы их заранее сократили. Тогда числа p^2 и q^2 также не имеют общих множителей. Получается, что дробь $\frac{p^2}{q^2} = \left(\frac{p}{q}\right)^2$ несократима и поэтому не может равняться натуральному числу, в частности не может равняться 5.

Метод доказательства, который мы применили только что, называют в математике методом доказательства от противного. Суть его в следующем. Нам нужно доказать некоторое утверждение, а мы предполагаем, что оно не выполняется (принято говорить так: «предположим противное»). Если в результате правильных рассуждений приходим к противоречию с предположением, то делаем вы-

вод: наше предположение неверно, значит, верно то, что требовалось доказать.

Что же получается? Получается, что у уравнения $x^2 = 5$ корни есть, но они не являются рациональными числами, это числа новой природы. Для обозначения этих корней используется новый математический символ $\sqrt{\ }$ и корни уравнения $x^2 = 5$ записывают так: $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$. Символ $\sqrt{5}$ читают так: «квадратный корень из пяти».

Аналогично обстоит дело с уравнением $x^2 = 2$, его корнями являются числа $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$.

Теперь для любого уравнения вида $x^2 = a$, где $a > 0$, можно записать корни: $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$ (рис. 8).

А уравнение $x^2 = 0$ имеет единственный корень 0, т. е. можно записать так: $\sqrt{0} = 0$.

Определение. Квадратным корнем из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число, квадрат которого равен a. Это число обозначают $\sqrt{a}$, число a при этом называют **подкоренным числом**. Операцию нахождения квадратного корня из неотрицательного числа называют **извлечением квадратного корня**.

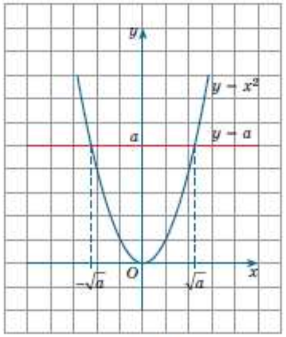


Рис. 8

Итак, *если a — неотрицательное число, то $\sqrt{a} \geqslant 0$ и $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.*

Например,

$\sqrt{36} = 6$, так как $6 \geqslant 0$ и $6^2 = 36$;

$\sqrt{625} = 25$, так как $25 \geqslant 0$ и $25^2 = 625$;

$\sqrt{3{,}24} = 1{,}8$, так как $1{,}8 \geqslant 0$ и $1{,}8^2 = 3{,}24$;

$\sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}$, так как $\frac{4}{9} \geqslant 0$ и $\left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$.

А как вычислить $\sqrt{5}$? Ведь нет натурального числа, квадрат которого равен 5, нет и обыкновенной дроби, при возведении которой в квадрат получится 5. Об этом мы поговорим в § 5.

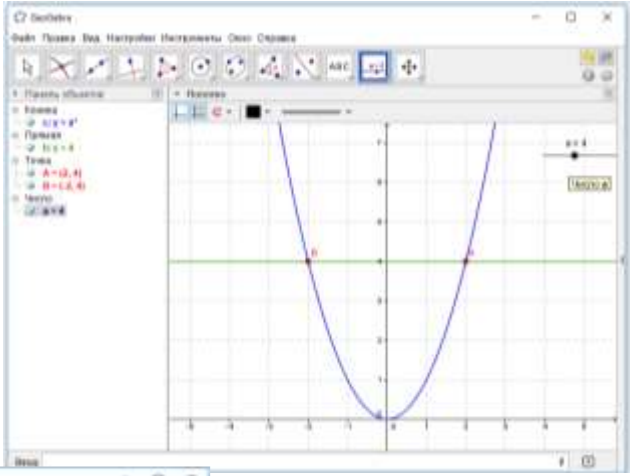
План-схема урока по теме «Познакомимся с квадратными корнями»

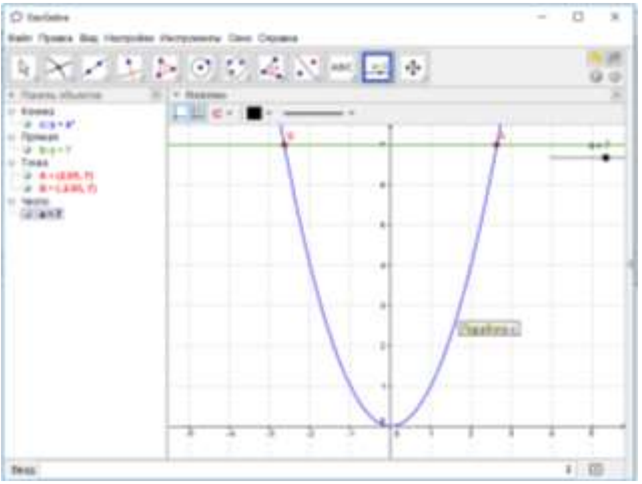
Урок «открытия» нового знания	Деятельность на уроке
Проверка домашнего задания, актуализация знаний.	Повторяются: графический способ решения уравнений, построение графика функции $y = x^2$.
Мотивация открытия нового знания. Побуждение к получению новой информации.	Постановка задачи: решите уравнения $x^2 = 4$ и $x^2 = 5$. Приём «Верю – проверю»
Получение новой информации	Работа с текстом учебника. Заполнение журнала.
Первичное закрепление с проговариванием во внешней речи.	Решение заданий в группах. Закрепление нового понятия. Составление схемы определения понятия квадратного корня. Составление схемы доказательства.
Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону.	Выполнение самостоятельной работы
Рефлексия. Осмысление изученного и сделанного	Подведение к выводу: раз мы узнали новый вид числа, то следует его подробно изучить – свойства, расположение на числовой оси, взаимоотношение с уже известными рациональными числами.
Информация о домашнем задании, инструктаж по его выполнению.	

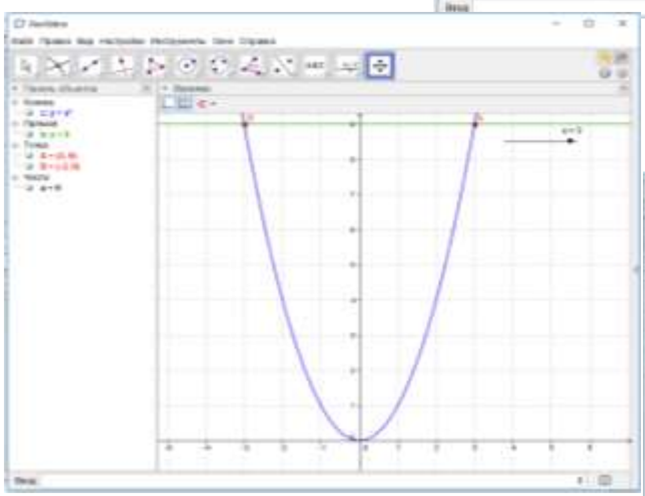
Побуждение к открытию новой информации

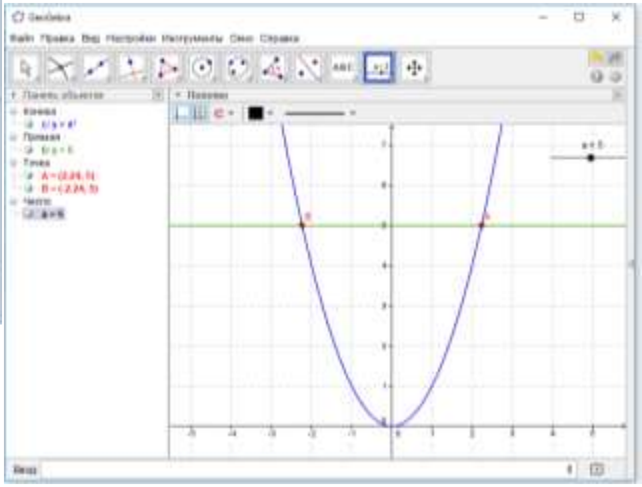
Приём «Верю – проверю»

Верю	Вопрос	Проверю
Да	Уравнение $x^2 = 4$ имеет корни.	$x_1 = -2,\ x_2 = 2$
Нет	Уравнение $x^2 = 5$ имеет корни.	









Получение новой информации

ИКТ Между числами 2 и 3 находится бесконечно много рациональных чисел. Может быть, одно из них, будучи возведено в квадрат, как раз и даст нам число 5?

Итак, предположим, что существует рациональное число, т. е. обыкновенная дробь $\frac{p}{q}$ такая, что $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 5$. Числитель p и знаменатель q не имеют общих множителей, отличных от 1, поскольку мы бы их заранее сократили. Тогда числа p^2 и q^2 также не имеют общих множителей. Получается, что дробь $\frac{p^2}{q^2} = \left(\frac{p}{q}\right)^2$ несократима и поэтому не может равняться натуральному числу, в частности не может равняться 5.

Составление схемы определения понятия

1. Пусть $\frac{p}{q}$ – рациональное число; $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 5.$
2. $p, \quad q$ – не имеют общих делителей.
3. $p^2, \quad q^2$ – не имеют общих делителей.
4. $\frac{p^2}{q^2} = \left(\frac{p}{q}\right)^2$ несократима. Противоречие с п.1.

Получение новой информации

Что же получается? Получается, что у уравнения $x^2 = 5$ корни есть, но они не являются рациональными числами, это числа новой природы. Для обозначения этих корней используется новый математический символ $\sqrt{}$ и корни уравнения $x^2 = 5$ записывают так: $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$. Символ $\sqrt{5}$ читают так: «квадратный корень из пяти».

Аналогично обстоит дело с уравнением $x^2 = 2$, его корнями являются числа $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$.

Теперь для любого уравнения вида $x^2 = a$, где $a > 0$, можно записать корни: $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$ (рис. 8).

А уравнение $x^2 = 0$ имеет единственный корень 0, т. е. можно записать так: $\sqrt{0} = 0$.

Определение. **Квадратным корнем из неотрицательного числа** a называют такое неотрицательное число, квадрат которого равен a. Это число обозначают $\sqrt{a}$, число a при этом называют **подкоренным числом**. Операцию нахождения квадратного корня из неотрицательного числа называют **извлечением квадратного корня**.

Составление схемы определения понятия

Корень квадратный из неотрицательного числа *a*:

1) Неотрицательное число **И**

2) Квадрат этого числа равен *a*.

Квадратный корень из неотрицательного числа *a*

Показатель корня (2 не пишется)

$\boxed{\sqrt[2]{a}}$

Подкоренное выражение

$$\sqrt{a} \geq 0, \quad \left(\sqrt{a}\right)^2 = a, \quad a \geq 0$$

Первичное закрепление с проговариванием во внешней речи

Упражнения

4.1. Решите уравнение:
а) $x^2 = 4$; в) $x^2 = -3$; д) $x^2 = -1$;
б) $x^2 = 7$; г) $x^2 = 11$; е) $x^2 = 9$.

4.2. Назовите верные равенства. Ответ обоснуйте:
а) $\sqrt{100} = 10$; г) $\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{7}{9}$;
б) $\sqrt{1,44} = -1,2$; д) $\sqrt{(-15)^2} = 15$;
в) $\sqrt{-121} = -11$; е) $\sqrt{(-13)^2} = -13$.

4.3. Найдите сторону квадрата, если его площадь равна:
а) 64 см^2; в) 15 см^2; д) 2,25 см^2;
б) 3,24 см^2; г) 121 см^2; е) 19 см^2.

Вычислите.

4.4. а) $\sqrt{81}$; в) $\sqrt{1}$; д) $\sqrt{256}$;
б) $\sqrt{225}$; г) $\sqrt{121}$; е) $\sqrt{0}$.

4.5. а) $\sqrt{0,64}$; в) $\sqrt{0,04}$; д) $\sqrt{3,24}$;
б) $\sqrt{2,89}$; г) $\sqrt{1,96}$; е) $\sqrt{0,01}$.

4.6. а) $\sqrt{\frac{81}{121}}$; в) $\sqrt{1\frac{29}{196}}$; д) $\sqrt{1\frac{25}{144}}$;
б) $\sqrt{4\frac{25}{36}}$; г) $\sqrt{\frac{121}{169}}$; е) $\sqrt{3\frac{22}{49}}$.

4.7. а) $\left(\sqrt{3}\right)^2$; в) $\left(\sqrt{4,5}\right)^2$; д) $\left(\sqrt{\frac{7}{12}}\right)^2$;
б) $\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\right)^2$; г) $\left(\sqrt{7}\right)^2$; е) $\left(\sqrt{3,2}\right)^2$.

4.8. а) $\left(-\sqrt{13}\right)^2$; в) $-\left(-\sqrt{81}\right)^2$; д) $-\left(\sqrt{1,2}\right)^2$;
б) $-\left(\sqrt{2,5}\right)^2$; г) $\left(-\sqrt{17}\right)^2$; е) $-\left(-\sqrt{64}\right)^2$.

4.9. а) $\left(2\sqrt{3}\right)^2$; в) $\left(-3\sqrt{5}\right)^2$; д) $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2$;
б) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$; г) $\left(3\sqrt{7}\right)^2$; е) $\left(-3\sqrt{7}\right)^2$.

4.10. а) $\sqrt{81}\cdot\sqrt{9}$; г) $\sqrt{\frac{169}{225}}\cdot\sqrt{625}$;
б) $\sqrt{49}\cdot\sqrt{144}$; д) $\sqrt{324}\cdot\sqrt{1\frac{45}{324}}$;
в) $\sqrt{\frac{16}{25}}\cdot\sqrt{225}$; е) $\sqrt{289}\cdot\sqrt{1\frac{35}{289}}$.

4.11. Имеет ли смысл выражение:
а) $\sqrt{5^2-23}$; в) $\sqrt{1,1\cdot1,3-1,2^2}$; д) $\sqrt{\sqrt{2}-1}$;
б) $\sqrt{(3^2-10)^2}$; г) $\sqrt{\sqrt{0,04}-0,2}$; е) $\sqrt{1-\sqrt{3}}$?

Найдите, если возможно, значение заданного числового выражения и укажите выражения, которые не имеют смысла.

4.12. а) $\sqrt{81}+\sqrt{100}$; в) $\sqrt{121}-\sqrt{64}$; д) $\sqrt{1}-\sqrt{36}$;
б) $\sqrt{256}+\sqrt{169}$; г) $\sqrt{49}-\sqrt{225}$; е) $\sqrt{0}-\sqrt{49}$.

4.13. а) $\sqrt{9-\sqrt{64}}$; в) $\sqrt{44+\sqrt{25}}$; д) $\sqrt{1-\sqrt{25}}$;
б) $\sqrt{\sqrt{64}-11}$; г) $\sqrt{16+\sqrt{169}}$; е) $\sqrt{12-\sqrt{121}}$.

Рефлексия деятельности

Основная деятельность учащегося	Справился сам	Справился с помощью	Не справился
Повторение: графический способ решения уравнений, построение графика функции.			
Постановка задачи: решите уравнения.			
Работа с текстом учебника. Заполнение журнала.			
Анализ и формулировка проблемы. Выдвижение гипотезы: существует рациональное число, квадрат которого равен 5. Проверка гипотезы. Получение результата: понятие квадратного корня.			
Выполнение самостоятельной работы. Работа с текстом учебника. Получение образовательного продукта: схемы доказательства иррациональности числа.			
Решение заданий в группах. Закрепление нового понятия. Составление схемы определения понятия квадратного корня.			
Подведение к выводу: раз мы узнали новое понятие, то следует более подробно изучить его свойства, взаимоотношение с уже известными понятиями.			

Рефлексия деятельности

- Удалось ли мне решить поставленные перед собой на уроке задачи?
- Достигнута ли мною цель урока?
- Что мне удалось на уроке?
- Что я для этого сделал(а) (обсуждение результатов заполнения листа рефлексии)?
- Что у меня не получилось на уроке?
- Что мне помешало?
- Что я должен сделать, чтобы в следующий раз получилось?
- Какую оценку я заслужил в соответствии с критериями?
- Определение домашнего задания и ближайших задач.

План-схема урока по теме «Понятие логарифма»

Урок «открытия» нового знания	Деятельность на уроке
Проверка домашнего задания, актуализация знаний.	Повторяются: графический способ решения уравнений, построение графика функции $y=3^x$.
Мотивация открытия нового знания. Побуждение к получению новой информации.	Постановка задачи: решите уравнения $3^x=9$ и $3^x=5$.
Получение новой информации	Работа с текстом учебника. Заполнение журнала.
Обработка новой информации	Анализ и формулировка проблемы. Выдвижение гипотезы: существует показатель степени, в которую необходимо возвести 3, чтобы получилось 5. Проверка гипотезы. Получение результата: понятие логарифма.
Первичное закрепление с проговариванием во внешней речи.	Решение заданий в группах. Закрепление нового понятия. Составление схемы определения понятия логарифма.
Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону.	Выполнение самостоятельной работы. Работа с текстом учебника. Получение образовательного продукта: схемы доказательства иррациональности числа $\log_3 5$
Рефлексия. Осмысление изученного и сделанного	Подведение к выводу: раз мы узнали новое понятие, то следует более подробно изучить его свойства, взаимоотношение с уже известными понятиями.
Информация о домашнем задании, инструктаж по его выполнению.	

Побуждение к открытию новой информации

§ 45. Понятие логарифма

Рассмотрим четыре показательных уравнения: $3^x = 9$, $3^x = \frac{1}{27}$, $3^x = \sqrt{3}$; $3^x = 5$. Первые три уравнения мы решим без труда, их корни — рациональные числа:

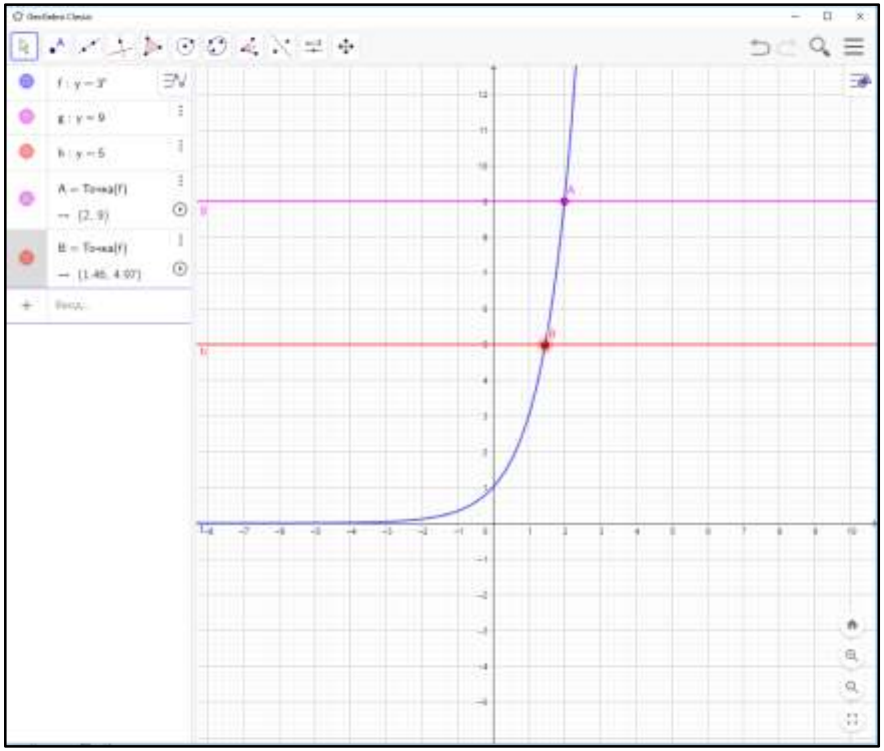
$$3^x = 9, \quad x = 2;$$

$$3^x = \frac{1}{27}, \quad x = -3;$$

$$3^x = \sqrt{3}, \quad x = \frac{1}{2}.$$

Таблица «Верю – проверю»

Верю	Вопрос	Проверю
Да	Уравнение $3^x = 9$ имеет корни.	$x = 2$
Нет	Уравнение $3^x = 5$ имеет корни.	



Получение новой информации

Пример 3 Доказать, что $\log_3 5$ — иррациональное число.

Решение. Предположим, что $\log_3 5$ — рациональное число, т. е. $\log_3 5 = \frac{p}{q}$, где p, q — натуральные числа. Равенство $\log_3 5 = \frac{p}{q}$ означает, что $3^{\frac{p}{q}} = 5$. Далее имеем: $\left(3^{\frac{p}{q}}\right)^q = 5^q$, $3^p = 5^q$. Последнее равенство невозможно хотя бы потому, что число 5^q оканчивается цифрой 5, а никакая натуральная степень числа 3 цифрой 5 не оканчивается.

Получили противоречие, это значит, что сделанное предположение о том, что $\log_3 5$ — рациональное число, неверно. Вывод: $\log_3 5$ — иррациональное число.

1. Пусть $\log_3 5$ – рациональное число, т.е. $\log_3 5 = \frac{p}{q}$;
2. $3^{\frac{p}{q}} = 5 \Leftrightarrow \left(3^{\frac{p}{q}}\right)^q = 5^q \Leftrightarrow 3^p = 5^q$;
3. Противоречие;
4. Результат $\log_3 5$ – иррациональные число.

Схема доказательства

Получение новой информации

С аналогичной «нештатной» ситуацией мы встретились в курсе алгебры 8-го класса, когда надо было найти положительный корень уравнений: $x^2 = 4$, $x^2 = 9$, $x^2 = 5$. Для первых двух уравнений всё просто: $x = 2$, $x = 3$. А чтобы записать корень третьего уравнения, пришлось вводить новый термин «квадратный корень» и новое обозначение $\sqrt{5}$. С уравнением $3^x = 5$ поступим так же: введём новый термин «логарифм» и новое обозначение $\log_3 5$ (читают: «Логарифм числа 5 по основанию три»). Итак, уравнение $3^x = 5$ мы решили: $x = \log_3 5$.

Определение. Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от 1 основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b. Обозначение: $\log_a b$ (читают: «*Логарифм числа b по основанию a*»).

Схема определения понятия

Логарифм числа b по основанию a:

1) $b > 0$ и

2) $a > 0$ и

3) $a \neq 1$ и

4) $a^{\log_a b} = b$

Получение новой информации

§ 42. Понятие касательной. Число e и функция $y = e^x$

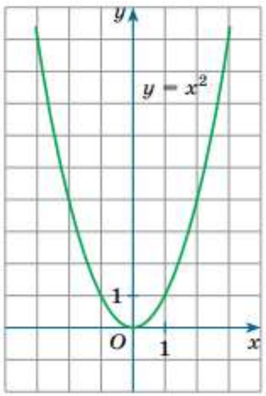


Рис. 159

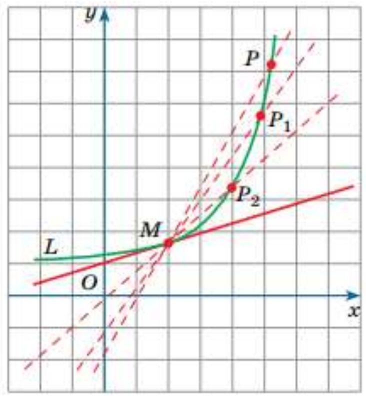


Рис. 160

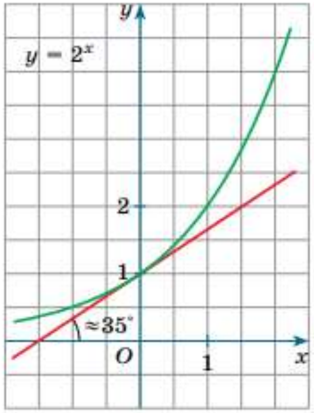


Рис. 161

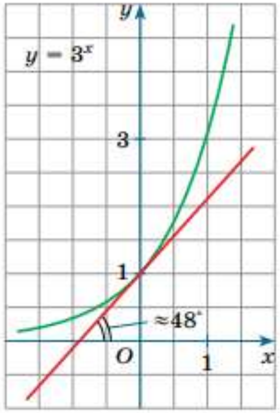


Рис. 162

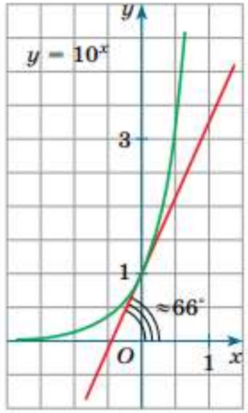


Рис. 163

точке M. Рассуждаем следующим образом. Возьмём ещё одну точку на этой кривой — точку P. Проведём секущую MP. Возьмём на кривой точку P_1 поближе к M, проведём секущую MP_1, затем точку P_2 ещё ближе к M и проведём секущую MP_2 и т. д. Как видите, секущая изменяет своё положение, она как бы поворачивается вокруг точки M. Часто бывает так, что в этом процессе секущая приближается к некоторому предельному положению. Эту прямую — предельное положение секущей — называют *касательной к кривой L в точке M*.

Если, в частности, на параболе $y = x^2$ взять точку P, провести секущую OP, затем начать приближать точку P по параболе к точке O и проводить секущие, то вы увидите, что предельным положением этих секущих будет ось абсцисс, именно она и является касательной к параболе в точке O, что соответствует нашим интуитивным представлениям.

Проведём в точке $x = 0$ касательные к графикам трёх показательных функций $y = 2^x$, $y = 3^x$ и $y = 10^x$ (рис. 161, 162, 163). Видим, что чем больше основание, тем больше угол наклона касательной и оси абсцисс: касательная становится более «крутой». Можно убедиться в том, что касательная к графику функции $y = 2^x$ образует с осью абсцисс угол примерно в 35°, а для касательных к $y = 3^x$ и к $y = 10^x$ получатся углы наклона примерно в 48° и в 66°.

Итак, если основание a показательной функции $y = a^x$ постепенно и непрерывно увеличивается от 2 до 10, то угол между касательной к графику функции в точке $x = 0$ и осью абсцисс постепенно и непрерывно увеличивается от 35° да 66°. Значит, существует такое основание e, что касательная к графику показательной функции $y = e^x$ в точке $x = 0$ образует с осью абсцисс угол 45°. Это основание заключено между числами 2 и 3, поскольку для функции $y = 2^x$ интересующий нас угол равен 35°, что меньше, чем 45°, а для функции $y = 3^x$ он равен 48°, что уже немного больше, чем 45°. В курсе высшей математики доказано, что $e = 2{,}7182818284590...$, это иррациональное число (бесконечная десятичная непериодическая дробь). На практике обычно полагают, что $e \approx 2{,}7$.

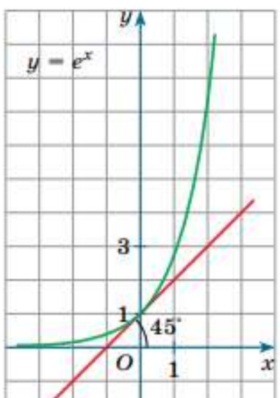


Рис. 164

График показательной функции $y = e^x$ изображён на рисунке 164. Он отличается от графиков показательных функций с другими основаниями тем, что касательная к графику в точке $x = 0$ параллельна биссектрисе $y = x$ первой и третьей координатных четвертей; угол наклона касательной к оси абсцисс равен 45°. Функцию $y = e^x$ называют *экспоненциальной*, а её график — *экспонентой*, хотя зачастую, для краткости, экспонентой называют и саму функцию $y = e^x$, и её график.

Функция $y = e^x$ чаще других показательных функций используется на практике. Приведём два стандартных, широко известных примера.

3. Формирование предметных компетенций.

ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича

Первичное закрепление с проговариванием во внешней речи

4.14. а) $\left(\sqrt{3}\right)^6$; в) $\left(-3\sqrt{7}\right)^4$; д) $\left(-2\sqrt{6}\right)^4$;
б) $\left(2\sqrt{-5}\right)^4$; г) $\left(\sqrt{5}\right)^6$; е) $\left(5\sqrt{-2}\right)^4$.

Вычислите.

4.15. а) $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{0{,}36}$; г) $\frac{2}{5}\cdot\sqrt{900}$;
б) $0{,}2\cdot\sqrt{1600}$; д) $-7\cdot\sqrt{0{,}04}$;
в) $-0{,}3\cdot\sqrt{10\,000}+\sqrt{64}$; е) $0{,}5\cdot\sqrt{0{,}04}+\frac{1}{6}\cdot\sqrt{144}$.

4.16. а) $\sqrt{3^2+4^2}$; в) $\sqrt{15^2-9^2}$; д) $\sqrt{5^2+12^2}$;
б) $\sqrt{8^2+15^2}$; г) $\sqrt{12^2+9^2}$; е) $\sqrt{17^2-8^2}$.

4.17. Найдите, если возможно, значение заданного алгебраического выражения. Укажите выражения, которые не определены при заданном значении переменной:
а) $\sqrt{6-2a}$, если $a=1$; г) $\sqrt{4-2a}$, если $a=1{,}5$;
б) $\sqrt{5b^2+10b+9}$, если $b=2$; д) $\sqrt{6b^2+5b-3}$, если $b=-3$;
в) $\sqrt{c^3-c^2}$, если $c=5$; е) $\sqrt{2x^2-x^3}$, если $x=3$.

4.18. Решите уравнение:
а) $\frac{1}{3}x^2=75$; в) $4x^2-28=0$; д) $5x^2-484=121$;
б) $\frac{1}{6}x^2=24$; г) $3x^2-78=0$; е) $7x^2-558=625$.

4.19. Укажите, если возможно, при каком значении переменной равенство является верным:
а) $\sqrt{x}=11$; в) $\sqrt{x}=-9$; д) $\sqrt{x}=\frac{3}{4}$;
б) $\sqrt{x}=\frac{2}{3}$; г) $\sqrt{x}=16$; е) $\sqrt{x}=-12$.

4.20. Решите уравнение:
а) $\sqrt{x-1}=4$; в) $\sqrt{289-x^2}=8$; д) $\sqrt{-x}=-13$;
б) $\sqrt{x+2}=6$; г) $\sqrt{x^2-25}=0$; е) $\sqrt{-x}=17$.

4.21. Укажите хотя бы одно целое число x, удовлетворяющее неравенству:
а) $x>\sqrt{2}$; в) $x\leqslant\sqrt{7}$; д) $3x<\sqrt{13}$;
б) $2x<\sqrt{3}$; г) $x>\sqrt{5}$; е) $x\geqslant\sqrt{11}$.

4.22. Найдите, если возможно, наибольшее целое число x, удовлетворяющее неравенству:
а) $x<\sqrt{5}$; в) $x\geqslant\sqrt{\frac{17}{3}}$; д) $x<\sqrt{21}$;
б) $x\leqslant\sqrt{13}$; г) $x>\sqrt{2}$; е) $x\leqslant\sqrt{\frac{19}{2}}$.

4.23. Укажите два последовательных натуральных числа, между которыми заключено число:
а) $\sqrt{14}$; в) $\sqrt{0{,}7}$; д) $\sqrt{2{,}1}$;
б) $\sqrt{\frac{43}{11}}$; г) $\sqrt{21}$; е) $\sqrt{\frac{37}{5}}$.

4.24. Сколько целых чисел принадлежит промежутку:
а) $\left[1;\sqrt{13}\right]$; в) $\left(-\sqrt{21};\sqrt{43}\right)$; д) $\left(\sqrt{0{,}7};\sqrt{0{,}91}\right]$;
б) $\left[-7;\sqrt{19}\right]$; г) $\left(\sqrt{3};\sqrt{53}\right)$; е) $\left[-\sqrt{47};-\sqrt{37}\right)$?

4.25. Сколько натуральных чисел принадлежит промежутку:
а) $\left[-1;\sqrt{51}\right]$; в) $\left(-\sqrt{13};\sqrt{13}\right)$; д) $\left(-\sqrt{71};\sqrt{0{,}97}\right]$;
б) $\left[-2;\sqrt{39}\right]$; г) $\left(-\sqrt{23};\sqrt{23}\right)$; е) $\left[-\sqrt{77};1\right)$?

5.9. Докажите, что на графике функции $y = \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{2}$ имеется только одна точка, у которой абсцисса и ордината — целые числа. Постройте график этой функции.

1. Точка $(-1; 0)$ – принадлежит графику данной функции

2. Пусть существует ещё одна точка $(a; b)$, принадлежащая графику данной функции, где a и b – целые числа.

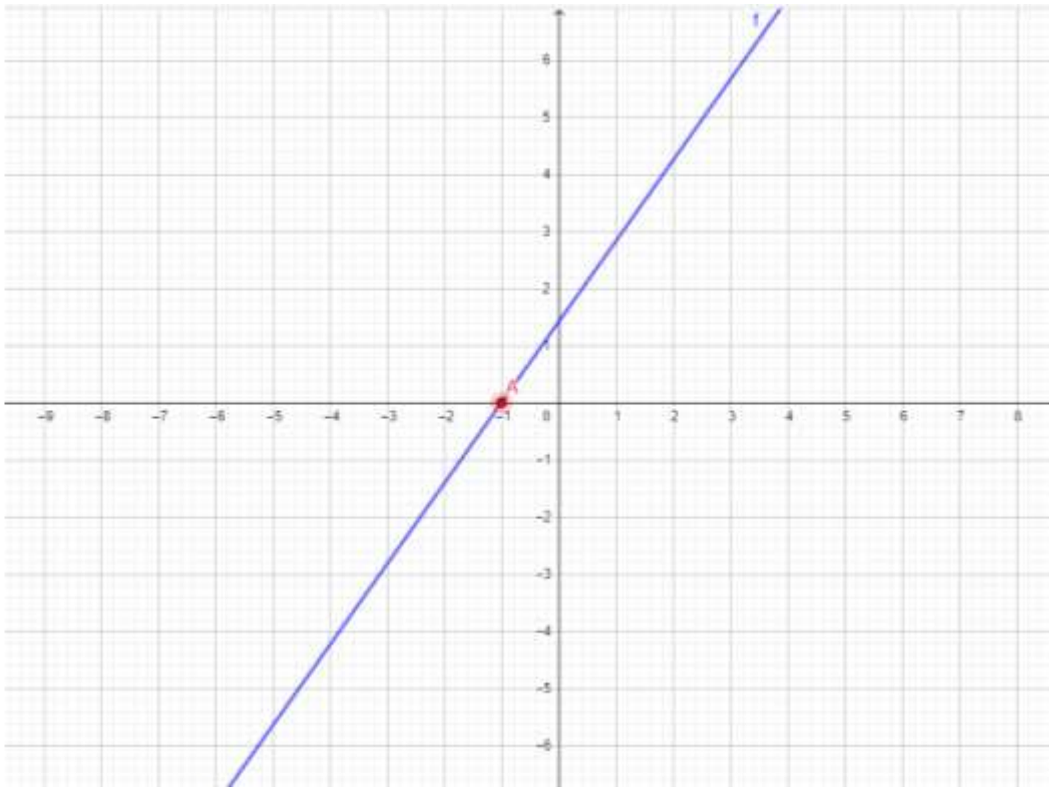
3. Тогда имеет место равенство $b = \sqrt{2} \cdot a + \sqrt{2}$

Отсюда $\sqrt{2} = \dfrac{b}{a+1}$

$\sqrt{2}$ – иррациональное число

$\dfrac{b}{a+1}$ – рациональное число

Мы пришли к противоречию.



7.17. Сравните числа:

а) $\sqrt{5}+\sqrt{10}$ и $\sqrt{11}+2$;
б) $\sqrt{11}-\sqrt{10}$ и $\sqrt{6}-\sqrt{5}$;
в) $3\sqrt{5}+\sqrt{7}$ и $2\sqrt{11}+\sqrt{6}$;
г) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ и $\sqrt{5}+2$;
д) $\sqrt{10}-\sqrt{7}$ и $\sqrt{11}-\sqrt{6}$;
е) $3\sqrt{10}-2\sqrt{5}$ и $4\sqrt{7}-3\sqrt{3}$.

а. Правая и левая части неравенства неотрицательны. Возведём почленно в квадрат:

$$\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)^2 \vee \left(\sqrt{11}+2\right)^2$$
$$15+10\sqrt{2} \vee 15+4\sqrt{11}$$
$$10\sqrt{2} \vee 4\sqrt{11}$$
$$5\sqrt{2} \vee 2\sqrt{11}$$
$$\sqrt{50} \vee \sqrt{44}$$
$$\sqrt{5}+\sqrt{10} > \sqrt{11}+2$$

б. Прибавим к обеим частям равенства $\left(\sqrt{10}+\sqrt{5}\right)$

$$\sqrt{11}+\sqrt{5} \vee \sqrt{10}+\sqrt{6}$$
$$\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)^2 \vee \left(\sqrt{10}+\sqrt{6}\right)^2$$
$$16+2\sqrt{55} \vee 16+2\sqrt{60}$$
$$\sqrt{55} \vee \sqrt{60}$$
$$\sqrt{11}-\sqrt{10} < \sqrt{6}-\sqrt{5}$$

д. Рассмотрим верные неравенства:

$$\sqrt{10} < \sqrt{11}$$
$$-\sqrt{7} < -\sqrt{6}$$

Выполним почленное сложение:

$$\sqrt{10}-\sqrt{7} < \sqrt{11}-\sqrt{6}$$

ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича

§ 6. Действительные числа и числовая прямая

Объединив множество $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел с множеством всех иррациональных чисел, получим множество действительных чисел, которое обозначают буквой $\boldsymbol{R}$ (от лат. *realis* — действительный).

Начиная с 5-го класса вы пользовались координатной прямой. Но оказывается, в ваших знаниях был вполне оправданный пробел: не для любой точки координатной прямой вы сумели бы найти координату. Смотрите: на рисунке 9 изображена координатная прямая, на её единичном отрезке, как на катете, построен прямоугольный треугольник, второй катет которого равен 2. Гипотенуза OB треугольника отложена на координатной прямой от точки O вправо, получилась точка D. Чему равна координата точки D? В курсе геометрии вы познакомитесь (или уже познакомились) со знаменитой теоремой Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Значит,

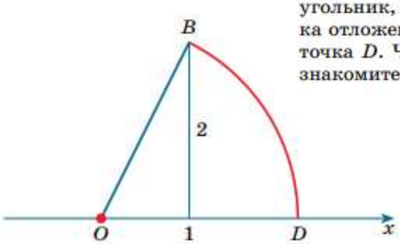


Рис. 9

$$OB^2 = O1^2 + 1B^2 = 1 + 4 = 5;\ OB = OD = \sqrt{5}.$$

Но $\sqrt{5}$ — иррациональное число. Значит, ни в 5-м, ни в 6-м, ни в 7-м классе координату точки D вы найти бы не смогли, у этой точки как бы не было координаты. Можно привести много других подобных примеров. Зато теперь каждое действительное число можно изобразить точкой на координатной прямой. Верно и обратное: каждая точка координатной прямой имеет действительную координату.

Координатная прямая есть геометрическая модель множества действительных чисел; по этой причине для координатной прямой впредь мы имеем право использовать термин **числовая прямая**.

Для действительных чисел a, b, c выполняются привычные законы арифметических операций (переместительный, сочетательный, распределительный):

$$a + b = b + a;$$
$$ab = ba;$$
$$a + (b + c) = (a + b) + c;$$
$$a(bc) = (ab)c;$$
$$(a + b)c = ac + bc.$$

Для действительных чисел выполняются привычные правила:

— произведение (частное) двух положительных чисел — положительное число;

— произведение (частное) двух отрицательных чисел — положительное число;

— произведение (частное) положительного и отрицательного чисел — отрицательное число.

Действительные числа сравнивают, опираясь на следующее определение.

Определение. Говорят, что действительное число a **больше** действительного числа b, если их разность $a - b$ — положительное число; пишут: $a > b$. Говорят, что действительное число a **меньше** действительного числа b, если их разность $a - b$ — отрицательное число; пишут: $a < b$.

Из этого определения следует, что *всякое положительное число a больше нуля* (поскольку разность $a - 0 = a$ — положительное число), а *всякое отрицательное число b меньше нуля* (поскольку разность $b - 0 = b$ — отрицательное число).

Числовая прямая делает операцию сравнения чисел особенно наглядной: *из двух чисел a, b больше то, которое располагается на числовой прямой правее.*

Наряду со знаками *строгих неравенств* ($<$, $>$) используют знаки *нестрогих неравенств*:

$a \geqslant 0$ означает, что a больше нуля или равно нулю, т. е. a — *неотрицательное число* (положительное или 0), или что a *не меньше* нуля;

$a \leqslant 0$ означает, что a меньше нуля или равно нулю, т. е. a — *неположительное число* (отрицательное или 0), или что a *не больше* нуля;

$a \geqslant b$ означает, что a больше или равно b, т. е. $a - b$ — *неотрицательное число*, или что a *не меньше* b; $a - b \geqslant 0$;

$a \leqslant b$ означает, что a меньше или равно b, т. е. $a - b$ — *неположительное число*, или что a *не больше* b; $a - b \leqslant 0$.

Например, для любого действительного числа a верно неравенство $a^2 \geqslant 0$; для любых действительных чисел a и b верно неравенство $(a - b)^2 \geqslant 0$.

Обычно неравенства вида $a > b$, $c > d$ (или $a < b$, $c < d$) называют *неравенствами одинакового смысла*, а неравенства $a > b$ и $c < d$ — *неравенствами противоположного смысла*.

Пример Какое число больше: $a = 3\frac{2}{9}$ или π?

Решение. Обратим обыкновенную дробь $\frac{2}{9}$ в десятичную:

$$\frac{2}{9} = 0{,}222222\ldots.$$

Глава 1
Множество действительных чисел

1. Квадратный корень из неотрицательного числа

Из любого неотрицательного числа можно извлечь квадратный ________. Этому помогает таблица квадратов двузначных ________.

Задание 1. Заполните пропуски в таблице на с. 5. ◀

Если, например, нужно извлечь ________________ корень из числа 1681, попытаемся найти это __________ в таблице. Находим его в перекрёстке числа десятков ______ и числа единиц 1. Значит, $41^2 =$ ________, откуда $\sqrt{1681} =$ ______.

Задание 2. Найдите по таблице, чему равен квадратный корень из чисел: а) 9; б) 64; в) 361; г) 1369. ◀

Бывает, что под корнем стоит число большее, чем числа, которые есть в приведённой ________________. Тогда полезно разложить это число на ____________________. Пусть, например, нужно ____________ квадратный корень из числа 179 776. Такого числа в нашей таблице _____. В ней самое большое число _______. Попробуем разложить данное число 179 776 на ____________. Получим: $179\,776 = 2^6 \cdot 2809 = 64 \cdot 2809$. Но мы знаем, что $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot$ ______, то есть в данном случае $\sqrt{64 \cdot 2809} = \sqrt{\_\_\_} \cdot \sqrt{2809} = 8 \cdot$ ______ $= 424$.

Таблица квадратов двузначных чисел

Десятки	Единицы 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196		256	289	324	361
2	400	441		529	576	625	676	729	784	
3		961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025		2209	2304	2401
5	2500	2601	2704		2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600		3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329		5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396		7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409		9801

Задание 3. Чему равен квадратный корень из числа 2 755 600? ◄

Разумеется, не всегда ______________ из числа извлекается нацело. Например, нельзя извлечь точный корень из ________ 10. $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, а $\sqrt{10}$ находится между числами ____ и ____. Он равен 3,... . Это число ____________________, оно не равно не только никакому целому __________, но и никакой обыкновенной ______ ______ и никакой конечной десятичной __________. Оно выражается бесконечной десятичной __________. Если требуется точный __________, то так и пишут: $\sqrt{10}$.

Задание 4. Решите уравнение: а) $x^2 = 81$; б) $x^2 = 10\ 000$; в) $x^2 = 54$; г) $x^2 = -9$. ◄

Впрочем, если подкоренное ________________ раскладывается на ____________________, то можно попробовать его упростить, вынося множители из-под знака корня. Это получится, если сами множители являются точными __________________.

Задание 5. Попробуйте упростить следующие квадратные корни: а) $\sqrt{10}$; б) $\sqrt{11}$; в) $\sqrt{12}$; г) $\sqrt{98}$. ◄

Если требуется извлечь квадратный корень из обыкновенной __________, то сначала нужно эту __________ сделать несократимой. Затем следует воспользоваться ____________________ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Пусть, например, нам нужно упростить __________ $\sqrt{\frac{98}{450}}$. Под корнем стоит дробь, которую можно сократить на 2. После этого находим квадратный корень из числителя и знаменателя:

$$\sqrt{\frac{98}{450}} = \sqrt{\frac{49}{225}} = \frac{7}{\ }.$$

Задание 6. Решите уравнение $1083x^2 = 363$. ◄

Если под корнем стоит десятичная __________, то имеет смысл преобразовать её в обыкновенную __________ с чётным числом нулей в знаменателе. Например,

$$\sqrt{0{,}5} = \sqrt{\frac{50}{100}} = \frac{\sqrt{50}}{10} = \frac{5\sqrt{2}}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Задание 7. Решите уравнение $x^2 = 0{,}289$. ◄

Решения и ответы

Задание 1. $15^2 = 225$, $22^2 = 484$, $29^2 = 841$, $30^2 = 900$, $46^2 = 2116$, $53^2 = 2809$, $61^2 = 3721$, $74^2 = 5476$, $87^2 = 7569$, $98^2 = 9604$.

Задание 2. а) 3; б) 8; в) 19; г) 37.

Задание 3. $\sqrt{2\ 755\ 600} = \sqrt{4 \cdot 6889 \cdot 100} = 2 \cdot 83 \cdot 10 = 1660$.

Задание 4. а) ± 9; б) ± 100; в) $\pm\sqrt{54} = \pm\sqrt{9 \cdot 6} = \pm 3\sqrt{6}$; г) нет корней.

Задание 5. а) $\sqrt{10}$ не упрощается; б) $\sqrt{11}$ не упрощается; в) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$; г) $\sqrt{98} = \sqrt{49 \cdot 2} = 7\sqrt{2}$.

Задание 6. $x = \pm\sqrt{\frac{363}{1083}}$; $x = \pm\sqrt{\frac{121}{361}}$; $x = \pm\frac{11}{19}$.

Задание 7. $x = \pm\sqrt{0{,}289}$; $x = \pm\sqrt{\frac{2890}{10\ 000}}$; $x = \pm\frac{17\sqrt{10}}{100}$.

4.6. Установите, имеет ли смысл выражение, и, если имеет, то найдите его значение:

а) $(\sqrt{5})^2 = 5$;

б) $(\sqrt{-5})^2$ — выражение не имеет смысла, т. к. $-5 < 0$;

в) $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$;

г) $\sqrt{-5^2} = \sqrt{-25}$ — выражение не имеет смысла, т. к. $-25 < 0$;

д) $(\sqrt{7})^2$ ____________________________;

е) $(\sqrt{-7})^2$ ____________________________;

ж) $\sqrt{(-7)^2}$ ____________________________;

з) $\sqrt{-7^2}$ ____________________________;

4.9. Решите уравнение.

а) $3x^2 = 15$

Решение.

$x^2 = \frac{15}{3}$;

$x^2 = 5$;

$x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$.

Ответ: $\pm\sqrt{5}$.

в) $5x^2 - 55 = 0$

Решение.

Ответ: ____________.

5.3. Сравните числа.

а) $\sqrt{10}$ и 3. *Решение.* $3 = \sqrt{9}$, а $\sqrt{10} > \sqrt{9}$, поэтому $\sqrt{10} > 3$.

б) $\sqrt{21}$ и 5. *Решение.* ____________________________.

в) $-\sqrt{29}$ и -6. *Решение.* ____________________________.

г) $\sqrt{7}$ и 2,5. *Решение.* ____________________________.

6.2. Верно ли утверждение?

а) Любое натуральное, целое, рациональное или иррациональное число является действительным. да ☐ нет ☐

б) Не любое действительное число является натуральным. да ☐ нет ☐

в) Некоторые действительные числа являются целыми. да ☐ нет ☐

г) Некоторые рациональные числа являются иррациональными. да ☐ нет ☐

7.3. Известно, что $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$. Оцените значение данного выражения.

а) $5\sqrt{2} + 3$

Решение.

Умножим все три части неравенства $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ на 5, оставив знаки неравенства (<) неизменными, т. к. 5 — положительное число. Получим:

$$1{,}4 \cdot 5 < \sqrt{2} \cdot 5 < 1{,}5 \cdot 5,$$

$$7 < 5\sqrt{2} < 7{,}5.$$

Прибавим 3 ко всем трём частям последнего неравенства:

$$7 + 3 < 5\sqrt{2} + 3 < 7{,}5 + 3,$$

$$10 < 5\sqrt{2} + 3 < 10{,}5.$$

б) $3\sqrt{2} - 1$

в) $-7\sqrt{2}$

г) $2 - \sqrt{2}$

$$x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=0$$

Способ 1

1. Введём обозначение, пусть

$$a=\sqrt{2}$$

$$x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=0$$

Способ 1

1. Введём обозначение, пусть

$$a=\sqrt{2}$$

2. Переформулируем задание в задачу с параметром:

$$x^3-\left(a+1\right)x^2+a^2=0$$

$$x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=0$$

Способ 1

1. Введём обозначение, пусть

$$a=\sqrt{2}$$

2. Переформулируем задание в задачу с параметром:

$$x^3-\left(a+1\right)x^2+a^2=0$$

3. Выберем в качестве параметра x, решим уравнение относительно a:

$$a^2-x^2a+\left(x^3-x^2\right)=0$$

$$x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=0$$

Способ 1

1. Введём обозначение, пусть

$$a=\sqrt{2}$$

2. Переформулируем задание в задачу с параметром:

$$x^3-\left(a+1\right)x^2+a^2=0$$

3. Выберем в качестве параметра *x*, решим уравнение относительно *a*:

$$a^2-x^2a+\left(x^3-x^2\right)=0$$

$$D=x^4-4\left(x^3-x^2\right)=x^2\left(x-2\right)^2$$

$$x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=0$$

Способ 1

1. Введём обозначение, пусть

$$a=\sqrt{2}$$

2. Переформулируем задание в задачу с параметром:

$$x^3-\left(a+1\right)x^2+a^2=0$$

3. Выберем в качестве параметра x, решим уравнение относительно a:

$$a^2-x^2a+\left(x^3-x^2\right)=0$$

$$D=x^4-4\left(x^3-x^2\right)=x^2\left(x-2\right)^2$$

$$a=\frac{x^2\pm x\left(x-2\right)}{2}$$

$$x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=0$$

Способ 1

1. Введём обозначение, пусть

$$a=\sqrt{2}$$

2. Переформулируем задание в задачу с параметром:

$$x^3-\left(a+1\right)x^2+a^2=0$$

3. Выберем в качестве параметра x, решим уравнение относительно a:

$$a^2-x^2a+\left(x^3-x^2\right)=0$$

$$D=x^4-4\left(x^3-x^2\right)=x^2\left(x-2\right)^2$$

$$a=\frac{x^2+x\left(x-2\right)}{2}\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=x^2-x,\\ a=x.\end{array}\right.$$

Реализация технологии интеграции урочной и внеурочной деятельности

$$x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=0$$

Способ 1

1. Введём обозначение, пусть

$$a=\sqrt{2}$$

2. Переформулируем задание в задачу с параметром:

$$x^3-(a+1)x^2+a^2=0$$

3. Выберем в качестве параметра x, решим уравнение относительно a:

$$a^2-x^2a+\left(x^3-x^2\right)=0$$

$$D=x^4-4\left(x^3-x^2\right)=x^2(x-2)^2$$

$$a=\frac{x^2+x(x-2)}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}a=x^2-x,\\a=x.\end{array}\right.$$

$$x^2-x-\sqrt{2}=0\qquad\qquad x=\sqrt{2}$$

$$x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=0$$

Способ 1

1. Введём обозначение, пусть

$$a=\sqrt{2}$$

2. Переформулируем задание в задачу с параметром:

$$x^3-(a+1)x^2+a^2=0$$

3. Выберем в качестве параметра x, решим уравнение относительно a:

$$a^2-x^2a+\left(x^3-x^2\right)=0$$

$$D=x^4-4\left(x^3-x^2\right)=x^2(x-2)^2$$

$$a=\frac{x^2+x(x-2)}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}a=x^2-x,\\ a=x.\end{array}\right.$$

$$x^2-x-\sqrt{2}=0 \qquad\qquad x=\sqrt{2}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$$

Реализация технологии интеграции урочной и внеурочной деятельности

$$x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=0$$

Способ 1

1. Введём обозначение, пусть

$$a=\sqrt{2}$$

2. Переформулируем задание в задачу с параметром:

$$x^3-(a+1)x^2+a^2=0$$

3. Выберем в качестве параметра x, решим уравнение относительно a:

$$a^2-x^2a+\left(x^3-x^2\right)=0$$

$$D=x^4-4\left(x^3-x^2\right)=x^2(x-2)^2$$

$$a=\frac{x^2+x(x-2)}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=x^2-x,\\ a=x.\end{array}\right.$$

$$x^2-x-\sqrt{2}=0 \qquad x=\sqrt{2}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{7}-3}}{2}$$

Способ 2

1. Раскроем скобки и разложим на множители способом группировки

$$x^3-x^2\sqrt{2}-x^2+2=$$

$$=x^2\left(x-\sqrt{2}\right)-\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)=$$

$$=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x^2-x-\sqrt{2}\right)$$

Реализация технологии интеграции урочной и внеурочной деятельности

$$x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=0$$

Способ 1

1. Введём обозначение, пусть

$$a=\sqrt{2}$$

2. Переформулируем задание в задачу с параметром:

$$x^3-(a+1)x^2+a^2=0$$

3. Выберем в качестве параметра *x*, решим уравнение относительно *a*:

$$a^2-x^2a+\left(x^3-x^2\right)=0$$

$$D=x^4-4\left(x^3-x^2\right)=x^2(x-2)^2$$

$$a=\frac{x^2+x(x-2)}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=x^2-x,\\a=x.\end{array}\right.$$

$$x^2-x-\sqrt{2}=0 \qquad x=\sqrt{2}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{7}-3}}{2}$$

Способ 2

1. Раскроем скобки и разложим на множители способом группировки

$$x^3-x^2\sqrt{2}-x^2+2=$$

$$=x^2\left(x-\sqrt{2}\right)-\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)=$$

$$=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x^2-x-\sqrt{2}\right)$$

Способ 3

1. $x=\sqrt{2}$ корень уравнения

$$\left(\sqrt{2}\right)^3-\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}\right)^2+2=0$$

Реализация технологии интеграции урочной и внеурочной деятельности

$$x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=0$$

Способ 1

1. Введём обозначение, пусть

$$a=\sqrt{2}$$

2. Переформулируем задание в задачу с параметром:

$$x^3-(a+1)x^2+a^2=0$$

3. Выберем в качестве параметра x, решим уравнение относительно a:

$$a^2-x^2a+\left(x^3-x^2\right)=0$$

$$D=x^4-4\left(x^3-x^2\right)=x^2\left(x-2\right)^2$$

$$a=\frac{x^2+x(x-2)}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=x^2-x,\\ a=x.\end{array}\right.$$

$$x^2-x-\sqrt{2}=0 \qquad x=\sqrt{2}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{7}-3}}{2}$$

Способ 2

1. Раскроем скобки и разложим на множители способом группировки

$$x^3-x^2\sqrt{2}-x^2+2=$$

$$=x^2\left(x-\sqrt{2}\right)-\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)=$$

$$=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x^2-x-\sqrt{2}\right)$$

Способ 3

1. $x=\sqrt{2}$ корень уравнения

2. Построим схему Горнера

	1	$-\left(\sqrt{2}+1\right)$	0	2
$\sqrt{2}$	1	-1	$-\sqrt{2}$	0

$$x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x^2-x-\sqrt{2}\right)$$

Авторский коллектив

Александр Григорьевич Мордкович

профессор МГПУ, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, научный руководитель Международного семинара преподавателей математики педвузов (1987 г-н.в.);
имеет награды: Премия Президента РФ в области образования, заслуженный деятель науки РФ, Отличник народного образования, Медаль К.Д.Ушинского.

Павел Владимирович Семёнов

профессор факультета математики НИУ ВШЭ, доктор физико-математических наук, профессор, член Федеральной предметной группы по разработке КИМ для ЕГЭ по математике (2001-2007 гг), разработчик заданий с развернутым ответом, автор более 20 учебно-методических пособий по подготовке учащихся к ЕГЭ и подготовке экспертов к проверке работ учащихся;
имеет награды: Почётный работник высшего профессионального образования РФ; Почетная грамота Министерства образования РФ.

Лидия Александровна Александрова

учитель математики, методист ГБОУ Школы 1317 г. Москва, учитель высшей категории, член предметной комиссии по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ по математике;
имеет награды: Отличник народного просвещения РФ.

Елена Львовна Мардахаева

заведующий лабораторией математики ГК «Просвещение», кандидат педагогических наук, доцент, председатель предметной комиссии ЕГЭ по математике Московской области (2006-2007 гг); член-корреспондент Международной академии научного педагогического образования (МАНПО);
имеет награды: Грант Москвы в сфере образования; Почётная грамота Министерства образования Московской области.

ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича

Алгебра, 7-9 классы
Алгебра и начала математического анализа, 10-11 классы

Включены в Федеральный перечень

- Учебники
- ЭФУ
- Примерные рабочие программы
- Методические пособия для учителя
- Рабочие тетради
- Контрольные работы
- Самостоятельные и проверочные работы
- Алгебраические практикумы

Отличительные особенности УМК «Лаборатория А.Г. Мордковича»

Курс построен на основе приоритетности функционально-графической линии, математическое моделирование является идейным стержнем.

- Учебник и задачник соединены в одну книгу.
- Порядок тем соответствует ПООП, отражает психологические особенности обучающихся.
- Выстроена вероятностно-стохастическая линия в тесной взаимосвязи с основным содержанием.
- Каждая глава содержит разделы «Повторение», «Итак, в Главе…», «Вопросы», «Дополнительные задачи», «Из истории математики».
- Трёхуровневая система заданий отражает требования ФГОС ОО, итоговой аттестации. Добавлены задачи практического содержания, высокого уровня сложности.
- Включён материал, рекомендованный к изучению с использованием IT-средств.

Алгебра, 7-9 классы

Включены в Федеральный перечень

ЛАБОРАТОРИЯ А. Г. Мордковича

Авторы:
Мордкович А.Г., Семенов П.В.,
Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л.

Алгебра и начала математического анализа, 10-11 классы

В каждом параграфе даны упражнения трёх уровней сложности: **базового, повышенного, высокого.** Выделены задания, предназначенные для использования IT-средств.

18.6. а) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = 2, \\ 3x - 2y = -2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{1}{3}y = 3, \\ -5x + 4y = 8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}y = -1, \\ \frac{3}{4}x - \frac{4}{5}y = -\frac{5}{12}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{3}{4}y = 5, \\ \frac{5}{6}x + \frac{3}{4}y = \frac{2}{3}. \end{cases}$

18.7. а) $\begin{cases} \frac{1}{x-1} = \frac{9}{3y+2x}, \\ \frac{2x-3y}{x-5} = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2}{x+1} = \frac{1}{3y-4}, \\ \frac{3y-11}{x-5y} = \frac{1}{3}. \end{cases}$

18.8. а) $\begin{cases} 4(x - y) = 28 + 12y, \\ 5x - (3y + x) = 1 - x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 18 - 15y = 3(x - y), \\ 2x - y = 3 - (4x - y); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3(2x - 1) - 4(y + \ldots \\ 5(3 - x) + 2(3y - \ldots \end{cases}$

в) $\begin{cases} 6\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y\right) - 1 \ldots \\ 10\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{5}y\right) - 9 \ldots \end{cases}$

18.9. Прямая $y = kx + \ldots$ уравнение прямой … b, c — целые числ…
а) $M(-1; 4)$, $K(2; -\ldots$
б) $M(7; -5)$, $K(-3; \ldots$
в) $M(2; 3)$, $K(-3; 2\ldots$

18.10. Составьте уравнен… точку пересечения …

ИКТ **18.11.** а) Найдите значен… ции $y = px$ прох… $6x - y = 13$ и $y = -\ldots$
б) Найдите значен… ции $y = px + 1$ п… $6x - y = 13$ и $y = -\ldots$

Условные обозначения

24.13. Задачи базового уровня сложности

24.14. Задачи повышенного уровня сложности

24.15. Задачи высокого уровня сложности

ИКТ Материал может быть рассмотрен с помощью ИКТ-средств

10.11
10.12 Упражнения с общим заданием

Окончание доказательства теоремы

Окончание решения примера

Знаком * отмечен дополнительный материал.

Алгебра, 7-9 классы

Включены в Федеральный перечень

ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича

Авторы:
Мордкович А.Г., Семенов П.В.,
Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л.

Алгебра и начала математического анализа, 10-11 классы

Итак, в главе 4

Пополнили наш словарный запас математического языка следующими терминами:

- парабола, ось (ось симметрии) параболы, ветви параболы, вершина параболы;
- кубическая парабола;
- непрерывная функция, разрыв функции;
- кусочная функция;
- область определения функции;
- чтение графика.

Познакомились с новыми функциями и научились строить их графики: $y = x^2$, $y = -x^2$.

Познакомились с новым символом математического языка $y = f(x)$.

Разработали алгоритм графического решения уравнения вида $f(x) = g(x)$.

Познакомились с тем, как строить графики кусочных функций.

Вопросы

1. Как называют график функции $y = x^2$, $y = -x^2$?
2. Что является осью симметрии графика функции $y = x^2$, $y = -x^2$?
3. Какую точку называют вершиной параболы $y = x^2$, $y = -x^2$?
4. Как расположены относительно друг друга графики функций $y = x^2$, $y = -x^2$?
5. Перечислите свойства функций $y = x^2$, $y = -x^2$.
6. Сформулируйте алгоритм графического решения уравнения.

Тест

1. Укажите точки, принадлежащие графику функции $y = -x^2$.
а) $(-2; 4)$ в) $(4; -16)$
б) $(-2,5; -6,25)$ г) $(0,1; -0,1)$

Ориентация **на результат**.

- В каждой главе есть разделы: «Итак, в Главе», «Вопросы», «Тест».
- В каждом параграфе имеются упражнения на повторение.

Упражнения для повторения

25.14. Постройте график функции $y = x^2$. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на промежутке:
а) $[-5; -0,5]$; б) $[-1,5; 1]$; в) $(-3; 2)$; г) $[-2; +\infty)$.

25.15. Упростите выражение:
а) $\frac{a^4 \cdot a^{10}}{(a^2)^3 \cdot a^7}$; в) $\frac{y^7 \cdot y^6}{y \cdot (y^3)^4}$;
б) $\frac{(x^4)^2 \cdot x^{12}}{(x^2)^5 \cdot x^7}$; г) $\frac{b^3 \cdot (b^5)^3}{(b^4)^4 \cdot b}$.

25.16. Постройте график функции:
а) $y = \frac{x^3}{x}$; б) $y = -\frac{x^4}{x^2}$.

§ 26. Умножение одночленов. Возведение одночлена в натуральную степень

С умножением одночленов мы уже знакомы из § 24. Мы знаем, что если между двумя одночленами поставить знак умножения, то снова получится одночлен; остаётся лишь привести его к стандартному виду. В примере, рассмотренном в § 24, мы как раз и занимались умножением одночлена на одночлен. А при возведении одночлена в степень используются правила действий со степенями, известные вам из § 3.

Алгебра, 7-9 классы

Включены в Федеральный перечень

Авторы:
Мордкович А.Г., Семенов П.В.,
Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л.

ЛАБОРАТОРИЯ А. Г. Мордковича

Алгебра и начала математического анализа, 10-11 классы

Включён материал, обеспечивающий построение индивидуальной образовательной траектории.
В каждой главы содержатся разделы:
«Дополнительные задачи», Из истории математики».

Из истории математики

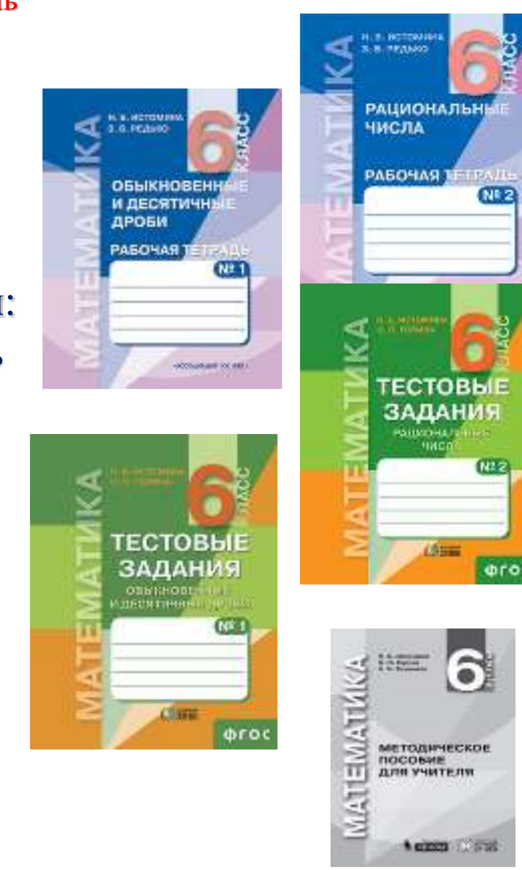
Дополнительные задачи

Математика, 5-6 классы
Авторы: Н.Б.Истомина, О.П.Горина, Н.Б.Тихонова

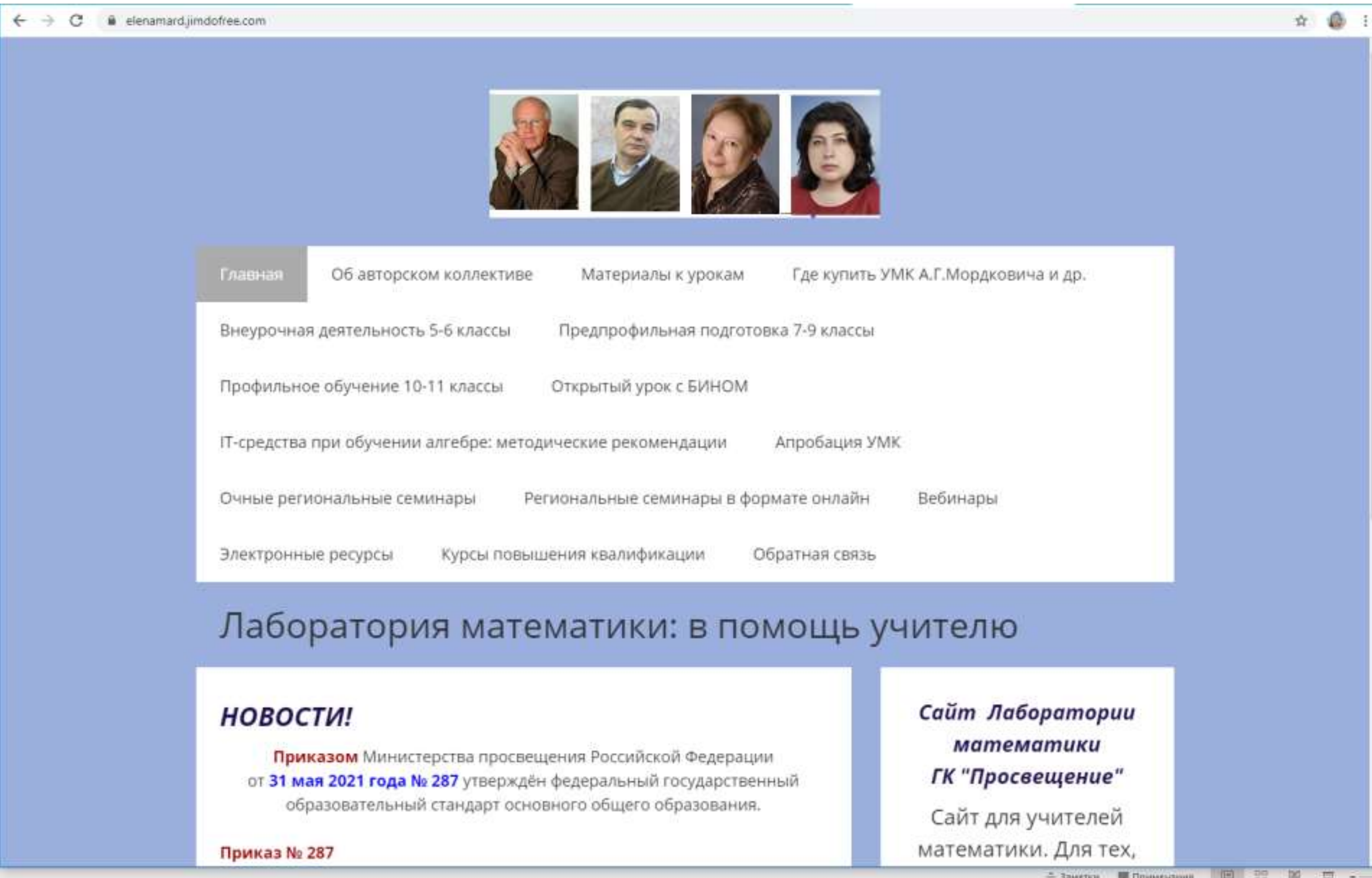
Включены в Федеральный перечень

- Учебники
- Рабочие тетради
- Тестовые задания
- Методические пособия для учителя
- Пособия для внеурочной деятельности:

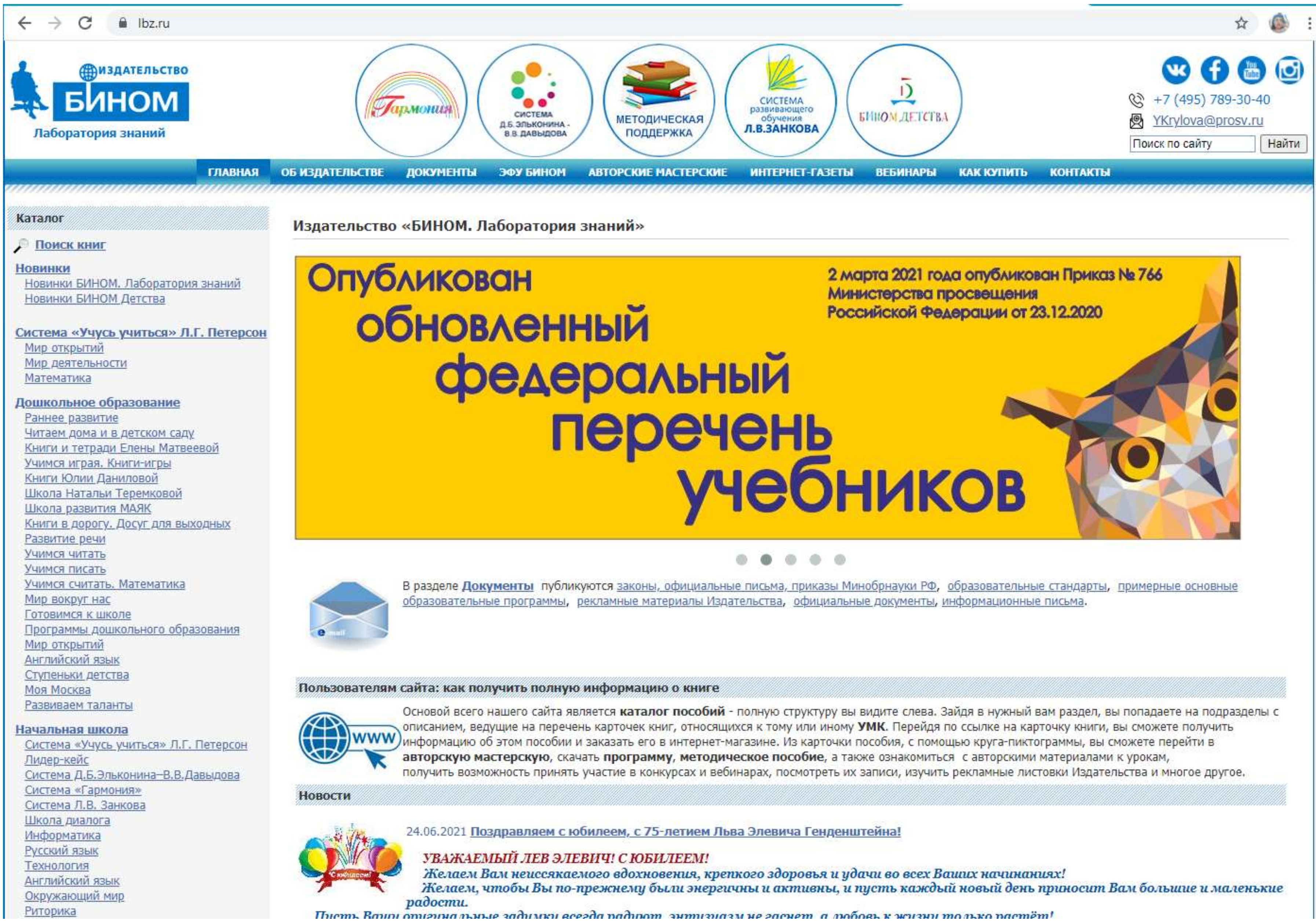
«Наглядная геометрия», «Учимся решать комбинаторные задачи»



Авторский сайт https://elenamard.jimdo.com



Методическая поддержка через сайт издательства http://www.lbz.ru



Приказ № 766 от 23.12.2020

О внесении изменений в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность, утверждённый приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 20.05.2020 г. № 254

1.1.2.4.1.11.1 1.1.2.4.1.11.2	Математика	Истомина Н.Б., Горина О.П., Тихонова Н.Б.	5 6	АО «Издательство «Просвещение»	Конобеева Т.А., Бондаренко Р.А., Кожанова А.П., Павлова Л.А.	До 1 июля 2025 года
1.1.2.4.1.3.1 1.1.2.4.1.3.2	Математика	Петерсон Л.Г., Дорофеев Г.В.	5 6	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»; АО «Издательство «Просвещение»		От 20 мая 2020 года № 254
1.1.2.4.2.13.1 1.1.2.4.2.13.2 1.1.2.4.2.13.3	Алгебра	Мордкович А.Г., Семенов П.В., Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л.	7 8 9	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»; АО «Издательство «Просвещение»		От 20 мая 2020 года № 254
1.1.2.4.2.11.1 1.1.2.4.2.11.2 1.1.2.4.2.11.3	Алгебра	Петерсон Л.Г., Агаханов Н.,Х., Петрович А.Ю. и др.	7 8 9	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»; АО «Издательство «Просвещение»		От 20 мая 2020 года № 254
1.1.2.4.3.10.1 1.1.2.4.3.10.2 1.1.2.4.3.10.3	Геометрия	Смирнов В.А., Смирнова И.М.	7 8 9	ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»; АО «Издательство «Просвещение»		От 20 мая 2020 года № 254
1.1.3.4.1.25.1 1.1.3.4.1.25.2	Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа	Мордкович А.Г., Семенов П.В., Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л.	10 11	АО «Издательство «Просвещение»	Польшакова О.Е., Еремченко И.А., Кожанова А.П., Кочагина М.Н.	До 28 июня 2025 года

Спасибо за внимание!
Удачи в делах!

Адрес обратной связи:
kaf.matematika@gmail.com
Авторский сайт:
https://elenamard.jimdo.com/
Сайт издательства:
http://lbz.ru/

Мы готовы с диалогу!