ПРОСВЕЩЕНИЕ

ЛАБОРАТОРИЯ А.Г. Мордковича

ПЕРЕХОДИМ НА ОБНОВЛЁННЫЙ ФГОС ООО 2021: ЭФФЕКТИВНЫЕ ПРИЁМЫ ИЗУЧЕНИЯ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

01.12.2022 г.

Сегодня обсудим на вебинаре

1. О методе математического моделирования, функциональной грамотности и итоговой аттестации.
2. Примеры из педагогической практики приёмов эффективного изучения метода математического моделирования.
3. Задания из итоговой аттестации на использование метода математического моделирования

Что такое математика?

ПРОСВЕЩЕНИЕ
издательство
СОЮЗ

1. О методе математического моделирования, функциональной грамотности и итоговой аттестации.

ЛАБОРАТОРИЯ
А.Г. Мордковича

Функциональная грамотность

1965: Всемирный конгресс министров просвещения в Тегеране	Под функциональной грамотностью подразумевается «совокупность умений читать и писать для использования в повседневной жизни и решения житейских проблем».
1978: ЮНЕСКО	«функционально грамотным считается только тот, кто может принимать участие во всех видах деятельности, в которых грамотность необходима для эффективного функционирования его группы и которые дают ему также возможность продолжать пользоваться чтением, письмом и счётом для своего собственного развития и для дальнейшего развития общины (социального окружения)».
2002: ЮНЕСКО	функциональная грамотность – это «…полноценно и эффективно функционировать как члены сообщества, родители, граждане и работники».

Интегративные компоненты современной функциональной грамотности

Под **математической грамотностью** понимается способность человека формулировать, применять и интерпретировать математику в разнообразных ситуациях, использовать математические понятия, методы, факты и инструменты для описания, объяснения и прогнозирования явлений.

РЕАЛЬНЫЙ МИР

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МИР

Математическая грамотность помогает человеку понимать роль математики в мире, высказывать хорошо обоснованные суждения и принимать решения, необходимые для конструктивного, активного и размышляющего гражданина.

Функциональная грамотность

- Решая типичную текстовую задачу, ученик подменяет этап понимания и составления модели категоризацией и поиском в памяти готового алгоритма для данной категории задач, моделирование подменяется поиском готовой модели.
- При решении нетипичной задачи этапы понимания развернуты, самостоятельны, этап интерпретации логичен и осмыслен.

Пример нетипичной задачи

Размер велосипедного колеса (по внешнему диаметру покрышки) традиционно указывается в дюймах: 16'', ..., 26'', 27,5'', 28'', 29'', 36''.

На фото: колесо диаметром 26 (слева) и 29'' (справа).

Пример типичной задачи

Размер колеса шоссейного велосипеда равен 27 дюймам. Чему равен размер обода такого колеса в сантиметрах, если 1 дюйм равен примерно 2,54 см?

Планируемый результат:

вычислять длину окружности в заданных единицах измерения, выполняя перевод одних единиц в другие, исходя из имеющейся справочной информации, округлять.

Математические модели в итоговой аттестаци ОГЭ

14 Вика решила начать делать зарядку каждое утро. В первый день она сделала 30 приседаний, а в каждый следующий день она делала на одно и то же количество приседаний больше, чем в предыдущий день. За 15 дней она сделала всего 975 приседаний. Сколько приседаний сделала Вика на пятый день?

21 Рыболов в 5 часов утра на моторной лодке отправился от пристани против течения реки, через некоторое время бросил якорь, 2 часа ловил рыбу и вернулся обратно в 10 часов утра того же дня. На какое расстояние от пристани он отплыл, если скорость течения реки равна 2 км/ч, а собственная скорость лодки равна 6 км/ч?

Математические модели в итоговой аттестации

ЕГЭ

8 Весной катер идёт против течения реки в $1\frac{2}{3}$ раза медленнее, чем по течению. Летом течение становится на 1 км/ч медленнее. Поэтому летом катер идёт против течения в $1\frac{1}{2}$ раза медленнее, чем по течению. Найдите скорость течения весной (в км/ч).

Ответ: ___________________________.

или

Смешав 45%-ный и 97%-ный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 62%-ный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50%-ного раствора той же кислоты, то получили бы 72%-ный раствор кислоты. Сколько килограммов 45%-ного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: ___________________________.

или

Автомобиль, движущийся с постоянной скоростью 70 км/ч по прямому шоссе, обгоняет другой автомобиль, движущийся в ту же сторону с постоянной скоростью 40 км/ч. Каким будет расстояние (в километрах) между этими автомобилями через 15 минут после обгона?

Ответ: ___________________________.

15 15 января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r – **целое** число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1,0	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

18 В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. В каждой школе тест писали, по крайней мере, 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?

б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 7?

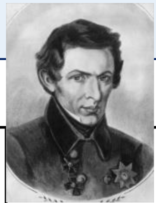
в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10%, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

Алгебра, 7-9 классы

Авторы:
Мордкович А.Г., Семенов П.В.,
Александрова Л.А., Мардахаева Е.Л.

Математика – это язык, на котором говорят все точные науки.

Н.И.Лобачевский



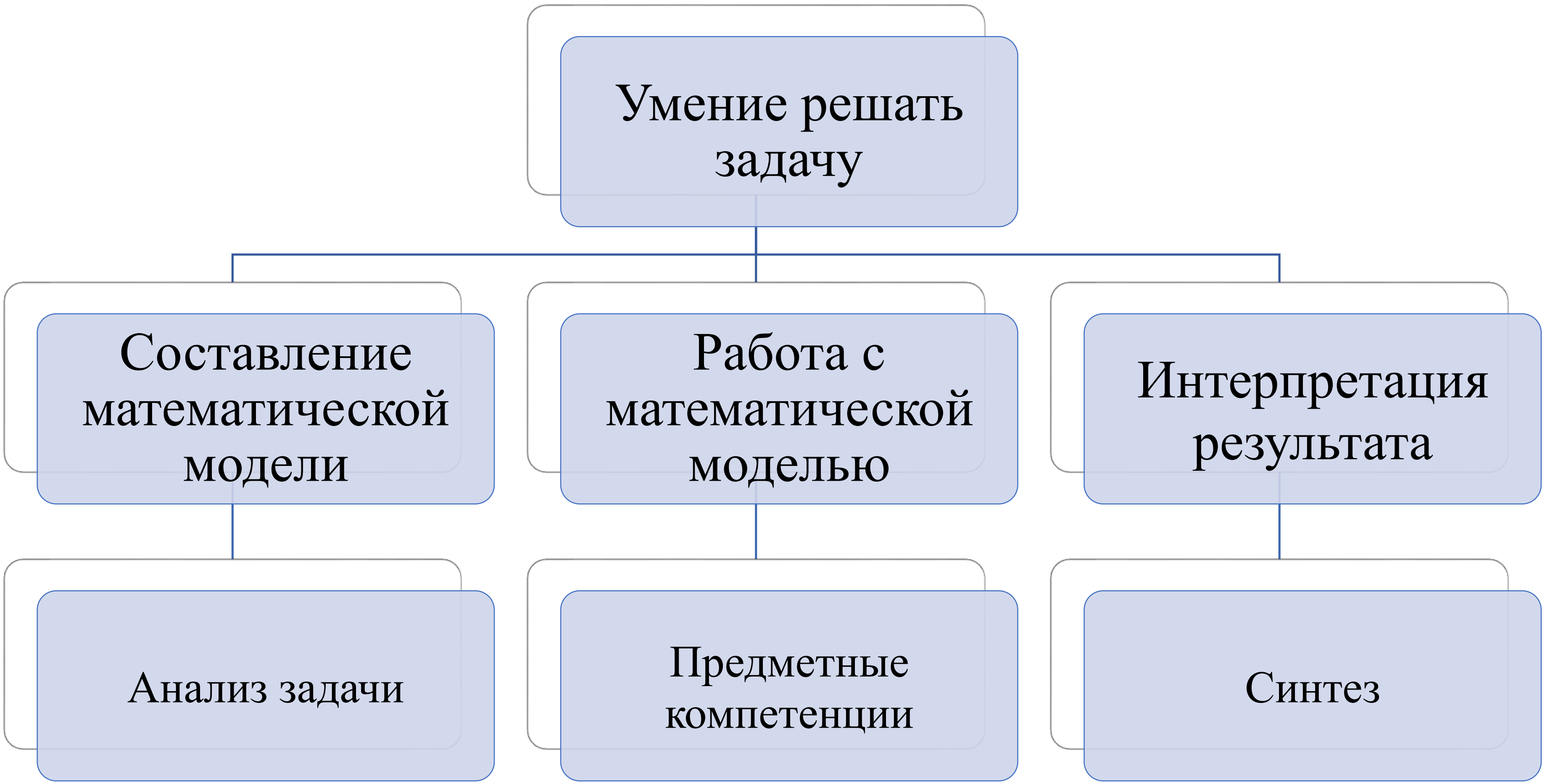
Алгебра и начала математического анализа, 10-11 классы

Класс	Функция	Реальные и физические процессы
7 класс	Линейная функция.	Равномерные процессы.
8 класс	Квадратичная функция. Функции $y=\lvert x\rvert$, $y=\frac{k}{x}$ и $y=\sqrt{x}$.	Равноускоренные процессы.
9 класс	Функции $y=x^3$ и $y=\sqrt[3]{x}$. Обобщение изученного в основной школе, формализация некоторых определений и понятий.	
10 класс	Тригонометрические функции. Степенные, показательные и логарифмические функции.	Периодические процессы, гармонические колебания. Процессы органического роста.
11 класс	Элементы теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления; обобщение изученного.	Мгновенная скорость, площадь и объём, оптимальные значения некоторых величин.

2. Примеры из педагогической практики приёмов эффективного изучения метода математического моделирования.

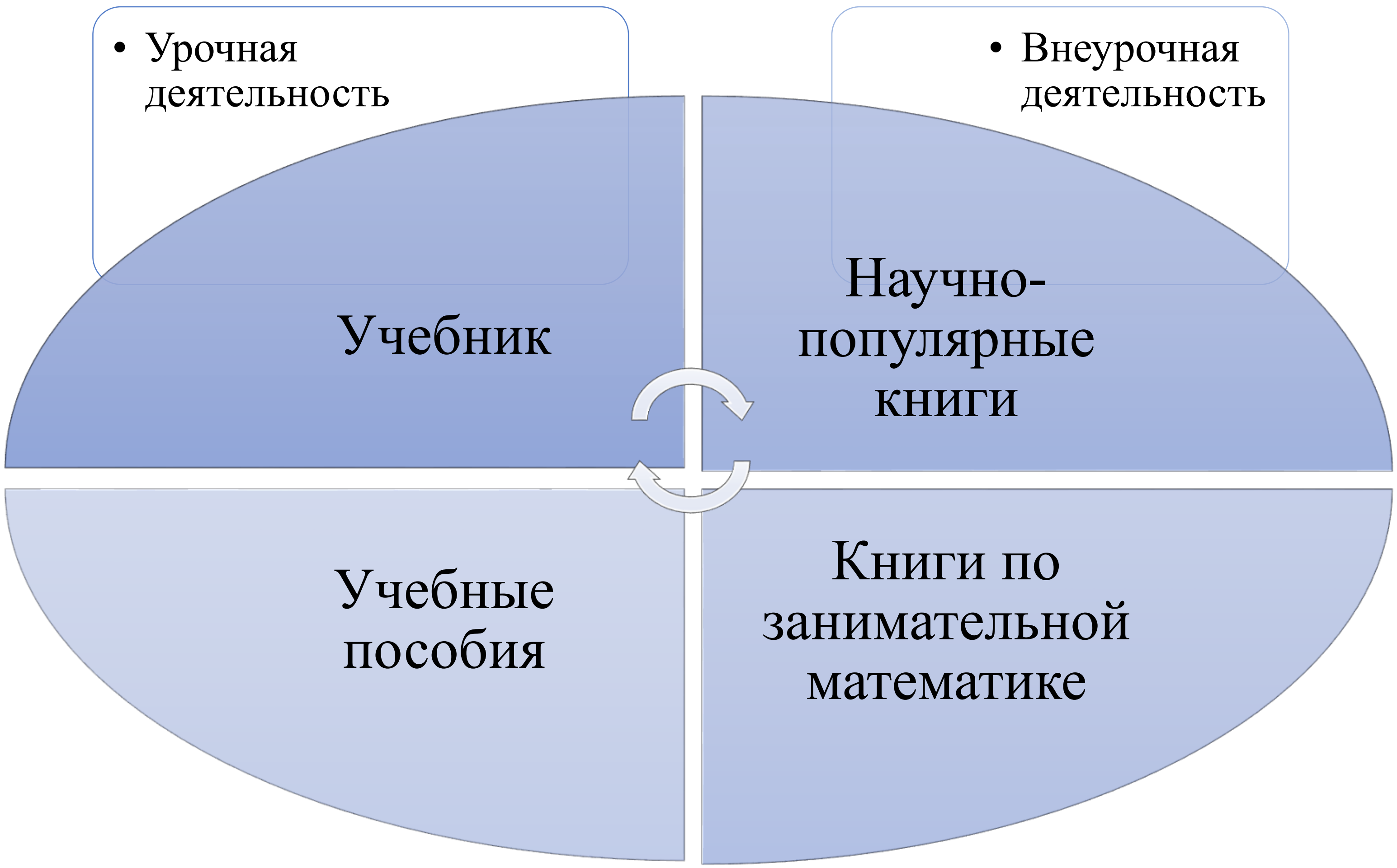
ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича

Текстовая (сюжетная) задача – первый шаг на пути освоения метода математического моделирования.



Где взять?

Когда решать?



Математика в школе – не наука и даже не основы науки, а учебный предмет.

Условия, при которых учитель имеет право дать формальное определение сложного математического понятия
1. Необходимо, чтобы у учащихся накопился соответствующий **опыт** по двум направлениям:
вербальный – опыт полноценного понимания всех слов, которые есть в определении;
генетический – опыт работы с понятием на предшествующих уровнях (визуальном, т. е. наглядно-интуитивном, и рабочем, описательным).
2. Необходимо, чтобы у учащихся появилась **потребность** в формальном определении сложного математического понятия.

Присутствуют ли эти условия в начале изучения курса алгебры в 7-м классе?

- достаточны математические знания – *сформированы ли вычислительные навыки в должном объёме, сформирован ли навык чтения и анализа математического текста?*
- должный опыт – *решали ли достаточно задач арифметическим способом?*
- сформированы потребности – *нужен ли учащимся новый аппарат для решения текстовых задач?*

Решение задач арифметическим методом

Метод максимального предположения

Метод используется в задачах, в которых известно, что получится в результате двух разных случаев и необходимо найти исходные условия. Метод заключается в том, что допускается выполнение одного из случаев (обычно максимально возможного) и путём вычитания несостоявшихся случаев находится ответ на вопрос задачи.

Пример.

Задача 10.1. Для перевозки 40 зеркал наняли извозчика с условием, что за доставку каждого зеркала он получит 20 р., а за каждое разбитое в дороге зеркало он должен будет заплатить 100 р. Извозчик несколько зеркал разбил при расчёте получил 440 р. Сколько целых зеркал он доставил?

Решение.

1) Допустим доставлены все зеркала, тогда получено: $40 \cdot 20 = 800$ (р.);

2) За одно недоставленное зеркало теряется: $100 + 20 = 120$ (р.);

3) Извозчик получил на: $800 – 440 = 360$ (р.) меньше;

4) Следовательно он разбил: $360 : 120 = 3$ (шт.).

5) Значит, доставлено в целости: $40 – 3 = 37$ (шт.)

Ответ. 37 зеркал.

Решение задач способом «с конца»

Метод используется в задачах, в которых известен результат и порядок действий, и необходимо найти начальные условия. Метод заключается в том, что на вопрос задачи можно ответить, выполнив действия в обратном порядке

Пример.

Медведь с базара плюшки нес,
Но на лесной опушке
Он половину плюшек съел
И плюс еще полплюшки.

Шел, шел, уселся отдохнуть
И под «ку-ку» кукушки
Вновь половину плюшек съел
И плюс еще полплюшки.

Стемнело, он ускорил шаг,
Но на крыльце избушки
Он снова пол-остатка съел
И плюс еще полплюшки.

С пустой кошелкою – увы!
Он в дом вошел уныло...
Хочу, чтоб мне сказали вы,
А сколько плюшек было?

Решение.

	Присел 1-й раз	**Присел 2-й раз**	**Присел 3-й раз**
Было	7 плюшек	3 плюшки	1 плюшка
Осталось бы, если бы он не съедал полплюшки	3 плюшки и ещё полплюшки	1 плюшка и ещё полплюшки	полплюшки
Осталось	3 плюшки	1 плюшка	нет плюшек

Ответ. 7 плюшек.

Решение задач способом ложного положения

Метод используется в задачах, которых спрашивается найти число x, удовлетворяющее уравнению ax + b = c. Число c дано в условии, числа a и b представлены в условии с помощью некоторой последовательности операций

1. *Сделать первое предположение, вычислить возможный при этом результат. Сравнить полученный результат с данными задачи и найти разницу – первое отклонение.*
2. *Сделать второе предположение, вычислить возможный при этом результат. Сравнить полученный результат с данными задачи и найти разницу – второе отклонение.*
3. *Если оба результата одновременно больше или меньше необходимого в условии, то искомое данное находится следующим образом: Первое предположение умножить на второе отклонение, второе предположение умножить на первое отклонение и от большего произведения вычесть меньшее. Разделить полученную разность на разность отклонений.*
4. *Если при одном предположении результат получается больше необходимого, а при втором – меньше, то искомое данное находится следующим образом: Первое предположение умножить на второе отклонение, второе предположение умножить на первое отклонение. Полученные произведения сложить, разделить полученную сумму на сумму отклонений.*

Пример. Летит стая гусей, а на встречу ей один гусь: «Здравствуйте, сто гусей!». Отвечает ему вожак: «Нас не сто. Вот если бы нас было столько, сколько есть, да еще столько, да пол столько, да четверть столько, да ты с нами, то тогда нас было бы сто».
Сколько было гусей в стае?

Решение.
1) Пусть в стае 24 гуся, тогда всего: 24 + 24 + 12 + 6 + 1 = 67 (гусей);
2) Пусть в стае 48 гусей, тогда всего: 48 + 48 + 24 + 12 + 1 = 133 (гуся);
3) 24 – первое предположение, 33 – первое отклонение; 48 – второе предположение, 33 – второе отклонение;
4) (24 · 33 + 48 · 33) : (33 + 33) = 36 (гусей).
Ответ. 36 гусей.

Примеры

1. Сделать первое предположение, вычислить возможный при этом результат. Сравнить полученный результат с данными задачи и найти разницу – первое отклонение.

2. Сделать второе предположение, вычислить возможный при этом результат. Сравнить полученный результат с данными задачи и найти разницу – второе отклонение.

3. Если оба результата одновременно больше или меньше необходимого в условии, то искомое данное находится следующим образом: Первое предположение умножить на второе отклонение, второе предположение умножить на первое отклонение и от большего произведения вычесть меньшее. Разделить полученную разность на разность отклонений.

5.9. **В школе 900 учащихся. Сколько учащихся в начальных, средних и старших классах, если известно, что в начальных классах их в 3 раза больше, чем в старших, и в 2 раза меньше, чем в средних?**

Решение.

1) Пусть в начальных классах учится 60 учащихся, тогда в средних – 120 учащихся, а в старших – 20 учащихся. Всего получается 60 + 120 + 20 = 200, это на 700 меньше, чем должно было получиться;

2) Пусть в начальных классах учится 120 учащихся, тогда в средних – 240 учащихся, а в старших – 40 учащихся. Всего получается 120 + 240 + 40 = 400, это на 500 меньше, чем должно было получиться;

3) 60 – первое предположение, 700 – первое отклонение; 120 – второе предположение, 500 – второе отклонение;

4) (120 · 700 – 600 · 500) : (700 – 500) = 270 (уч.).

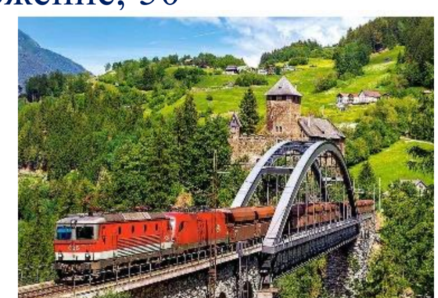
Ответ. 270, 540, 90 учащихся

Примеры

1. Сделать первое предположение, вычислить возможный при этом результат. Сравнить полученный результат с данными задачи и найти разницу – первое отклонение.
2. Сделать второе предположение, вычислить возможный при этом результат. Сравнить полученный результат с данными задачи и найти разницу – второе отклонение.
3. Если оба результата одновременно больше или меньше необходимого в условии, то искомое данное находится следующим образом: Первое предположение умножить на второе отклонение, второе предположение умножить на первое отклонение и от большего произведения вычесть меньшее. Разделить полученную разность на разность отклонений.

5.11. **Поезд прошёл первый перегон за 2 ч, а второй — за 3 ч. Всего за это время он прошёл расстояние 330 км. Найдите скорость поезда на каждом перегоне, если на втором перегоне она была на 10 км/ч больше, чем на первом.**

Решение.
1) Пусть на первом перегоне скорость поезда была 50 км/ч, тогда на втором – 60 км/ч. Поезд прошёл 50 · 2 + 60 · 3 = 280 км, это на 50 км меньше, чем должно было получиться;
2) Пусть на первом перегоне скорость поезда была 70 км/ч, тогда на втором – 80 км/ч. Поезд прошёл 70 · 2 + 80 · 3 = 380 км, это на 50 км больше, чем должно было получиться;
3) 50 – первое предположение, 50 – первое отклонение; 70 – второе предположение, 50 – второе отклонение;
4) (50 · 50 + 70 · 50) : (50 + 50) = 60 (км/ч).
Ответ. 60 км/ч, 70 км/ч.



Примеры

1. *Сделать первое предположение, вычислить возможный при этом результат. Сравнить полученный результат с данными задачи и найти разницу – первое отклонение.*
2. *Сделать второе предположение, вычислить возможный при этом результат. Сравнить полученный результат с данными задачи и найти разницу – второе отклонение.*
3. *Если оба результата одновременно больше или меньше необходимого в условии, то искомое данное находится следующим образом: Первое предположение умножить на второе отклонение, второе предположение умножить на первое отклонение и от большего произведения вычесть меньшее. Разделить полученную разность на разность отклонений.*

Пример 1 В классе девочек вдвое больше, чем мальчиков. Если из этого класса уйдут 3 девочки и придут 3 мальчика, то девочек будет на 4 больше, чем мальчиков. Сколько учеников в данном классе?

Решение.

1) Пусть в классе учится 16 девочек, тогда мальчиков – 8. Если уйдут 3 девочки, то станет – 13; а придут 3 мальчика, то станет – 11. Получается, что девочек на 2 больше, чем мальчиков, что на 2 меньше, чем должно было получиться;

2) Пусть в классе учится 22 девочки, тогда мальчиков – 11. Если уйдут 3 девочки, то станет – 19; а придут 3 мальчика, то станет – 14. Получается, что девочек на 5 больше, чем мальчиков, что на 1 больше, чем должно было получиться;

3) 16 – первое предположение, 2 – первое отклонение; 22 – второе предположение, 1 – второе отклонение;

4) $(22 \cdot 2 + 16 \cdot 1) : (2 + 1) = 20$ (дев.); значит, мальчиков – 10, всего учащихся $20 + 10 = 30$.

Ответ. 30 учащихся

Устали?

Давайте поищем другой способ!

Алгебраический способ!

Пример 1 В классе девочек вдвое больше, чем мальчиков. Если из этого класса уйдут 3 девочки и придут 3 мальчика, то девочек будет на 4 больше, чем мальчиков. Сколько учеников в данном классе?

Решение. Пусть x — число мальчиков в классе, тогда $2x$ — число девочек. Если уйдут 3 девочки, то останется $(2x - 3)$ девочек. Если придут 3 мальчика, то станет $(x + 3)$ мальчиков. По условию девочек тогда будет на 4 больше, чем мальчиков. На математическом языке это записывается так: $(2x - 3) - (x + 3) = 4$.

Это уравнение — математическая модель задачи. Упростим эту модель. Раскроем скобки: $2x - 3 - x - 3 = 4$. Так как $2x - x = x$, $-3 - 3 = -6$, то получаем: $x - 6 = 4$, $x = 10$.

Теперь мы можем ответить на вопрос задачи. В классе 10 мальчиков, а значит, 20 девочек (вы помните, что их по условию было в 2 раза больше).

Ответ: всего в классе 30 учеников.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Дано:
неизвестная величина удовлетворяет уравнению $\boldsymbol{ax + b = c}$

Найти: x

Решение:

- **Возьмем некоторое число** x_1
- **Получим** $ax_1 + b = c_1$
- **Возьмем некоторое число** x_2
- **Получим** $ax_2 + b = c_2$

$\boxed{ax_1 + b = c_1}$ $\boxed{ax_2 + b = c_2}$

$$a = \frac{c_1 - c_2}{x_1 - x_2}$$

$\boxed{ax + b = c}$ $\boxed{ax_2 + b = c_2}$

$\boxed{a(x - x_2) = c - c_2}$ $\Rightarrow$ $x = x_2 + \dfrac{c - c_2}{a}$ $\Rightarrow$

$$x = x_2 + \frac{(c - c_2)(x_1 - x_2)}{c_1 - c_2} = \frac{x_2(c_1 - c) - x_1(c_2 - c)}{c_1 - c_2}$$

Курс алгебры начинается с темы «Математический язык. Математические модели»

2.3. Запишите выражение на математическом языке.

а) Сумма числа x и утроенного произведения x и y;
б) произведение числа x и суммы x и y;
в) квадрат разности частного чисел a и b и числа c;

2.6. Запишите данное утверждение и ответы на поставленные вопросы на математическом языке.

Периметр P прямоугольника равен удвоенной сумме его сторон a и b.
а) Чему равен полупериметр p этого прямоугольника?
б) Как найти сторону прямоугольника, если известны полупериметр и его другая сторона?

2.7. Скорость движения v равна отношению расстояния s ко времени движения t.
а) Как найти расстояние, пройденное телом, зная его скорость и время движения?

2.8. Запишите на математическом языке:
а) двузначное число N содержит a десятков и b единиц;
б) трёхзначное число M содержит a сотен, b десятков и c единиц;

Различные формулировки заданий

4.26. Дополните условие и решите полученную задачу, выделяя три этапа математического моделирования.
а) Сумма двух натуральных чисел равна 127. Найдите эти числа, если...
б) Найдите три последовательных трёхзначных числа, если...

4.27. Придумайте задачу, решением которой может быть математическая модель:
а) $(3x + 4y) : 7$;
б) $20 + 3(x + y)$;
в) $3x + 2(x + 4)$;
г) $3x + 4(x + 1) = 193$;
д) $2,4x + 5,6(x + 15) = 444$;
е) $x + 0,12x + (x + 0,12x) \cdot 0,05 = 1176$.

4.18. Введите переменную и составьте математическую модель данной ситуации.
а) В магазин завезли красных футболок в 2 раза больше, чем синих. Сколько всего футболок завезли в магазин?
б) За выходные дни было продано 12 футболок. Сколько футболок осталось?
в) Цена на футболку была снижена на 5 %. Сколько стала стоить футболка?
г) Для выполнения задания одному рабочему требуется на 2 ч больше, чем другому. Какую часть задания выполнят за 1 ч оба рабочих, работая вместе?

Точное понимание слов

4.19. Две бригады работали на уборке урожая. Первая бригада убрала урожай с 5 га по x ц с 1 га, а вторая — с 6 га, убирая с каждого гектара на 10 ц меньше.
а) Сколько центнеров с 1 га убирала вторая бригада?
б) Сколько всего центнеров убрала первая бригада?
в) Сколько всего центнеров убрала вторая бригада?
г) Сколько центнеров убрали обе бригады вместе?

5.14. Маршрут прогулочного катера проходит 2 ч по озеру и 3 ч по течению реки. Если бы весь маршрут был проложен против течения реки, то катер проходил бы его за 7,4 ч. Какова длина маршрута по озеру и по течению реки, если скорость течения 3 км/ч?

37.9. а) После двух последовательных повышений зарплаты работника она возросла на 32 % по сравнению с первоначальной. Найдите первоначальный процент повышения зарплаты, если второе повышение по количеству процентов было в 2 раза большим, чем первое.

Элементы теории делимости

10. Сколько всего натуральных решений имеет уравнение:
а) $2^n \cdot 2^k = 128$;
б) $3^n \cdot 9^k = 243$;
в) $16^n \cdot 4^k = 1024$;
г) $(5^n)^k = 25^3$;
д) $(10^n)^k = 1\,000\,000$;
е) $2^n(2^{n+1})^{k+1} = 256$?

11. Найдите наибольшее натуральное значение n, при котором число 2^n будет:
а) однозначным;
б) меньше 59;
в) двузначным;
г) меньше 500;
д) трёхзначным;
е) меньше 2025.

12. Найдите наименьшее натуральное число n, при котором $0{,}5^n$ будет меньше: а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{7}$; в) $\frac{2}{17}$; г) $\frac{3}{97}$; д) 0,01; е) 0,001.

13. Сколько точек на координатной прямой надо отметить для того, чтобы все расстояния между ними были бы попарно различными и число этих расстояний было бы больше 10, но меньше 20?

14. а) Выпишите в порядке возрастания все попарные расстояния между точками $A(-5)$, $B(-4)$, $C(-1)$, $D(4)$.
б) Можно ли на прямой указать четыре точки, попарные расстояния между которыми равны 1, 2, 3, 5, 6, 7?

15. На прямой отметили k точек. После этого отметили середины между каждыми двумя соседними точками. Затем между каждыми двумя соседними точками отметили по две точки. Могло ли итоговое число точек равняться: а) 100; б) 101; в) 102; г) 103; д) 104; е) 105? Ответ «нет» обоснуйте, а при ответе «да» найдите k.

16. В первой слева клетке полоски 1×8 плоттер[1] поставил одну точку, в следующей клетке — две точки, в следующей — четыре точки. Далее количество точек удваивалось по сравнению с каждой предыдущей клеткой. Сколько всего точек было поставлено?

17. Натуральное число m при делении на 60 даёт в остатке 49. Чему равен остаток от деления:
а) $3m$ на 2; б) $5m$ на 2; в) $5m$ на 3; г) $5m$ на 4; д) $7m$ на 5; е) $7m + 2$ на 15?

18. В классе 25 учеников. Среди любых 15 учеников есть девочка. Среди любых 12 учеников есть мальчик. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

Элементы теории делимости

19. Какие из утверждений «а»—«е» о натуральных числах верны, а какие — нет? (Для верных приведите обоснование, для неверных приведите пример.)
а) Если число делится на 4, то оно делится на 2;
б) если число делится на 2, то оно делится на 4;
в) если число делится и на 2, и на 3, то оно делится на 6;
г) если число делится и на 2, и на 4, то оно делится на 8;
д) если число делится и на 6, и на 8, то оно делится на 48;
е) если число делится и на 3, и на 8, то оно делится на 24.

20. Какие из утверждений «а»—«е» о натуральных числах верны, а какие — нет? (Для верных приведите обоснование, для неверных приведите пример.)
а) Если число чётно, то и его квадрат чётен;
б) если квадрат числа чётен, то и число чётно;
в) если квадрат числа кратен 4, то и число кратно 4;
г) если число кратно 3, то его куб кратен 9;
д) если куб числа кратен 9, то и квадрат числа кратен 9;
е) если число делится и на 3, и на 8, то оно делится на 24.

21. Натуральное число d при делении на 36 даёт в остатке 35. Чему равен остаток от деления d на: а) 2; б) 3; в) 6; г) 9; д) 12; е) 18?

22. 1) Найдите все двузначные числа, которые при делении:
а) на 6 дают в остатке 4;
б) на 9 дают в остатке 4;
в) на 6 дают в остатке 4 или при делении на 9 дают в остатке 4;
г) на 6 дают в остатке 4 и при делении на 9 дают в остатке 4.
2) Каково арифметическое соотношение между количествами чисел из пунктов «а»—«г»?

23. В классе 27 учеников. Рост каждого или меньше 160 см, или больше 150 см. Тех, у кого рост меньше 160 см, — 24. Тех, у кого рост больше 150 см, — 12. Сколько учеников, рост которых меньше 160 см и при этом больше 150 см?

24. В каждом из трёх новогодних конкурсов участвовало по 20 учеников. Оказалось, что 17 из них участвовали только в одном конкурсе и пятеро участвовали только в двух конкурсах. Сколько учеников участвовало во всех трёх конкурсах?

25. В классе 24 ученика. Девочек больше, чем мальчиков. Все ученики расселись за круглым столом симметрично относительно его центра. Докажите, что какие-то две девочки сидят друг напротив друга.

ПРОСВЕЩЕНИЕ
издательство
СОЮЗ

3. Задания из итоговой аттестации на использование метода математического моделирования

ЛАБОРАТОРИЯ
А. Г. Мордковича

Разнообразные сюжетные текстовые задачи

1.17. На банковский счёт 1 февраля 2017 г. сроком на 3 года положили 100 000 р. под 10 % годовых. Ежегодно 31 января банк на счёт добавляет начисленные проценты. Какую сумму получит вкладчик по истечении срока 1 февраля 2020 г.?

4.6. На банковский депозит положили a р. под 6 % годовых. Через год на счёте стало 150 000 р.

4.7. На банковский депозит положили a р. под 6 % годовых. Через 2 года на счёте стало 168 540 р.

4.8. Цена на хрустальную люстру a р. Из-за смены тарифов на энергоносители цена выросла на 45 %, а после увеличения арендной платы в магазине ещё на 20 %. Какова новая цена люстры?

4.17. Клиент положил 1 000 000 р. на два депозита поровну в два банка под p % и q % соответственно. Доход начисляется ежегодно. По условиям договора в каждом банке, если клиент не снимает все деньги и не закрывает счёт, то договор пролонгируется ещё на год автоматически.

а) Сколько денег окажется на депозитном счёте в первом банке через год?

б) Сколько денег окажется на депозитном счёте во втором банке через 2 года?

в) Сколько денег может получить клиент через 2 года, сняв все деньги в обоих банках?

г) Сколько денег получит клиент в первом банке, закрыв счёт через 3 года?

5.19. На депозитный счёт клиент банка положил деньги под 5,8 % годовых. Проценты начисляются по истечении года, после чего, если клиент не расторгает договор, он автоматически пролонгируется. Сколько денег положил клиент первоначально, если через два года на счёте стало 1 119 364 р.?

12. Акционер купил два различных пакета акций. По итогам первого года первый пакет дал прибыль 20 %, а второй — 15 %. В итоге акционер получил дивиденды в сумме 19 000 р. По итогам второго года первый пакет дал прибыль 15 %, а второй — 20 %. Продав оба пакета по новым ценам, акционер получил на руки 151 800 р. Какова была первоначальная цена обоих пакетов акций?

37.10. а) В сплав золота с серебром, содержащий 80 г золота, добавили 100 г золота. В результате содержание золота в сплаве увеличилось на 20 %. Какова масса полученного сплава?

б) В сплав меди и цинка, содержащий 5 кг цинка, добавили 15 кг цинка, после чего содержание цинка в сплаве повысилось на 30 %. Какова первоначальная масса сплава, если известно, что в нём меди было больше, чем цинка?

37.8. а) Вкладчик положил в банк 100 000 р. под некоторый процент годовых. В начале второго года хранения банк увеличил процент годовых на 2 %. Под какой процент были положены деньги, если после двух лет хранения денег в банке вкладчик получил 118 800 р.?

14.26. Андрей сделал в банке вклад на сумму 250 000 р. при условии, что в конце года сумма вклада увеличивается на p % и никакие другие операции с вкладом не производятся. Через год в этом же банке и на таких же условиях сделал точно такой же вклад его приятель Алексей. Ровно через год после этого они оба закрыли свои вклады. При этом выяснилось, что Андрей получил на 33 600 р. больше, чем Алексей. Какой процент годовых начислял этот банк?

8.13. а) Сплав меди и цинка (латунь) весом 12 кг содержит 45 % меди. Сколько чистого цинка нужно добавить к сплаву, чтобы содержание меди в нём стало 40 %?

б) При смешивании 40%-ного раствора соли с 10%-ным раствором получили 1,6 л раствора с концентрацией соли 21,25 %. Сколько каждого раствора было для этого взято?

8.14. а) Суммарный доход двух предприятий возрастёт втрое, если доход первого предприятия останется неизменным, а доход второго увеличится в 4 раза. Во сколько раз надо увеличить доход первого предприятия, оставляя неизменным доход второго, чтобы их суммарный доход вырос в 4 раза?

б) Торговая фирма получила две партии некоторого товара. Если продавать весь товар по цене 80 р. за 1 кг, то выручка от продажи будет на 15 % ниже выручки, которую фирма получила бы, продав первую партию по названной цене, а вторую — по цене, превышающей её на 25 %. Какую часть по массе составляет первая партия товара в общем количестве товара этих двух партий?

Моделирование в задачах на банковские расчёты

§ 35. Прогрессии и банковские расчёты

Начнём с рассмотрения следующей ситуации. Клиент пришёл в банк, чтобы открыть вклад на сумму a р. на n лет под p % годовых. Ему предложили два варианта: либо снимать проценты по вкладу в конце каждого года хранения, либо забрать вклад вместе с процентами в конце срока хранения. Как поступить клиенту, чтобы в долгосрочной перспективе выиграть?

В первом случае при $n = 1$ клиент получит $\left(a + \frac{p}{100} \cdot a\right)$ р., при $n = 2$ итоговая сумма составит $\left(a + \frac{2p}{100} \cdot a\right)$ р., при $n = 3$: $\left(a + \frac{3p}{100} \cdot a\right)$ р. и т. д. Математическая модель ситуации — конечная арифметическая прогрессия

$$a,\ a + \frac{p}{100} \cdot a,\ a + \frac{2p}{100} \cdot a,\ a + \frac{3p}{100} \cdot a,\ \ldots,\ a + \frac{np}{100} \cdot a.$$

Итак, при первом варианте, закрывая вклад в конце срока хранения, клиент получит $a\left(1 + \frac{np}{100}\right)$ р. — это так называемая *формула простых процентов*.

Если клиент решил прийти в банк только в конце срока хранения вклада, то при $n = 1$ получаемая сумма составит, как и в первом случае, $a + \frac{p}{100} \cdot a$, т. е. $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ р.; сумма вклада увеличилась в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ раз. Во столько же раз она увеличится и к концу второго года хранения, и к концу третьего года хранения и т. д. Математическая модель ситуации — конечная геометрическая прогрессия

$$a,\ a\left(1 + \frac{p}{100}\right),\ a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2,\ a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3,\ \ldots,\ a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Итак, при втором варианте, закрывая вклад в конце срока хранения, клиент получит $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ р. — это так называемая *формула сложных процентов*.

35.3. В результате трёхкратного повышения цены на некоторый товар на одно и то же число процентов цена товара стала превышать первоначальную цену на 33,1 %. На сколько процентов повышалась цена на товар каждый раз?

35.4. Банк начисляет по вкладам 7 % годовых. 1 января 2018 г. в этот банк была положена сумма a р. Найдите размер вклада на 1 января 2023 г., если в течение этого времени процентная ставка оставалась без изменения. С помощью калькулятора выясните, через какое наименьшее число лет сумма вклада увеличится более чем в 2 раза.

35.5. Во вторник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в среду подешевели на столько же процентов. В результате акции стали стоить на 4 % меньше, чем при открытии торгов во вторник. На сколько процентов подорожали акции компании во вторник?

35.6. Цена электроплиты в магазине ежегодно уменьшалась на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена электроплиты, если выставленная на продажу за 25 000 р. электроплита через 2 года была продана за 16 810 р.

35.7. Клиент А сделал вклад в банке в размере 15 000 евро. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Ещё ровно через год клиенты А и Б закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А получил на 1650 евро больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

35.8. В июле клиент взял в банке кредит на сумму 100 000 р. под x % годовых. Условия погашения кредита таковы, что через год после выдачи кредита начисляются проценты по кредиту, после этого выплачивается часть долга. Под какой процент был взят кредит, если он был полностью погашен за 2 года, причём в первый год было выплачено 65 000 р., а во второй 57 500 р.?

35.9. Клиент взял в банке кредит на сумму 11 млн р. под 20 % годовых. Условия погашения кредита таковы, что через год после выдачи кредита начисляются проценты по кредиту, после этого в течение месяца выплачивается часть долга. Сколько миллионов рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита, если кредит был полностью погашен двумя равными платежами (т. е. за 2 года)?

§ 35. Прогрессии и банковские расчёты

35.8. В июле клиент взял в банке кредит на сумму 100 000 р. под x % годовых. Условия погашения кредита таковы, что через год после выдачи кредита начисляются проценты по кредиту, после этого выплачивается часть долга. Под какой процент был взят кредит, если он был полностью погашен за 2 года, причём в первый год было выплачено 65 000 р., а во второй 57 500 р.?

x % – ставка по кредиту

В конце первого года долг клиента составляет $100\,000\cdot(1+0,01x)$.

В начале второго года он должен банку $100\,000\cdot(1+0,01x)-65\,000=35\,000+1000x$.

В конце второго года долг составил $(35\,000+1000x)(1+0,01x)$,

т.е. $10x^2+1350x+35\,000$.

Клиент погасил долг, заплатив 57 500 р., получаем $10x^2+1350x+35\,000=57\,500$.

$$x^2+135x+2\,250=0.$$

$$x_1=-150,\quad x_2=15.$$

Ответ. 15%.

§ 35. Прогрессии и банковские расчёты

35.8. В июле клиент взял в банке кредит на сумму 100 000 р. под x % годовых. Условия погашения кредита таковы, что через год после выдачи кредита начисляются проценты по кредиту, после этого выплачивается часть долга. Под какой процент был взят кредит, если он был полностью погашен за 2 года, причём в первый год было выплачено 65 000 р., а во второй 57 500 р.?

Обозначим: $p = 1 + 0{,}01x$

сумма кредита – S, первая выплата – A_1, вторая выплата – A_2.

Тогда:

В конце первого года долг клиента составляет $S \cdot p$.

В начале второго года он должен банку $S \cdot p - A_1$.

В конце второго года долг составил $(Sp - A_1)\,p$.

Клиент погасил долг вторым траншем, получаем $(Sp - A_1)\,p = A_2$.

Подставляем численные данные задачи $(100p - 65)\,p = 57{,}5.$

$$100p^2 - 65p - 57{,}5 = 0,$$

$$p_1 = -0{,}5 \quad p_2 = 1{,}15.$$

Отсюда $x_1 = -150, \quad x_2 = 15.$

Ответ. 15%.

Пример задания 18. КИМ – ЕГЭ

На доске написано более 42, но менее 54 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно −7, среднее арифметическое всех положительных из них равно 6, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −12.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение:

x – количество положительных чисел;

y – количество отрицательных чисел

$x + y$ – количество всех чисел

а) Сколько чисел написано на доске?

$$-7(x+y) = 6x - 12y$$

$$-7(x+y) = 6(x - 2y)$$

$$42 < x + y < 54$$

$$x + y = 48$$

б) Каких чисел больше: положительных или отрицательных?

$$\begin{cases} -7(x+y) = 6x - 12y, \\ x + y = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x - 5y = 0, \\ y = 48 - x \end{cases} \Rightarrow 18x = 240 \Rightarrow x = 13\frac{1}{3}$$

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

На доске написано более 42, но менее 54 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно −7, среднее арифметическое всех положительных из них равно 6, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −12.

Составление математической модели:

x – количество положительных чисел;
y – количество отрицательных чисел;
z – количество нулей;

$x + y + z$ – количество всех чисел.

$-7(x + y + z) = 6x - 12y$; $42 < x + y + z < 54$

а) Сколько чисел написано на доске?

Работа с математической моделью:

$$-7(x + y + z) = 6x - 12y; \qquad 42 < x + y + z < 54$$

$$-7(x + y + z) = 6(x - 2y);$$

$$x + y + z = 48$$

Интерпретация результата:

Вывод: всего чисел 48.

б) Каких чисел больше: положительных или отрицательных?

Работа с математической моделью:

$$\begin{cases} -7(x + y + z) = 6(x - 2y) \\ x + y + z = 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - x = 56 \\ x + y + z = 48 \end{cases}$$

$$3y + z = 104$$

104 – при делении на 3 даёт остаток 2

$3y$ – кратно 3

$\Downarrow$

z – при делении на 3 даёт остаток 2

$\Downarrow$

$$z = 3k + 2$$

б) Каких чисел больше: положительных или отрицательных?

Работа с математической моделью:

$$\begin{cases} 3y + z = 104, \\ z = 3k + 2 \end{cases} \Rightarrow 3y + 3k + 2 = 104 \Rightarrow y = 34 - k$$

$$\begin{cases} y = 34 - k, \\ z = 3k + 2, \\ x + y + z = 48 \end{cases} \Rightarrow x + 3k + 2 + 34 - k = 48 \Rightarrow x = 12 - 2k$$

$$\begin{cases} x = 12 - 2k, \\ y = 34 - k, \\ z = 3k + 2 \end{cases} \Rightarrow x - y = 12 - 2k - (34 - k) = -22 - k < 0$$

Интерпретация результата:

Вывод: отрицательных чисел больше.

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Работа с математической моделью:

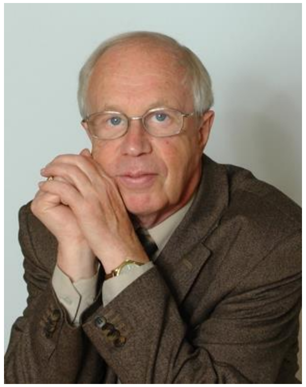
$$\begin{cases} x = 12 - 2k, \\ k \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x \leq 12$$

Например,
12 положительных чисел равных 6
34 отрицательных числа равных –12
2 нуля

Интерпретация результата:

Вывод: наибольшее количество положительных чисел 12.

Отличительные особенности
УМК «Лаборатория А.Г. Мордковича»



Курс построен на основе приоритетности функционально-графической линии, математическое моделирование является идейным стержнем.

- Теория и практика соединены в одну книгу.
- Порядок тем соответствует ПРП 2021, отражает психологические особенности обучающихся.

- Выстроена вероятностно-стохастическая линия в тесной взаимосвязи с основным содержанием.
- Каждая глава содержит разделы «Повторение», «Итак, в Главе…», «Вопросы», «Дополнительные задачи», «Из истории математики».
- Трёхуровневая система заданий отражает требования обновлённого ФГОС ООО 2021, итоговой аттестации. Добавлены задачи практического содержания, высокого уровня сложности.

- Включён материал, рекомендованный к изучению с использованием IT-средств в соответствии с обновлённым ФГОС ООО 2021.

Какие вопросы остались за кадром?

https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdfJ1EVQGYQDG41rgKY8MUAF6GVAPdtn3MSWU_DO79TXNyY0g/viewform

Мы готовы к диалогу

Адрес обратной связи:
kaf.matematika@gmail.com

В СОЮЗЕ С МАТЕМАТИКОЙ
Преподавание математики в основной и средней школе.
https://t.me/souzmatematikov

Методическое сопровождение учителей математики через авторский сайт https://elenamard.jimdofree.com